# Cửu Âm Chân Kinh

*Bí kíp dành cho các bạn trẻ ham học*

Vũ Phính

2023

# Lời ngỏ

Một hôm thứ bảy tháng 8 năm 2022, cũng như bao ngày thứ bảy khác, nhà mình đi chơi ở một khu trung tâm mua sắm. Lúc ăn trưa thì bà xã mới mua cho món gì của Thái và một ly cà phê sữa đá. Mặc dù biết là uống vào có khả năng thức trắng đêm, mình vẫn uống vì không cưỡng lại được. Sau đó thì trong người nó cứ rạo rực bức xúc hồi hộp rất khó chịu. Và như là có cái gì thôi thúc mình phải viết để chia sẻ những suy nghĩ của mình.

Về nhà là mình làm một lèo vài post trên trang Facebook cá nhân. Nhận được một vài comment hưởng ứng, thế là mình tiếp tục viết. (Mà tối hôm đó mình thức trắng đêm thật). Rồi bỗng dưng có comment "sao dạo này rảnh rỗi vậy Phính" từ Nguyễn Danh Thắng–giảng viên Đại học Bách Khoa Sài Gòn, bạn học thưở còn là sinh viên Bách Khoa Sài Gòn. Mà đúng mình rảnh thật! Thế là mình suy nghĩ tại sao mình rảnh. Lí do ra đời các bài post trên Facebook bắt nguồn từ sự rảnh rỗi này. Do đó cho mình giải thích một chút về hiện tượng này.

Mình có lẽ đang rơi vào cái gọi là *khủng hoảng tuổi trung niên*. Đó là không biết động lực gì để mình tiến lên. Ngẫm lại lúc nhỏ cứ lên trường, học theo thầy cô. Rồi thầy cô cho kiểm tra 15 phút và một tiết. Rồi bộ giáo dục thì tổ chức các kỳ thi: cấp 2, cấp 3, thi vào đại học. Mình cứ thế mà làm thôi. Như con trâu được người làm ruộng kéo đi. Chỉ việc đi. Lên đại học thì cũng trò chơi cũ. Có vui hơn một tí là mình có quyền cúp lớp mà không bị phạt. Cuộc chơi tiếp diễn nếu ai đi tiếp con đường học hành. Học cao học thì cũng y chang học đại học hay thậm chí cấp ba. Học bài rồi kiểm tra. Có tiêu chí, ai đạt thì qua. Như thi bằng lái xe, không hơn không kém.

Nếu đi tiếp thì cuộc chơi nó khó khăn hơn nhiều. Làm nghiên cứu sinh không có bài kiểm tra! Nhưng mà dù gì thì có một mục đích: cái bằng tiến sỹ! Cứ xem nó như là một siêu mẫu đang vẫy gọi ở một nơi xa xăm, thì mình dù bò cũng có ngày tới. Có người 10 năm mới làm xong tiến sỹ! Nói họ mà thấy mình cũng 6 năm Phính ơi, bèo quá!

Nếu lại tiếp tục trò chơi thì mình sẽ phải làm cái gọi là "hậu tiến sỹ". Mục tiêu chính của trò chơi này là kiểm tra xem tiến sỹ mới ra lò có tự chơi được không (nghĩa là làm gì đó mà không cần thầy hướng dẫn). Còn về người làm hậu tiến sỹ (HTS) thì mục đích chính là xuất bản được càng nhiều báo càng tốt. Sau một vài năm như vậy thì người làm HTS sẽ đi tìm công việc có tính dài hạn như là vị trí giảng viên đại học, hay là nghiên cứu viên trong một viện nghiên cứu nào đó.

Mình xong tiến sỹ cuối năm 2011 sau hơn 1 năm đau khổ ở Pháp và 4 năm tuyệt đẹp ở Hà Lan. Mình sau đó làm qua 3 cái HTS (ở Mỹ, ở Anh và cuối cùng là ở Úc) từ 2012 cho đến 2016. Trong lúc làm HTS ở Úc thì mình bắt đầu nghĩ tới xin việc làm giảng viên vì mình đã có gia đình, không lông bông được nữa. May mắn thay, sau khoảng chục cái xin việc không thành, thì mình xin được việc ở một trường đại học (ĐH) ở thành phố Melbourne. Trong trường ĐH thì cũng chỉ là một cuộc chơi mà thôi. Để bảo đảm không nhận nhầm người, họ đẻ ra cái gọi là thử việc. Trường hợp của mình không biết sao thời gian thử việc là 5 năm. Năm năm! Mình vào làm là tháng 3-2016, nghĩa là năm 2020 họ sẽ phỏng vấn xem xét "phong độ" của mình. Lúc 2016 mình không biết là 2020 là đại dịch Vũ Hán, sinh viên giảm sút, họ có thể kiếm cớ sa thải mình!!! Ôi, 2020 là một năm khủng khiếp.

Từ 2016 cho đến 2019 mình làm việc như điên. Và rồi cũng đến cái ngày "kiểm tra phong độ" vào tháng 3-2020. Một hội đồng rất nhiều người, hỏi này hỏi nọ mà giờ mình không nhớ rõ. Sau đó là một sự im lăng đáng sợ. Phải 3 tháng sau thì họ báo: mày qua cái thử việc, nhưng mà mày suýt rớt đó nhé và làm ơn chú ý cái này, cái kia. Giờ mình đã vào vị trí khó bị sa thải thì mình không biết nên làm gì tiếp cả. Không có siêu mẫu đứng chờ. (Mà nếu có siêu mẫu thật thì vợ cũng không cho bò tới.) Không bài kiểm tra. Nothing! Thật ra có đó các bạn, đó là cái chức danh GS. Nhưng mình thấy nó khó quá.

Đây là lúc mình hỏi mục đích sống là gì? Bây giờ mình đã có cơm ăn, đã có nhà cửa, tức là không phải lo lắng chuyện cơm áo gạo tiền. Công việc thì thấy chán chán. Công việc mình làm bao gồm hai hoạt động chính: một là giảng dạy và hai là làm nghiên cứu (hay còn gọi là viết báo như ở nước mình). Mình thì rất thích đi dạy. Lí do nó rất buồn cười: mình rất ít nói vì không biết nói chi, và trong một đám đông không ai chú ý tới mình. Đi dạy thì mình được nói và sinh viên phải chú ý tới mình! Nhưng mà mình dạy được năm sáu năm thì thấy mình không thay đổi cuộc đời của chú sinh viên nào cả! Như vậy là công việc giảng dạy không có ý nghĩa. Còn chuyện viết báo thì sao? Viết hoài thì cũng chán. Thêm hay bớt một bài báo của mình cũng không thay đổi cái thế giới này.

Vậy thì làm sao mình có ý nghĩa trong cuộc đời này? Trong lúc tìm câu trả lời cho câu hỏi này thì mình nhận ra rằng những trải nghiệm, những thất bại, những nỗ lực, những quyết định, những kiến thức của mình có thể hữu ích cho các bạn trẻ. Thế là mình bắt đầu chia sẻ quyển sách Toán mình viết, chia sẻ kinh nghiệm học hành. Rồi để cho các bạn trẻ thấy một người đã từng học kém cả Toán, Lý và Hoá mà giờ có thể hiểu Toán hơn, mình có cái suy nghĩ là kể lại những thất bại, những khó khăn, những gặp gỡ với những ân nhân, những quyết định vô thưởng vô phạt, để đi tới như bây giờ. Mình nghĩ rằng các bạn trẻ có thể rút tỉa được một vài kinh nghiệm từ những câu chuyện này. Không phải nhà triết học Hy Lạp cổ đại Publilius Syrus đã từng nói

> *Một người đàn ông khôn ngoan học hỏi từ những sai lầm của người khác, một kẻ ngốc học từ sai lầm của chính mình.*

sao?

Nếu mà bạn nghe GS Ngô Bảo Châu chia sẻ thì có lẽ không học được gì nhiều. Mình đã thử rồi. Đơn giản GS Ngô là thiên tài nên chuyện học hành của GS mình nghĩ là dễ như ăn cơm. Xin đơn cử một ví dụ. GS Ngô–lúc 16 tuổi– thi Olympic Toán thế giới năm 1988 đề bài có 6 câu hỏi, mỗi câu 7 điểm và GS chỉ có 42 điểm thôi, trông có vẻ dễ như kiểm tra 15'! Không thiên tài thì là gì. (Cần nhắc thêm rằng thiên tài Toán học người Mỹ gốc Úc-Hồng Kông Terrence Tao cùng thi năm đó chỉ đạt được 34 điểm mà thôi. Nói cho công bằng thì Tao lúc đó chỉ 13 tuổi.) Bạn hỏi GS Ngô làm sao để học được vậy, nếu ông trả lời được, gì mình cũng chịu!

Đó là lí do ra đời chính của những bài viết trên trang Facebook cá nhân. Rồi có vài bạn nói câu chuyện mình kể làm các bạn nhớ lại một thời nông nổi tuyệt đẹp. Một số bạn tốt bụng khen "Phính viết khá đó". Thế là mình viết tiếp. Cho đến một hôm thì dì Hằng (bạn thân của mẹ mình) mới comment "Con viết thật mà hay, sao con không viết thành sách?" Sách thì thật tình mình không nghĩ tới, nhưng mà viết trên Facebook rất bận tiện và có thể bị mất. Thế là mình chuyển các bài viết vào file PDF. Và đó là tại sao các bạn đang cầm trên tay quyển sách nhỏ này. Con cảm ơn dì Hằng thật nhiều.

Nếu những sai lầm, những trải nghiệm, những chia sẻ của mình, những câu chuyện của các danh nhân được trình bày trong quyển sách này, mà mình gọi là Cửu Âm Chân Kinh, giúp các bạn trẻ học hành tốt hơn, có một tương lai, một sự nghiệp hơn người viết thì mình xem nó là một thành công. Theo Kim Dung tiên sinh thì Cửu Âm Chân Kinh có hai quyển thượng và hạ, như vậy quyển này là quyển hạ. Lúc các bạn thành cao thủ võ lâm xin viết quyển thượng.

Có nhiều người sinh ra thông minh, có cha mẹ hay cô chú đang học hay đã tốt nghiệp đại học, và nhà có tủ sách thật to. Những người này vì vậy có một sự khởi đầu thuận lợi so với những người như Phính. Phính không thông minh, không có cha mẹ học đại học, không có cô chú tốt nghiệp đại học[†], và nhà cũng không có tủ sách. Người như vậy thì không có một khởi đầu tốt, việc gì cũng phải mò mẫm tự làm, và phải nhờ duyên số thì mới gặp được quý nhân giúp đỡ; nói chung vô vàn khó khăn, và quan trọng là không dùng được hết khả năng. Tại sao không hết khả năng? Vì không biết phương pháp học/làm việc, vì không có sách hay. Mình nghĩ còn rất nhiều bạn trẻ như vậy trên toàn quốc.

[†] Thật ra thì có một hai người nhưng họ ở xa.

Mình viết quyển sách này chủ yếu dành cho các bạn đó. Đó là các em từ lớp 8 đến sinh viên đại học, và cả người học cao học và các bạn làm nghiên cứu sinh. Do mình làm về ngành khoa học kỹ thuật bí kíp này bàn chủ yếu các đề tài liên quan đến ngành mà giờ có cái tên rất kêu: STEM. Các môn được bàn nhiều là Toán, lập trình, Lý, Hóa và cách giải quyết vấn đề.

Sách thì đã có, vấn đề là bạn có mở nó ra đọc hay không. Như Bernard Baruch, một nhà tài phiệt và chính trị gia người Mỹ, đã nói: *Hàng triệu người đã thấy quả táo rơi nhưng chỉ có Newton hỏi tại sao*, hay như câu *Phải có làm thì mới có ăn*, vậy thì các bạn trẻ hãy tắt điện thoại và lật sang trang tiếp theo để luyện Cửu Âm Bạch Cốt Trảo.

Vũ Phính
Ngày 21 tháng 10 năm 2023

# Mục lục

1 Chuyện cái nhà 10

2 Nguyên lý Patero 12

3 Những tao ngộ trong cuộc đời (1) 15

4 Những thần tượng đời thường của tôi (Phần 1) 19

5 Hai Bà Trưng hay Quốc Học? 23

6 Những thần tượng đời thường của tôi (Phần 2) 27

7 Vào Sài Gòn 33

8 Chương trình cao học Việt-Bỉ 39

9 Chuyện đi Tây (nước Pháp, hồi một) 45

10 Chuyện đi Tây (Hà Lan, hồi 1) 48

11 Chuyện đi Tây (Hà Lan, hồi 2) 50

12 Chuyện đi Tây (Hà Lan, hồi 3) 52

13 Chuyện đi Tây (Hà Lan, hồi kết) 56

14 Chuyện đi Tây (Mỹ) 62

15 Chuyện đi Tây (Úc) 67

16 Những tao ngộ trong cuộc đời (2) 71

17 Truyện kiếm hiệp và đá banh 73

18 Tại sao một người thiếu tự tin? 79

19 Bài báo đầu tiên ở Hà Lan 81

20 Câu chuyện Toán học: GS Ngô Bảo Châu và IMO 1998 84

21 Câu chuyện về phương trình bậc ba: Cardano và Ars Magna 90

22 Câu chuyện về một nhà Toán học nữ: Sophie Germain 95

23 Câu chuyện của June Huh 98

**24 Chuyện dạy và học** **101**

**25 Faraday: từ cậu bé đóng sách đến nhà bác học lỗi lạc** **111**

**26 Bảng đen/phấn trắng VS Powerpoint: ai hơn ai?** **114**

**27 Cách học tốt nhất: viết** **116**

**28 Viết bài báo khoa học** **119**

**29 Nhìn có vẻ ngu thì tốt hơn là ngu thật** **121**

**30 Lời than thở của nhà Toán học** **124**

**31 Học Toán như thế nào?** **127**
31.1 Tài liệu . . . 130
31.2 Đọc một quyển sách Toán như thế nào? . . . 132
31.3 Bí quyết học Toán . . . 132
31.4 Tự học với sự chỉ điểm của cao thủ . . . 134
31.5 Suy nghĩ bằng hình ảnh . . . 136
31.6 Một số phương pháp chứng minh toán học thông dụng . . . 136
31.6.1 Chứng minh trực tiếp . . . 136
31.6.2 Chứng minh bằng phương pháp quy nạp . . . 137
31.6.3 Chứng minh bằng phương pháp phản chứng . . . 137
31.7 Bắt đầu từ cái cơ bản . . . 138
31.8 Toán học là một ngôn ngữ với các kí hiệu riêng . . . 140
31.9 Giải một bài toán như thế nào? . . . 141
31.10 Phỏng đoán . . . 165
31.11 Toán học có đáng sợ như đồn đại không? . . . 165

**32 Bin, bác hai và diện tích hình chữ nhật** **167**

**33 Hình học: Euclid và Elements** **177**
33.1 Bức tranh tổng thể của hình học phẳng . . . 177
33.2 Vài định lý quan trọng của hình học phẳng . . . 182
33.2.1 Tiên đề song song và hệ quả . . . 182
33.2.2 Góc trong các đa giác lồi . . . 182
33.2.3 Định lý Thales hay định lý tỉ lệ cơ bản . . . 183
33.2.4 Tương đẳng và đồng dạng . . . 185
33.2.5 Định lý Pythagoras . . . 187
33.2.6 Các định lý về đường tròn . . . 188
33.2.7 Tiếp tuyến đến đường tròn . . . 192
33.3 Một số bài toán hình cơ bản . . . 194

**34 Hình học: bài toán dựng hình** **196**
34.1 Bài toán dựng hình: kiến thức cơ bản . . . 196
34.1.1 Chia đôi đoạn thẳng . . . 197
34.1.2 Chia đôi một góc . . . 198
34.2 Dựng đa giác đều . . . 198
34.2.1 Dựng tam giác đều và lục giác đều . . . 198
34.2.2 Dựng ngũ giác đều . . . 199
34.2.3 Dựng đa giác đều 7 cạnh và 17 cạnh . . . 200
34.3 Ba bài toán cổ nổi tiếng . . . 202

**35 Hình học: topology** 204

**36 Chuyện cái gương** 208

**37 Bất đẳng thức** 219
37.1 Kiến thức cơ bản . . . 219
37.2 Một vài bài khởi động . . . 219
37.3 Bất đẳng thức về trung bình cộng và trung bình nhân . . . 221
37.4 Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz . . . 224
37.5 Một vài bài tập bất đẳng thức . . . 225
37.6 Bài toán đẳng chu . . . 231
37.6.1 Tam giác . . . 232
37.6.2 Tứ giác . . . 232
37.6.3 Đa giác đều và đa giác: ai mạnh hơn? . . . 233
37.6.4 Đa giác đều $n$ cạnh: càng nhiều cạnh diện tích càng lớn . . . 233
37.6.5 Tesselation: Toán học của việc lát nền . . . 234
37.7 Bài toán khoảng cách ngắn nhất của Heron . . . 235

**38 Chuyện lập trình** 238

**39 Bàn về kỹ năng giải quyết vấn đề** 253
39.1 Con cáo, con ngỗng và bắp ngô . . . 253
39.2 Mũ của các tù nhân . . . 255
39.3 Người đàn ông bịt mắt và các đồng xu . . . 257
39.4 Số lẻ . . . 257
39.5 Bàn cờ vua và domino . . . 258
39.6 Vài bài toán que diêm . . . 260
39.7 Bài toán cháy dây . . . 261
39.8 Bài toán về nghệ thuật đếm . . . 262
39.9 Đo bán kính trái đất . . . 267
39.10 Tìm đồng tiền giả . . . 268
39.10.1 Một đồng tiền giả trong tám đồng tiền . . . 268
39.10.2 Một túi đồng tiền giả . . . 269

**40 Leonhard Euler** 270

**41 Luật Goodhart** 274

**42 Mình học tiếng Anh như thế nào?** 276

**43 Bạn muốn lái một chiếc Ferrari hay chiếc Honda CRV?** 280

**44 Làm một bài thuyết trình** 282

**45 Bức tranh tổng thể (big picture)** 285

**46 Toán Lý Hóa** 288

**47 Bàn về khoa học: Vật lý** 293

**48 Bàn về khoa học: Hóa học** 298

**49 Cảnh giới tối cao của sự hiểu biết?** 303

**50 Cờ tướng và việc học** 305

51 Nghệ thuật ước lượng 310

52 Ông tiến sĩ, ông là ai? 315

53 Đôi dòng về làm nghiên cứu 317

54 Hamilton và Wiles: tột cùng của sự đam mê 326

55 Thầy thầy trò trò 330

56 Thầy thầy trò trò: một cuộc hôn nhân sắp đặt 333

57 Bệnh cả nể 335

58 Đền đáp nối tiếp 337

59 Đôi dòng về cái note Toán mình viết 339

60 Luật Benford 342

61 Cái gì quyết định cuộc đời chúng ta? 346

62 Người thắng cuộc: sống chậm và thắng chính mình 350

Lời cuối 352

Tài liệu tham khảo 355

# Todo list

# Chương 1

# Chuyện cái nhà

Ôn nội mình rất đông con trong đó người con lớn nhất là bác Hội. Bác Hội, nghe ba mình kể vì bác mất lúc mình còn chưa ra đời, rất giỏi Toán và thích Toán. Sau bác Hội là bác Nguyên. Ba mình là người con thứ ba. Sau đó thì là chú Thọ, cô Phương và cô Thảo. Hồi xưa ba mình học Quốc Học nhưng vì khổ qúa nên bỏ học đi lính. Ôn và ba mình không hợp nhau, vì vậy ôn không thích ba và ghét luôn mẹ mình. Sau này nghe kể lại ba mẹ mình và mình ở trong một cái mà phòng thì cũng không phải mà chuồng cũng không phải. Trời mưa bão thì ướt hết. Mình quá nhỏ để hiểu cực khổ đó.

Ba đạp xích lô chở khách và chở cả nước đá. Lúc lên dốc nặng quá mình ra đẩy phụ. Sau này vì làm nhiêu cũng không đủ ba mình còn phải gánh đám tang. Nghe lóm ba mình nói chuyện, cái hòm nó nặng lắm.

Mình nhớ hồi đó có phong trào nuôi cá. Không biết từ đâu mà có cá, nhưng chậu thì phải tự làm. Mấy đứa trong xóm mới đi ra sở Điện Lực Huế, lấy mấy tấm ô vuông lót đường về. Rồi từ đâu không biết mà cũng có xi măng, thế là có chậu. Suốt ngày đi kiếm bobo về cho cá ăn. Rồi đem cá đi đá, xem con nào thắng. Có giai đoạn thì lấy bao thuốc lá và nắp chai nước ngọt làm xe. Kéo đi chơi rất thích. Nhưng mà mình chỉ toàn bắt chước người khác thôi. Không tự làm ra trò chơi được! Đó là một trong những điều đáng tiếc nhất!

Rồi còn một trò chơi khác rất tinh quái mà không biết ai đã nghĩ ra. Buổi tối trong xóm rủ nhau ra ngoài đường Trần Phú chỗ gần đường sắt í (nhà ôn nội mình ở đó), rồi lấy một sợi dây, một đầu thì kẹp vào ít tiền (hay giấy), ném ra ngoài đường. Có người đi xe đạp ngang qua thấy có tiền dừng xe xuống lượm, thì dựt ngay sợi dây. Hình như họ chửi quá trời!

Mẹ mình làm ở bệnh viện Huế. Hồi đó mình nhớ mình thích nhất là dì Hằng (xem hình bên) và dì Nga. Hình như mình hay được dì Hằng chăm và có khi về nhà dì chơi nữa. Hồi đó mẹ hay dẫn mình ra bệnh viện, có lẽ ở nhà không ai trông. Một hôm mình theo mẹ ra bệnh viện Huế thì thấy có một con thỏ. Thường thì thỏ chạy rất nhanh, sao con này cứ đúng yên. Thấy vậy mình mới nhờ một dì ra xem sao. Cuối cùng hai dì cháu bắt được nó. Mà không biết tại sao không trả lại cho bệnh viện mà mẹ đem về nhà nuôi. Kết quả là sau đó thỏ này sinh ra rất nhiều thỏ con. Phải làm chuồng. Hồi đó mình đi theo ba hái lá cây về cho tụi nó ăn. Mình nhớ là có ăn thịt thỏ, không nhớ rõ lắm, hình như ngon. Mà thời đó có cái gì mà không ngon?

Rồi ba mẹ mình dọn ra ở riêng. Nhà mình lúc đó ở trong khu Ngự Bình gần chùa Kim Quang. Xung quanh toàn là mộ và mộ. Và toàn là nhà nghèo. Không thấy ai đá banh, không thấy ti vi màu, không ai có iphone, ipad chi cả. Mãi sau này thì nhà trước mặt mua được cái ti vi ba màu. Và đúng lúc trên ti vi chiếu Tây Du Ký. Ôi, thật sung sướng dõi theo con khỉ có cái tên ngồ ngộ Tôn Hành Giả. Hồi đó buổi tối là theo mẹ đi qua nhà hàng xóm tivi. Mình nhớ xem Phạm Công Cúc Hoa, khóc quá trời luôn.

Lúc đó mình mất dạy lắm, chửi thề tùm lum. Mình nhớ chửi cả cậu mình! May là không biết ai chỉ cho mà đi Phật Tử. Đi chùa gì thì quên rồi. Đi một thời gian mà mình hết mất dạy thật. Ít nhất là hết chửi người khác. Lúc đó còn siêng lắm, buổi tối còn đi lên chùa tụng kinh (dù không biết nó có nghĩa gì!). Mà đường từ nhà lên chùa thì phải đi qua bãi tha ma, mà đứa nào cũng sợ ma như nhau hết. Vậy mà vẫn đi đều đều, vừa đi vừa nói tầm bậy. Nghe nói là nói những thứ đó ma sẽ tránh.

Rồi mẹ mình sinh em gái mình, Su su. Khác với mình, Su su rất là dễ thương, ai nhìn cũng thích ngay. Nó còn có cái biệt hiệu là cô bé Liên Xô. Nếu biết trước tương lai mình sẽ đặt là Cô Gái Hà Lan. Tiếc là hai anh em cách nhau đến 7 tuổi và tính cách quá khác nhau nên không thân thiết; quả là môt điều đáng tiếc! Cả chuyện đọc truyện cũng khác nhau; Su thích truyện tranh còn mình thì không đọc loại đó! Nhiều lúc mình dắt cả em đi học vì không có ai trông. Và nhiều bạn thắc mắc tại sao Phính thế này mà có em gái xinh thế kia.

Nghe mẹ mình kể là hồi đó mình hay giúp mẹ đi chợ. Mẹ dặn là mua cái này, cái kia. Mình cứ thế ra chợ Phước Vĩnh mua, nào là thơm, hành, thịt bò, về mẹ nấu canh thơm thịt bò, mình rất thích món này. Hai mẹ con còn lên núi Ngự Bình cào rác thông đem về làm củi nấu ăn.

Lúc nhỏ cậu Danh (em mẹ mình) hay lên Huế chơi và chở mình đi ăn chè (chè Hẻm thì phải) và đi xem phim. Nhớ mãi vì được đi xem rạp. Xem phim Hàm Cá Mập và nhiều phim chưởng của Khương Đại Vệ và Địch Long.

Gia đình ở đó một thời gian thì đùng một cái chuyển nhà lên trên ga Huế. Cuộc đời nhà mình và mình rẽ sang một trang mới từ đây. Ôi cái nhà nó to làm sao! Có nhiều phòng, có cả vườn và có nhiều cây lắm luôn: ổi có nè, đào có nè, mẫn cầu cũng có nè. Lúc đó mình không biết đặt câu hỏi vì sao mà ba mẹ có thể mua nổi cái nhà to như vậy? Mà kể cũng lạ, ba mẹ mình quyết định gì thì không cho mình biết.

Sau này thì mình mới hiểu nguyên cớ. Số là chủ của căn nhà đó phải đi Mỹ định cư, mà đó là nhà thờ nên không thể bán. Thế là họ phải tìm một người đáng tin tưởng để cho vào ở. Tiêu chí ở đây là đáng tin tưởng, vì họ sợ người này sẽ cướp căn nhà đó. Và người được chọn mặt gửi vàng là ba mình. Họ chọn không nhầm người tí nào. Mình có thể cướp cái nhà đó (nếu bị xúi dại chẳng hạn) nhưng mà ba mình thì 100% không, không bao giờ.

Đó là lí do tự dưng mình được lên thiên đàng. Không thiên đàng thì là gì? Nhà nào ở ga Huế cũng có ti vi, mà là ti vi nhiều màu nữa cơ. Nhà nào cũng chiếu phim kiếm hiệp. Đi ra sân ga thì thấy các bạn đá banh!

Mẹ mình thì làm ở bệnh viện Huế, ở đâu cũng không khác biệt. Nhưng với ba mình và mình thì hoàn toàn khác. Ba mình có thể kiếm nhiều tiền hơn (trước và đỡ vất vã hơn). Bây giờ ba mình cho khách du lịch thuê xe máy, phần lớn là người nước ngoài. (Và đó là nguyên do ba mình khuyên mình học tiếng Anh). Hồi đó ba mình còn dẫn mấy ông bà Tây về nhà ăn. Và một ông người Anh thích dì Nghi của mình. Nhưng mà không biết do anh Tây không biết cua gái hay sao mà dì mình vẫn ở VN.

Người sung sướng nhất có lẽ là mình. Ở ga Huế mình gặp gia đình ôn Vui (chú Lễ, anh Bé vv), được xem phim Hồng Kông, đi đá banh, đi tắm sông lúc nào thích (có ngày tắm đến bốn lần!), rồi còn đi học Anh Văn ở trung tâm Cenlet. Nói không ngoa tí nào, đời mình sang một trang mới kể từ đây.

Gia đình mình ở đó tương đối hạnh phúc cho tới khi mình vào đại học. Nhưng mà, người ta đòi lại cái nhà! Những rắc rối xung quanh chuyện này ba mẹ không kể cho mình vì sợ ảnh hưởng việc học. Chỉ biết là một tết hay hè nào đó mình về thì ba mình đón từ ga rồi dẫn về nhà mới. Một căn nhà ở trên đường Trần Phú, và dĩ nhiên nó nhỏ hơn rất nhiều căn nhà cũ.

Ấy vậy mà nhà mình còn chuyển thêm một lần nữa và như mọi khi mình không biết chi hết. Lần này thì mình chuyển lên sống gần chùa Tổ Tây Thiên, sau đàn Nam Giao.

Rồi như một sự sắp đặt của số phận, mình cũng như ba, đi từ cái nhà này sang cái nhà khác. Điều thú vị là mình chuyển nhà không trong một thành phố, hay quốc gia, mà mình đi lung tung khắp năm châu bốn bể (trừ châu Phi).

Ngày 30 tháng 7 năm 2022

# Chương 2

# Nguyên lý Patero

NGUYÊN lý Patero[†] (hay còn gọi là luật 80-20), phát biểu rằng chỉ 20% những gì mình làm đóng góp vào 80% thành công mình đạt được. Các bạn trẻ (học sinh cấp 2/3 và sinh viên đại học) có thể áp dụng luật 80-20 này trong việc học của mình. Bài viết này chia sẻ kinh nghiệm từ tác giả, người mà chỉ biết đến nguyên lý này khoảng 6 năm về trước. Có nghĩa là mình không biết gì đến nguyên lý này lúc học phổ thông và đại học (những năm 90-2000), nhưng ngẫm lại thì thấy nó đúng!

(Nhân tiện, cái hình dao găm † ở ngay sau từ Patero phía trên gọi là một chú thích cuối trang. Cái biểu tượng này ám chỉ rằng bạn nên nhìn vào cuối trang để xem thêm thông tin bổ sung. Trong trường hợp này thì chú thích cuối trang là để giải thích Patero là ai. Dĩ nhiên khi có nhiều hơn một chú thích thì mỗi chú thích sẽ gắn với một biểu tượng khác nhau. Ví dụ ‡ có thể dùng.)

Để cho dễ hiểu sử rằng chương trình học có 10 môn. Vậy thì luật 80-20 bảo ta hãy học 2 môn thôi, và chính 2 môn này sẽ quyết định thành công của chúng ta (khoảng 80%). Làm sao biết 2 môn nào? Để trả lời câu hỏi này thì cần xét 2 trường hợp.

Trường hợp một: học sinh cấp 3. Mình thích nghành kỹ thuật và thi đại học ngành này thì cần 3 môn: Toán, Lý và Hoá. Do đó, 3 năm cấp ba mình chỉ học 3 môn này thôi. Những môn khác mình học cầm chừng: học làm sao đừng ở lại! Như vậy thay vì dùng năng lượng và thời gian (đều là hữu hạn) để học 10 môn, giờ mình chỉ cần học 3 môn thôi. Nhưng chúng ta có thể áp dung luật 80-20 vào 3 môn này! Rõ ràng là nếu mình học Toán vững thì học Lý và Hoá cũng dễ dàng hơn, và vì mình không thích Hoá, nên mình chỉ học Toán và Lý là chính. Tính toán của mình là: nếu Toán và Lý được khoảng 16 điểm thì Hoá chì cần 6 điểm thì được 22 điểm. Chừng đó có thể vào được Bách Khoa Xây Dựng (nếu mà hồi đó mình chọn Công Nghệ Thông Tin–điểm chuẩn năm 1998 là 25) thì mình rớt rồi. Mình được khoảng 23 điểm (gần đúng với tính toán). Các bạn cần biết thêm rằng đến năm lớp 9 mình vẫn không biết cân bằng phương trình hoá học và không biết định luật Ohm (Ôm) thì như vậy là tốt lắm rồi.

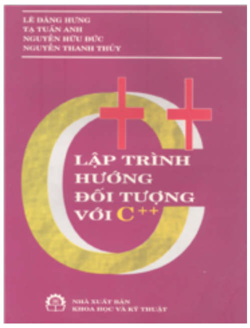
Trường hợp hai: sinh viên đại học. Cái này khó xơi. Vì sao? Vì chỉ có Chúa mới biết sau khi ra trường 2 môn nào quyết định 80% thành công! Trong trường hợp kỹ sư xây dưng như mình thì có khi tửu lượng cao lại quyết định thành công, chứ không phải là chuyên môn (như Kết cấu bê tông cốt thép chẳng hạn). Nếu logic không thể giúp (trường hợp của mình là người không chủ động nên không biết đi hỏi người đi trước), thì chỉ còn lắng nghe con tim thôi. Một lần nữa mình áp dung luật 80-20 (mà không biết): mình chỉ học môn mình thích thôi còn môn không thích, học cầm chừng. Kết quả? Có một học kỳ điểm trung bình của mình là 3.6/4 (Bách Khoa SG dùng thang điểm 4), nhưng mà nhiều học kỳ, điểm của mình chỉ đạt 2/4.

Một kết quả tất yếu của kiểu học này là: bạn sẽ không bao giờ có bằng giỏi! Vậy thì học kiểu này có cái gì hay? Mình không biết! Đây chỉ là những suy ngẫm về quá khứ thôi. Thay vì dành thời gian học những môn mình không thích, mình học 2 thứ mà lúc đó chẳng liên quan gì đến xây dựng: môn Phần Tử Hữu Hạn và môn lập trình `C++`. Ma đưa lối quỹ dẫn đường thế nào mà mình lại học 2 môn này? Chỉ là sự tình cờ. Hay nói cho văn vẻ: đó là số phận. Môn Phần Tử Hữu

[†] Vilfredo Federico Damaso Pareto(1848 –1923) là một nhà thông thái người Ý (kỹ sư xây dựng, nhà xã hội học, nhà kinh tế học, nhà khoa học chính trị và nhà triết học).

Hạn chỉ dạy ở khoa Cơ Khí mà thôi, và một người bạn xây dựng rủ mình đi học ... cho vui. Ok thôi. Còn gì bằng "having fun"? Học được vài buổi thì bỏ (con khỉ–mình sinh năm con khỉ–là như vậy đó).

Còn về lập trình `C++` thì thế này. Hồi đó sinh viên Huế xa nha vô SG học thường thuê nhà ở chung. Và mình ở chung với một anh học Công Nghệ Thông Tin và anh có quyển sách có cái tựa đề rất là gây tò mò: *Lập trình hướng đối tượng với `C++`*. Mình không có thiện cảm với lập trình (do cấp ba học ngu môn này). Nhưng mà cái chữ `C++`, với C thật to và ++ nhỏ nhỏ nằm chếch lên một tí, thì gây ấn tượng với mình. Nó là cái gì đó fantasy, một cái gì đó không nhàm chán như xây dựng. Vậy là mình cầm quyển sách đó lên đọc, rồi ... bỏ xuống. Không thể làm khác hơn được. Đó là những năm 1998-2003. Phần Tử Hữu Hạn thì mình vẫn chẳng biết gì và `C++` vẫn chỉ là một thứ gì đó xa xôi. Thế nhưng sau này mình gặp lại chính 2 thứ này như là một sự sắp đặt của số phận.




Sau khi tốt nghiệp (dĩ nhiên là bằng khá), thì mình quyết định đi học cao học Việt-Bỉ. (Cảm ơn ba mẹ đã ủng hộ con). Và trong chương trình cao học này thì môn Phần Tử Hữu Hạn là một môn chính! Đến lúc tìm đề tài tốt nghiệp thì nhân vật `C++` nhảy vào. Hồi đó, thấy các anh đi trước đi nước ngoài về kể nhiều chuyện giáo sư này giáo sư nọ–những người mà mình chỉ biết đến qua sách vở, và mang về sô cô la Bỉ rất ngon, mình đã có ý muốn đi nước ngoài từ lúc nào không hay. Mình muốn gặp những nhân vật huyền thoại này. Thế thôi! Lấy cái gì để đi nước ngoài? Không TOEFL, IELTS, không bằng giỏi, không có tiền.

Mình quyết định phải làm một đề tài tốt nghiệp xuất sắc để lôi kéo sự chú ý của GS Nguyễn Đăng Hưng–chủ nhiệm chương trình Việt-Bỉ. Nhờ anh Trần Đức Hân gợi ý, mình tìm được một đề tài nóng (nghĩa là đề tài mà nhiều người quan tâm), nhưng mà không có tài liệu. Thế là mình email cho tất cả GS trên thế giới để xin tài liệu. Không ai trả lời. Cho đến một hôm thì mình nhận dược email từ một người tên là Stéphane Bordas. Stéphane là người Pháp và lúc đó đang làm hậu tiến sỹ ở EPFL[†], Thuy Sỹ. Ông nói: mày có muốn tau hướng dẫn đề tài tốt nghiệp của mày không. Cuối email–như là một sự sắp đặt của số phận, ông hỏi: "Nhân tiện, mà chú có biết `C++` không?" "Yes, I know `C++`". Đó là câu trả lời của mình. Và đó là điểm bắt đầu cho một chặng đường cam go dài đúng một năm. Vì thật ra mình biết `C++` mà `C++` nó chưa biết mình. Hình bên cạnh là mình chụp với Stéphane năm 2010, tức là 7 năm sau thì mình mới gặp ông lần đầu tiên. Rất đẹp trai, nhìn luôn trẻ, và là dân Paris chính gốc.

Phải đúng một năm trời thì mình mới có kết quả. May mắn là nỗ lực của mình được đền đáp: luận văn tốt nghiệp của mình đạt điểm 19/20, cao nhất trong lớp. Đó là phút huy hoàng duy nhất của mình. Và rồi điều mình chờ đợi đã đến: GS Hưng và Stéphane Bordas giới thiệu mình cho một GS ở Pháp. Mình đi Pháp tháng 2 năm 2006. Từ đó đến nay đã được 16 năm. Vậy thì 2 môn nào ở trường BK quyết định 80% thành công? Thành công là gì thì rất khó định nghĩa–đối với một người tầm thường như mình thì được đi nước ngoài ngầm nghĩa là thành công vậy. Bất ngờ thay, đó là môn Phần Tử Hữu Hạn và lập trình `C++`: hai môn không nằm trong chương trình chính quy!

Để kết luận mình dùng câu nói nổi tiếng của Steve Jobs (1955 – 2011), người đồng sáng lập công ty Apple:

> *"Bạn không thể kết nối các dấu chấm (sự kiện) khi nhìn về phía trước; bạn chỉ có thể kết nối chúng khi nhìn ngược lại. Vì vậy, bạn phải tin tưởng rằng các sự kiện sẽ kết nối bằng cách nào đó trong tương lai của bạn. Bạn phải tin tưởng vào một thứ gì đó - linh cảm, số phận, cuộc sống, nghiệp chướng, bất cứ điều gì."*

[†]The École polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL), tiếng Anh: the Swiss Federal Institute of Technology Lausanne.

Bạn có thể xem bài phát biểu của Steve Jobs ở Youtube, chỉ việc tìm Steve Jobs speech.

Nhưng nếu bạn nghĩ Jobs là người đầu tiên nói điều này thì bạn nhầm to. Nhà thần học, triết gia, nhà thơ, nhà phê bình xã hội người Đan Mạch, Soren Kierkegaard (1813–1855) đã nói "Cuộc sống chỉ có thể được hiểu bằng cách nhìn về phía sau; nhưng nó phải được sống hướng về phía trước" cách đây hơn 100 năm.

Các bạn trẻ, nếu bạn thích học gì thì cứ học. Những môn còn lại, có thể học cầm chừng. Nếu bạn giỏi như Steve Job hay Bill Gates, bạn có thể làm điều mà mình không làm được: bỏ học để làm điều gì to tát hơn. Nhưng đó là bạn nghe theo mấy ông kia, mình không liên quan gì nghen. Các bạn trẻ, nếu bạn cũng muốn đi du học và cũng như tôi 19 năm về trước, email trực tiếp cho tất cả GS. Sẽ có một người trả lời. Thư mình gửi Stéphane chẳng có gì đặc biệt (tiếc là mình không tìm lại được email này). Stéphane trả lời là may mắn, là số phận của mình. Gần 100 năm trước nhà toán học thiên tài Ấn Độ Ramanujan (lúc đó chỉ là một người thư ký nghèo) đã gửi thư trực tiếp đến Hardy–GS Toán nổi tiếng đại học Cambridge. Sau này Hardy nói "biết đến Ramanujan là phát hiện lớn nhất của đời tôi".

Ngày 1 tháng 8 năm 2022

# Chương 3

# Những tao ngộ trong cuộc đời (1)

LÀM sao một người tụt hậu về Toán, Lý, Hoá vào năm lớp $7, 8, 9$ lại vào khối A và cuối cùng là vào Bách Khoa Sài Gòn? Là sắp đặt của số phận cả, phần lớn là vậy, theo thiển ý của mình.

Câu chuyện thế này. Hồi đó nhà mình đón dì Nghi đến ở. Dì Nghi là em gái út của mẹ mình, dì đến nhà mình ở để học đại học Huế. Bên kia con đường Bùi Thị Xuân đối diện nhà mình là nhà ôn Vui. Nếu chỉ có mình ôn thì chắc không biết mình sẽ ra sao ... Câu chuyện nó hay là nhờ ôn Vui có mấy người con mà trong số đó là anh Bé. Anh Bé là cựu học sinh Quốc Học Huế và lúc đó (tầm năm 1992-1994) là sinh viên Đại học Huế, khoa Toán Tin. Và anh đang cô đơn.

Mình đoán là anh Bé thích dì của mình. Và mình là người được lợi nhất trong câu chuyện này, vì dì mình ... không thích anh Bé. Chính anh Bé là người đã giúp mình có căn cơ về Toán. Và chỉ cần như vậy là đủ để cho mình thi đậu vào cấp ba. Trường Hai Bà Trưng thôi chứ không phải là Quốc Học (đó sẽ là một câu chuyện thú vị cho một ngày khác, xem Chương 5).

Ngoài anh Bé thì ôn Vui có thêm người con là chú Lễ (anh trai của anh Bé, Hình 3.1). Chú Lễ không phải là sinh viên đại học nhưng mà chú có ảnh hưởng rất lớn đối với mình. Hồi đó, trước lúc mình ở gần nhà ôn Vui, thì nhà mình ở gần núi Ngự Bình, nhà không có TV, không có radio nên mình chẳng biết tí gì về thể thao. Sau đó, tạ ơn trời đất, nhà mình chuyển lên ở ga Huế, và đối diện không nhà ai khác, nhà ôn Vui. Chú Lễ là người thích thể thao, phim Hồng Kông, thích chơi chim và cây cảnh (sau này mình mới biết chú làm thơ rất hay). Tiếc là chú đã có vợ nên chú không truyền hết sở trường cho mình (Mình giả sử ở đây là ai là con trai độc thân ở gần nhà mình đều thích dì Doan Nghi của mình, không chỉ phải vì là dì rất chẹp chẹp (dì Nghi là người đội mũ trắng trong hình, còn em gái nhỏ là Su su) mà vì ngoài anh Bé, ở một nhà gần đó cũng có một anh thích dì. Nếu có 2 người thích dì thì theo logic toán học mình tổng quát lên $n$ người thích dì). Nhưng mà chú đủ hào phóng hay quá hào phóng vì chú không có động cơ nào như em trai chú!

Mình nhớ một hôm mình qua nhà chú chơi và trên TV có chiếu đá banh. Chị Si (em gái út của chú Lễ), thấy mình không biết tí chi về thể thao, nói ngay: “con trai chi mà không biết tí gì về đá banh”. Nghe xong mình ngượng lắm và quyết định tìm hiểu thể thao. Nhờ đi mua báo *Thể Thao Văn Hoá* cho chú mà mình biết đến các câu lạc bộ bóng đá như MU, Ajax, AC Milan và tình yêu bóng đá của mình cũng bắt đầu từ đó. Nhờ sang nhà chú mà mình được xem World Cup 1994. Mình nhớ mãi trận tứ kết giữa Hà Lan và Braxin. Sau khi qủy lùn Romario với đôi chân vòng kiềng mở tỉ số sau đường chuyền chính xác đến từng centimet của Bebeto thì đến lượt Bebeto ghi bàn nâng tỷ số lên 2-0 cho đội bóng vàng xanh. Và sau đó là màn ăn mừng kinh điển theo kiểu ru con của Bebeto và Romario và Mazhino. Hình ảnh này có lẻ sẽ khó phai nhòa trong tâm trí người hâm mộ trái bòng tròn. Rồi từ đó mình say mê đội Brazil. Nhờ sang nhà chú mà mình được xem Sở Lưu Hương và bao nhiêu phim Hồng Kông.


Hình 3.1: Chú Lễ (trái) và gia đình ôn Vui. Người ôm mệ Vui là chị Si và anh Bé là người mặc áo vét đen (hình phải).

Và nhà chú cũng là nơi trú ẩn cho mình để đọc truyện kiếm hiệp lén. Nhà chú ở cạnh con sông, ở đằng sau có một cái giường nhỏ, mình giấu quyển truyện trong người, rồi nói với ba mẹ là sang nhà ôn Vui. Dĩ nhiên là ba mẹ mình rất yên tâm. Mình qua đó, đi thẳng một mạch đến cái giường, lấy truyện ra đọc. Đọc xong (phải đọc nhanh vì là truyện thuê), giấu nó lại vào người, rồi đi về. Thật ra mẹ mình biết hết! Bởi vì mỗi lần như vậy người mình nó đờ đờ. Thank you mamy.

Mẹ của anh Bé và chú Lễ là mệ Vui. Mệ thì không trực tiếp dạy gì cho mình. Nhưng mình nhớ nhất là mỗi lần trước khi đi học Sài Gòn thì mình qua bên nhà mệ để chào. Mệ luôn dúi cho mình vài thanh kẹo chewingum. Ôn mệ Vui còn có o Ái là giáo viên và bác A là bác sỹ, trong khi chị Si là luật sư (Hình 3.1).

Cảm ơn chú Lễ rất nhiều. Một điều bất ngờ là sau này lúc mình học Hai Bà Trưng (HBT), nhờ những kiến thức thể thao văn hoá này mà mình được chọn vào đội Bảy Sắc Cầu Vồng của trường. Và không biết tại sao đội HBT lại là người chiến thắng để đại diện cho Huế đi thi! Mình không tự hào gì về thành công của đội HBT vì đóng góp của mình là tí hon. Nhưng mà sự kiện này rất quan trọng đối với một người thiếu tự tin như mình. Và nhờ nó mà mình được đi du lịch thành phố Vinh, ở khách sạn lần đầu tiên trong đời.

Rồi như một sự trớ trêu của số phận, mình lại phải chuyển nhà. Thế là mình phải chia tay nhà ôn Vui–nói theo người Tây–là nhà hàng xóm tốt nhất một người có thể có. Từ đó mình ít gặp lại chú Lễ, anh Bé và mệ Vui. Nhưng mỗi lần về Huế, mình lúc nào cũng về thăm chú. Nếu không làm được thì chỉ vì "nhân tại giang hồ, thân bất do kỷ" thôi chú. Thank you forever gia đình ôn Vui!

Nhân vật phản diện đâu? Đầy ra đó các bạn ạ. Đời không phải lúc nào cũng màu hồng. Buồn thay, bad guys không ai khác, ở ngay nhà mình luôn. Nhưng mà nhớ họ để làm gì??? Mình biết được một triết lí sống rất hay của anh Tuấn (mình gặp ảnh lúc sang Hà Lan): chỉ nhớ đến điều tốt và quên đi điều xấu. Anh Tuấn có thể áp dụng được nhưng mà mình thấy cái này mình chưa áp dụng được hoàn toàn.

Sau khi được anh Bé truyền nội công đủ cho mình vào đại học thì mình vào DHBK (đại học Bách Khoa Sài Gòn) năm 1998. Hồi đó mình chọn học lớp tiếng Pháp bởi vì một lí do rất thực tế: học lớp tiếng Pháp sẽ được 100 000 đồng một tháng (đại loại có tiền mà tiền là tiên là phật). Và trong lớp đó mình học cùng lớp thần tượng Phương Thảo. Thảo là dân chuyên Toán Quốc Học mà mình thì rất ngưỡng mộ các bạn chuyên Toán. Lí do đơn giản: cái đề thi vào lớp chuyên Toán mình còn không hiểu, huống gì là giải! Trong lớp còn có Khuong Tran và một vài bạn từ A1 Quốc Học. Thảo thì mãi mình không học bằng. Thảo có sự thông minh mà mình mãi không có. Ngạc nhiên là, ngoại trừ Thảo thì các bạn Quốc Học khác học đại học cũng không hơn mình nhiều.

Bạn Thảo là người chỉ cho mình đừng học thuộc lòng công thức mà phải biết cách dẫn giải ra. Mình không thể cảm ơn hết lời khuyên này. Nhưng câu chuyện mình muốn kể sau đây là về một người khác. Về Thảo, mình còn nhiều để nói sau này.

Phương là tên của một người bạn học chung BK. Phương là cựu học sinh chuyên Vĩnh Long và là một người tài hoa. Mình cũng không hiểu sao cậu ta làm bạn với mình. Chính Phương là người dẫn mình đến với nhạc tiếng Anh. (Mình rất khá tiếng Anh nhưng mà lúc đó mình không biết nhạc tiếng Anh). Quan trọng nhất là, chính cậu bạn này là người rủ mình đi học môn Phần

Tử Hữu Hạn vô thưởng vô phạt (đề cập ở phần trước) mà sau này đóng vai trò quan trọng trong những sự kiện sau này.

Hồi đó, mình rất khổ sở với các môn học thuộc lòng vì mình vẫn học những môn này theo kiểu truyền thống: học thuộc lòng từng chữ! Trong khi mình thì học ngày đêm mà điểm vẫn lèo tèo thì Phương đi học nhạc, học vẽ, học cả cái môn đâu đâu là môn Phần Tử Hữu Hạn, mà điểm các môn vẫn cao. Mình hỏi (cảm ơn trời phật mình đã hỏi–hãy chủ động các bạn trẻ) cậu ấy: "Cậu học cách gì mà thấy có nhiều thời gian làm những thứ khác"? Phương chỉ cho mình, đối với những môn học thuộc lòng, thì chỉ học các ý chính (chỉ có vài ý thôi). Còn lại thì phang ra, có khi phang đại. Ông thầy, một là bận rộn vì ông phải chấm hàng trăm bài, hai là ông cũng lười nên ông không thể kiểm tra tất cả chi tiết, ổng thấy có các ý chính thì chắc chắn là 7,8 điểm trở lên. Thật là một bài học quý giá cho tôi! Từ đó mình áp dụng phương pháp này và thấy hiệu quả. Sau này mình mới biết đây là kỹ thuật *chunking*, mình sẽ trình bày nó ở Chương 24.

Phương còn là người giới thiệu cho mình chương trình *Những Ca Khúc Bất Hủ* của anh Trí Quyền. Chương trình phát lúc 11h tối. Trong nền nhạc tuyệt vời, giọng nói của Trí Quyền cất lên giới thiệu về bài hát và ca sỹ, sau đó tiếng hát vang lên. Thật tuyệt. Và mình mê phần lớn các bài hát tiếng Anh do anh giới thiệu. Mình có thể kể tên: *Self Control, Green Field* (mà vào năm 1973, nhạc sĩ Lê Hựu Hà của chúng ta sáng tác lời Việt với tựa đề *"Đồng Xanh*"; bài này mình thích Tuấn Ngọc và Bằng Kiều song ca), đặc biệt là ca khúc *Alone* trình bày bởi ban nhạc Heart, quá tuyệt vời cho một chàng trai đang cô đơn trong tình yêu. (Từ khi vào cao học mình không còn thời gian để nghe Trí Quyền nữa. Bây giờ có thời gian, mình xem thử chương trình của anh còn tồn tại không. Thật ngạc nhiên, và vui sao, nó vẫn còn tồn tại. Mình lại có thể nghe anh Trí Quyền trên mạng, bất cứ lúc nào: `https://voh.com.vn/radio-program-ca-khuc-bat-hu-60p-NjM3ODgzNjk1NDI0.html?fbclid=IwAR3h-VYWRvwXdaQHhxmHTYtzB4Kh0q440ydGZiujGw3UMo27_672QC75hMw`.)

Phương còn rủ mình qua bên Đại Học Tổng Hợp nằm trên đường Nguyễn Văn Cừ học cái gọi là "Phương pháp luận sáng tạo và đổi mới" do Tiến Sỹ Phan Dũng giảng dạy. Mặc dù không biết để làm chi, mình cũng đi học với Phương. Cũng hay, nhưng mà lý thuyết nhiều quá. Sau đó mình bỏ, còn Phương có tiếp tục hay không thì mình không nhớ. Mình nghĩ là môn này rất hay. Nếu được quay lại thời gian mình sẽ đi học và đầu tư cho môn này không thua kém các môn thi Đại Học.

Tiếc là sau này vì một lí do nào đó mình không biết rõ mà Phương và mình không còn là bạn nữa. Cũng như anh Bé, Phương chỉ xuất hiện để giúp mình trong lúc mình cần giúp đỡ nhất thôi, còn lại thì mày phải tự lo. Cảm ơn Phương vì những kinh nghiệm quý báu.

Tạm biệt bạn Phương, mình tiếp tục câu chuyện học cao học. Đó là lúc mình gặp một bạn nữ chuyên Toán Quốc Học khác, bạn Như. Tiếc là bạn Như theo chồng sang Singapore bỏ cuộc chơi sớm quá nên mình không học được gì từ Như. Qua Như mình biết Bảo Phương, ngôi sao của khoa Hàng Không. Bảo Phương học ở Singapore, và MIT, sau đó đi làm hậu tiến sỹ ở Northwestern. Như mình đã đề cập, lúc vào đại học mình chọn học tiếng Pháp vì tiền (nếu nhà mình giàu, chắc chắn mình không chọn tiếng Pháp vì có biết gì về nó đâu!). Và giờ mình cũng chẳng dùng nó. Thế nhưng việc học tiếng Pháp này lại vô tình đóng một vai trò quan trọng trong việc mình đi Pháp năm 2006.

Sự tình cờ đầu tiên: Stéphane Bordas, người đồng ý hướng dẫn luận văn thạc sỹ là người Pháp! Sự tình cờ thứ hai: GS Hưng là người Bỉ-láng giềng của Pháp và đã làm việc với các công ty Pháp và GS Pháp. Nhờ sự giới thiệu của hai người này, mình được học bổng đi Pháp. Nhưng mình không có bằng tiếng Pháp và mình cũng không nói thành thạo tiếng Pháp (Chuyện là không phải ai học lớp này đều được tiền, mà tiền nhiều hay ít phụ thuộc vào điểm số học chuyên môn. Khi nhận được ít tiền thì mình đã lơ là việc học tiếng Pháp). May mắn thay, chỉ cần học lớp tiếng Pháp ở BK (gọi là lớp AUPELF) là tương đương với bằng A1 hay B1 gì đó. Và chừng đó là đủ điều kiện để được cấp visa đi Pháp.

Hồi chuẩn bị đi Pháp thì visa mình có vấn đề và bà gì ở Đại Sứ Quán Pháp ở Hà Nội phải gọi điện cho mình. Dĩ nhiên là bà nói tiếng Pháp, mà mình không trả lời được! May mà bà biết tiếng Việt. Ở đầu dây bên kia bà nói, giọng Hà Nội chuẩn: "ôi giời ơi,...". Cảm ơn bà vẫn cho tôi visa.

Ngày 2 tháng 8 năm 2022

# Chương 4

# Những thần tượng đời thường của tôi (Phần 1)

SÁNG ni trong lúc chở con đi học, không hiểu sao mà hình ảnh các bạn từ thuở cấp một đến cấp ba cứ ùa về trong đầu mình, hình ảnh từng bạn rất chi tiết và sống động. Nên giờ xin viết lại những ký ức này, theo trí nhớ của mình. Có gì sai sót mong các bạn bỏ qua.

Mình đã viết về Thảo và mình phải viết về Thảo, như là một lời tri ân đến bạn. Mình chưa bao giờ đứng trước Thảo mà nói: cảm ơn bạn vì tất cả những gì bạn làm cho mình. Mình là vậy đó. Nay xin dùng FB để làm thay.

Giờ thì xin mời bạn Thảo bước sang một bên...cho các bạn khác xuất hiện.

Cấp một mình học trường Phước Vĩnh và trong lớp có dăm ba bạn là nổi bật (về học hành). Tuấn là một trong số đó. Mình thích Tuấn vì lúc nào bên Tuấn cũng có vài bạn đi cùng. Có thể Tuấn có cái duyên hay cái tài bày trò cuốn hút các bạn khác. Không ai đi theo mình hết. Không hiểu sao lúc lên cấp 2 mình thì vào 6/1 trường Nguyễn Chí Diểu (NCD), lớp được gọi là lớp "xịn", còn Tuấn thì vào lớp 6/9–lớp không xịn. Và câu chuyện tiếp diễn với lớp 6/1 này. Bắt đầu từ ai đây, vì ở đó mình có nhiều bạn mình hâm mộ lắm. Thôi, xin cho mình bắt đầu với bạn lớp trưởng mà mình xin được không nhắc tên.

Lớp trưởng học rất giỏi, giỏi tất cả các môn. Năm lớp 9 bạn ấy vào đội tuyển Văn của tỉnh (Mẹ lớp trưởng hình như là cô giáo dạy Văn nhưng không dạy lớp tụi mình). Lớp trưởng còn xinh nữa chứ. Lớp trưởng còn có một chiếc xe đạp mà mình chưa có và chưa thấy bao giờ. Ước gì mình có một chiếc như vây! Lớp trưởng còn rất ngầu khi "ra lệnh cho các bạn phải mang khăn quàng". Hồi đó mình thường cố tình không mang khăn quàng và chỉ chờ được nhắc.

Người tiếp theo mình hâm mộ là bạn Lê Ngọc Hoàng. Chỉ cái tên thôi là mình thích rồi. Ai mà không thích làm vua cơ chứ. Mình chọn Hoàng là thần tượng thứ hai trong câu chuyện là vì: mình thích và ghét cậu bạn này. Hoàng không những học giỏi (giỏi tất cả các môn) mà còn đẹp trai. Gương mặt rất sáng. Con nhà giàu nữa chứ (định nghĩa nhà giàu của mình: nhà lầu). Mình nhớ Hoàng có người chị và em gái, tất cả đều học lớp "xịn" ở NCD. Sau này Hoàng vào A1 Quốc Học (một lớp xịn nữa), và vào Đại Học Xây Dựng Hà Nội (trường xịn nữa). Mình chia sẻ với Hoàng 2 sở thích: thích kiếm hiệp và thích Batistuta–tiền đạo nổi tiếng người Achentina với biệt danh vua sư tử.

Sau Hoàng thì mình ấn tượng với Hoài, Nguyễn Xuân Hoài. Hoài có cái mình gọi là khứu giác Toán học hay nói bình dân là Hoài có lỗ mũi đánh hơi lời giải các bài Toán rất nhanh, có lẽ nhanh nhất lớp. Đáng tiếc là Hoài không diễn giải được lời giải của bạn đó một cách rành mạch. Điều tất yếu là điểm Toán của Hoài không cao (nếu sai sốt thì Hoài cho biết nhe). Tiếc thay! Cái Hoài thiếu thì chính là cái mình thừa, và cái Hoài thừa thì chính là cái mình mãi không có. Ước gì mình và bạn chơi thân!

Duy, (mình không thể nhớ tên đầy đủ lúc này được) cũng như Hoài. Duy có mẹ là giáo viên dạy Toán và có lẽ Duy thừa hưởng từ cô năng khiếu Toán học. Nhưng mà bạn này cũng trả lời ấp úng lúc cô kêu đứng lên. Duy dong tay nên mình chắn chắn là Duy biết lời giải. Hồi xưa mình ngồi cạnh Duy, tiếc là lúc đó mình còn kém Toán quá, để có thể được Duy/Hoài chú ý. Duy nhìn rất hiền và cậu ấy hiền thật–hiền bèn lẽn, mặc dù to con. Thế mà không hiểu sao có người đặt tên cho Duy là Lã Bố. (Xin cho lang man một tí. Câu chuyện của Hoài/Duy làm mình nhớ tới nhà Toán học thiên tài người Pháp Galois. Cũng như hai bạn của mình, ông trình bày Toán rất lôi thôi. Kết quả là ông thi hai lần không đậu Đại Học Bách Khoa Paris. Thật quá đáng tiếc! Các bạn trẻ nếu tìm thấy mình trong Galois, Hoài và Duy thì xin tìm cách khắc phục gấp.)

Bạn tiếp theo là Phương, Võ Xuân Phương. Mình hâm mộ Phương vì Phương học rất giỏi môn Hoá mà môn Hoá là kẻ thù của mình! Ngoài ra Phương có rất nhiều tài lẽ. Phương chơi cờ vua rất hay, và nhất là Phương đá banh hay nhất lớp (và có thể xếp hạng ngôi sao bóng đá ở trường). Nhưng mà không hiểu sao cứ đá hay xong là bạn ấy xỉu! Ui chao ơi, chưa bao giờ mình thích được xỉu như vây. Khi Phương xỉu thì dĩ nhiên là các bạn nữ dễ thương chạy đến chăm sóc. Phương có tất cả sự chú ý. Sao mình không hâm mộ bạn được? Mình chưa bao giờ được như vậy!

Các bạn đã gặp ngôi sao bóng đá, bây giờ xin giới thiệu người mà tất cả chúng ta đều rất cần: bác sỹ. Sao có bác sỹ trong lớp cấp 2 được! Sao không được? Vì là hồi tưởng nên mình "biết" được tương lai các nhân vật. Tuyến, Nguyễn Anh Tuyến (full name có thể sai) người rất nhỏ con, có lẽ không gây ấn tượng với mình nếu Tuyến không thích truyện kiếm hiệp. Chẳng những đọc truyện kiếm hiệp Tuyến còn sáng tác nữa. Mình nhớ Tuyến vẽ luôn cho truyện của mình. Nếu mình nhớ không nhầm thì Tuyến học giỏi Văn. Một điều mình thích ở Tuyến: nhà bạn ấy ở cao chót vót. (Bạn ở chung cư trước mặt trường mầm non gần trường NCD) Và trong nhà có một con rùa. Hình như là để Tuyến ăn chửa bệnh suyển. Không phải nhờ thần rùa này không, bây giờ Tuyến nhỏ con ngày nào đã trở thành bác sỹ Tuyến to cao và đẹp trai. Nhìn rất đàn ông.

Tuấn, Lê Anh Tuấn, là người mình hâm mộ tiếp theo. Tuấn rất giỏi Toán, và không như Hoài và Duy, bạn tìm ra lời giải nhanh và trình bày rõ ràng. Không ngạc nhiên sau này Tuấn học cấp ba Khoa Học Tự Nhiên, và vào Đại Học Bách Khoa, khoa Công Nghệ Thông Tin (xin nhắc các bạn là mình năm 98 mà thi vào khoa này thi rớt ngay, mình sẽ thiếu 0.5 điểm). Thời đó mình hay về nhà Tuấn đánh cờ. (Mẹ Tuấn và mẹ mình cùng làm bệnh viên Huế). Đánh nhiều nhưng mà hình như không thắng được Tuấn ván nào. Có lẽ vì vậy mà dù Tuấn có cô em gái mà không xơ múi gì với mình. Hỡi các chàng trai mới lớn học vài tài lẽ đi là vừa. Bớt học Toán Lý Hoá Văn Sử đi (xin xem bài viết Nguyên lý Patero để hiểu tại sao).

Nguyễn Viết Hùng là bạn mình hâm mộ và cảm thấy có phần chua xót. Hùng rất giỏi hình học mà hình học là điểm yếu chết người của mình. Lúc học BK mình không dám đi dạy kèm chỉ vì sợ bị hỏi về tam giác, hình tròn. Các bạn nghĩ thử xem, một người mà muốn đi tới trường BK thì đi một hồi ra Thủ Đức, làm sao mà học được hình học, một môn Toán về không gian! Nhưng mà hình học mình có thể bồi đắp, Hùng có một tính cách đúng như tên bạn ấy. Hùng rất chi là anh hùng. Mình nhớ là hồi đó có đánh nhau và Hùng rất ngầu. Mình không hiểu sao, và luôn tiếc nuối, là cấp ba Hùng không vào một trường tốt.

Thái Bình có thể nói là bạn thân hồi cấp hai. Bình học giỏi đeo kính cận. Ba Bình là giảng viên đại học sư phạm Huế. Mình thành bạn với Bình có lẽ là do sở thích đọc truyện kiếm hiệp. Hồi đó, cùng với Tuyến mình hay về nhà Bình chơi. Đánh cầu lông, và vui nhất là đi cùng Bình/Tuyến chơi game điện tử. Game contra mà đến giờ mình vẫn còn chơi (với 2 nhóc nhà mình). Bình hay Tuyến trả tiền là chuyện dĩ nhiên. Cảm ơn Bình, thank you. Tiếc là, như bao tình bạn trong đời mình, tình bạn với Bình cũng ngắn ngủi và hình như kết thúc bằng một trận đánh lộn. Không biết được nguyên nhân. Dù ai thắng thì mình là người thua cuộc...vì mình mất một người bạn.

Sao toàn hâm mộ bạn nam không vậy? Để check lại, nhìn vào đâu đó...bình thường. Phần tiếp theo là các bạn nữ.

Cát Tường. Huyền Tôn Nữ Cát Tường. Làm sao mình không thích cơ chứ. Tên hay, họ lạ lạ, nghe rất chi là quý tộc. Người xứng với tên, Tường học rất giỏi, giỏi các môn. Tường nhỏ con, xinh xinh, da trắng có núm đồng tiền. Đặc biệt là có võ. Ba Tường, thầy Thọ, là hiệu phó NCD và còn là giáo viên dạy Văn hay Toán (không nhớ được). Thầy rất nghiêm khắc, phải như vậy thì mới trị được lũ tiểu quỷ.

Bạn nữ tiếp theo là Hải Vân. Đinh Thị Hải Vân có người em gái là Đinh Thị Hương Trà (em gái này học siêu giỏi nên mình nhớ tên). Nghe cái tên có phần hung dữ phải không bạn? Đúng vậy, Vân là người cho mình nhiều nụ cười nhất, nhưng cũng là người cho mình đau đớn nhất về...thể xát. Vân mắt cận nặng, học giỏi Văn, và viết chữ bự như body bạn ấy (thời đó, giờ mình không biết). Mình khá ngạc nhiên lúc sau này biết Vân trở thành kiến trúc sư. Hồi đó không biết lý do gì (có lẽ muốn tìm cảm giác mạnh) mình thích trêu Vân, kiểu như "cận mập...", và Vân đuổi theo mình. Rất chi là thích, cho tới khi... bị bắt. Déo thật là đau, không chút từ bi. Thank you Hải Vân vì đã cho mình những nụ cười. Hi vọng những trêu đùa của mình là trò đùa con nít và chẳng làm bạn tổn thương.

Phương Linh không học giỏi (tức là học tà tà như mình) nhưng Linh có cái mà các bạn nữ khác không có hoặc chưa có hoặc không thể hiện ra. Linh chăm sóc cho các bạn trai lúc đá banh. Rất đáng yêu. Sao này Linh còn làm bác sỹ tâm lý cho mình miễn phí khi mình dính vào căn bệnh của muôn người: bệnh yêu. Cảm ơn Linh vì lúc nào cũng ở đó cho bạn bè và cho mình lãi nhãi tâm sự. Sau này Linh học kiến trúc và giờ là kiến trúc sư.

Mình là một thành viên của tổ 4 mà tổ trưởng là Ngọc Hiền, Nguyễn Thị Ngọc Hiền. Hiền cũng học giỏi (có lẽ thua lớp trưởng và Cát Tường một chút xíu). Hiền da ngăm ngăm và có má lúm. Hồi xưa mình cũng thích chọc Hiền (do ngồi gần và không có gì làm?). Tiếc là hồi xưa không biết Hiền có người em gái rất xinh tên là Hồng. Hey không biết sao lại biết tên? Đấy lại là câu chuyện của khoảng 10 năm sau khi học cấp hai.

Kim Chi. Kim chi ngọc diệp. Kim Chi hoàn toàn khác với các bạn nữ còn lại, và vì vậy mình có ấn tượng. Như mình và Linh, Chi cũng học tà tà và hình như nổi bật môn tiếng Anh. Chi có đôi mắt rất to tròn đẹp và bạo dạn hơn các bạn nữ khác.

Bạn nữ cuối cùng là Ngọc Minh hay còn gọi là Sim. Mãi sau này mình mới biết mẹ Sim là bạn học Đồng Khánh với mẹ mình. Mình thích nói chuyện với Sim vì Sim có giọng rất lạ, như từ một nơi xa xôi nào đó đến vậy. Sau lớp 9, mãi phải vào Sài Gòn học đại học thì mình mới gặp lại Sim. Rồi sau đó, bẵng đi một quãng thời gian, mình lại gặp Sim, nhưng là ở Oslo, Na Uy. Có lẽ là vào năm 2008/2009 gì đó. Sim và anh Quân đã khoản đãi một bửa cơm gia đình thịnh soạn. Thank you Sim.

Và sau các bạn nam và bạn nữ là một bạn...không nam không nữ (nhưng không phải kiểu do luyện Quỳ Hoa Bảo Điển như Đông Phương Bất Bại mô). Là một chú tiểu, thưa các bạn. Chú Sỹ Hùng (mà lạ cái tên không thấy A di đà phật chút nào). Mình ấn tượng vì đó là một chú tiểu, trước đó mình chưa có quen một chú tiểu bao giờ. Chú Hùng cao to (như Tây), gương mặt rất đẹp và có má lúm. Thích nhất là lúc đá banh chú quấn áo dài lại, nhìn rất là ngộ. Mà lúc ra chơi đánh nhau (nghịch ngợm thôi) chú đánh mình đau điếng, không chút từ bi hỷ xả. (Cũng phải thôi vì mình rất thích rờ cái đầu trọc lóc của chú, mà chú thì ghét điều này). Có lẽ tu chưa lâu chăng, hả chú? Mình ấn tượng với chú vì chú giỏi nhiều môn, và đặt biệt là môn tiếng Anh. Hehe, nhưng mà môn này thì mình vô đối trong lớp. Chắc do mình đi học Anh văn từ rất sớm (lớp 6 là đã đi học thầy Nguyễn Bê và học Cenlet).

Bạn cuối cùng mình nhớ tới là Đào Duy Lựu. Hình như Lựu vào lớp mình sau này (lớp 9 thì phải) nên mình không có nhiều kỉ niệm. Lựu đặt biệt là vì bạn đó đến từ...biển, nói giọng rất lạ. Lựu học rất giỏi môn Lý và sau lớp 9 thì vào chuyên Lý Quốc Học. Hễ ai mà chuyên Quốc Học là mình hâm mộ. Mình và Lựu chỉ là bạn học cùng lớp và sau cấp 2 thì không gặp nhau lần nào cho đến 3 hay 4 năm sau khi Lựu và mình gặp nhau ở Bách Khoa, và còn là chung khoa Xây Dựng. Và từ đó là một tình bạn cho đến bây giờ. Có thể mình sẽ viết về những người bạn thời sinh viên sau này, nhưng mà Lựu, cảm ơn mi vì tính hào phóng của mi, điều mà tao cố gắng học hoài vẫn chưa tốt nghiệp được. Không biết mi đã "save my ass" bao nhiêu lần. Mà nè, đừng tính lại để đòi nợ hí.

Như vậy lớp mình có đầy đủ cả. Nam có, nữ có, tục có, tăng có. Thành phố có và thôn quê có. Chỉ thiếu ni cô (kiểu Nghi Lâm trong Tiếu Ngạo Giang Hồ).

Sau các cá nhân trên là cả lớp (Hình 4.1a). Năm lớp 8, không biết là quyết định của ai mà thầy Diệu tổ chức kiểm tra. Ai không qua được bài kiểm tra thì xin mời sang lớp khác học. Không nhớ là kiểm tra môn gì nhưng mình đoán là Toán vì thầy Diệu dạy Toán. Và cũng không nhớ là có thông báo trước để có sự chuẩn bị. Mà có chuẩn bị hay không thì cũng không quan trọng vì mình không qua được bài test này! Cả một trời sụp đỗ. Mình sẽ xa bạn bè. Sang lớp mới mọi người sẽ nhìn mình và nghĩ "ah, thằng này không đủ sức học lớp 8/1 nên phải sang lớp này". Rồi về nhà sẽ nói sao với ba mẹ?

(a) Hình năm lớp 8 với thầy Diệu

(b) Cô Dung ở đồi Thiên An

Hình 4.1

Mình đã khóc, có khóc thành dòng không thì không biết (cố giữ mặt mũi đây) nhưng mà bên trọng chắc chắn là biển rộng. Cũng không biết là có bao nhiêu người cùng cảnh ngộ. Nhưng các bạn còn lại đã đứng lên xin thầy Diệu cho những người rớt ở lại lớp. Cuối cùng thì thầy đồng ý và nhờ vậy mình được ở lại 8/1. Xin cảm ơn tất cả các bạn. Câu chuyện của mình với thầy Diệu không dừng ở đây. Cũng như bao giáo viên khác thời kỳ khó khăn, thầy mở lớp dạy thêm Toán. Mình đi học nhưng thầy từ chối nhận học phí từ mình. Là người rụt rè, nên mình không hỏi "why", vì vậy sự thật không ai biết được. Có 2 khả năng. Một là thầy thấy tội nghiệp thằng nhỏ (chịu một đau đớn tinh thần) nên thương xót. Hai là thầy cho mình học miễn phí vì nhà nghèo. Lí do là gì thì mình phải cảm ơn thầy, rất nhiều. Không biết có phải bị thầy hù ghê quá mà mình quyết định không học tiếng Anh nữa mà chuyển qua học Toán.

Nhắc đến thầy Diệu mà không đề cập cô Dung thì mình thật có lỗi. Trong tất cả các thầy cô cấp hai thì, đối với mình, cô Dung là đẹp nhất, là hiền nhất (Hình 4.1b). Lí do đơn giản cô dạy tiếng Anh mà mình thì chỉ giỏi có môn này. Cảm ơn cô, giờ học tiếng Anh của cô là sự khích lệ quý báu cho học trò kém tự tin này.

Năm lớp 6 chủ nhiệm lớp mình là cô Lịch dạy Văn. Cô người nhỏ con và có giọng nói rất hay, có lẽ cô không phải người Huế. Lên lớp 7 lại là một cô dạy Văn làm chủ nhiệm. Mình không thích tí nào vì đối với mình Văn là "nhà em có nuôi một con chó....", mà mình có nuôi chó mô! Cô tên Phương Anh. Mình nhớ là mình đi học thêm Văn ở nhà cô (trong thành). Mình không thích Văn, không ở lại vì môn này. Thật tình không hiểu đi học thêm làm gì luôn! Năm lớp 7 hình như lớp mình có diễn kịch và bác sỹ Tuyển đóng vai chính thì phải. Sang lớp 8 có một sự thay đổi: thầy Diệu dạy Toán làm chủ nhiệm. Vẫn không khá hơn cho mình. Tuyệt nhất là năm lớp 9 vì cô Dung làm chủ nhiệm.

Mình không nhớ cô Hoa có làm chủ nhiệm tụi mình không. Cô Hoa dạy Toán và theo mình nhớ thì đối với các bạn cô là người dạy Toán thuộc hàng nhất trường. (Lúc đó mình yếu nên không nhận xét được). Cô rất hiền nhưng cũng nghiêm. Tụi mình đi học thêm nhà cô ở dưới phía sân vận động. Rất là vui. Em cảm ơn cô rất nhiều. Mà nhìn các bạn thấy đáng yêu vậy mà cũng biết đấu tranh. Mình nhớ là vào năm nào đó có một thầy dạy Toán mà các bạn không thích (không có mình vì ai thì cũng như ai thôi) vì hình như thầy này cứng ...quá (là cứng nhắc trong cách dạy). Thế là các bạn biểu tình, và cuối cùng trường cho người khác dạy!

Kể về bạn cấp hai mà không kể chuyện đi tắm sông thì thật là thiếu sót. Mình không nhớ chính xác lúc nào, và là ý tưởng của ai, mà lúc đó các bạn nam lớp mình học xong thì đạp xe về nhà mình, vứt xe đó rồi ra sông tắm. Có bạn không biết bơi (hình như Thái Bình) cũng nhảy ùm xuống sông. Các bạn phải bơi lại cứu. Thích nhất là nhảy từ trên cầu xuống. Có lần nhảy xong cái quần rách luôn. Vui không kém là đu theo mấy chiếc xuồng máy. Wow, rất là sướng cho đến khi người trên xuồng lấy sào ra đuổi.

Ngày 3 tháng 8 năm 2022

# Chương 5

# Hai Bà Trưng hay Quốc Học?

MÌNH suy nghĩ khá lâu trước khi chia sẻ chuyện cá nhân này. Lâu rồi mình mới có cảm xúc thế này, nếu không viết thì sau này có khi quên. Hơn nữa qua câu chuyện có thể các bạn trẻ rút ra được một vài kinh nghiệm. Và cũng nằm trong chủ đề "tao ngộ trong cuộc đời".

Hai Bà Trưng (HBT) hay Quốc Học (QH) là câu hỏi mình đặt ra hè năm 1995. Thật ra sau khi anh Bé truyền nội công cho mình thì vào Quốc Học là chuyện khả thi (vì lúc đó cách tính điểm là Toán nhân 2 + Văn nhân 1, tính toán của mình: môn Văn, chỉ cần viết thật dài thầy cô nào nỡ không cho 5 điểm–Shakespeare cũng không thể giúp mình giỏi Văn được–, Toán tệ lắm thì 7. Vị chi là 19 điểm, QH lúc đó điểm chuẩn có lẽ là 18, 19). Nhưng cuối cùng mình vào Hai Bà Trưng.

Nhân vật có thể chi phối một chàng trai mới lớn như vậy thì chỉ có thể là một cô gái thôi. Câu chuyện, dài kể thành ngắn là như dzậy nè. (Mình thích cái giọng miền Nam làm sao). Chàng yêu thầm nàng, nàng không thèm. Nàng vào Quốc Học không cần thi. Vì không muốn gặp nàng, chàng chỉ còn vào HBT thôi.

Vậy là mình đi mua 2 lá đơn: một cái vào HBT và một cái vào QH. Đùng một cái mình xé cái đơn vào QH (lí do ở trên). Vài hôm sau, suy nghĩ lại, mình đến trường QH mua đơn. "Hết đơn"! Vậy là chỉ còn một cửa vào HBT thôi.

Tại sao mình kỵ HBT??? Đó chỉ là vì sĩ diện hảo của dân Huế mà thôi.

Không biết cuộc đời mình sẽ ra sao nếu mình vào QH? Khi đó mình sẽ gặp bạn Phương Thao, bạn Khuong Tran sớm hơn. Nhưng phải nói đó là một trong những quyết định sáng suốt (hay may mắn vì nếu hôm đó còn đơn thì mình đã vào QH) nhất của mình. Ở HBT mình đã gặp những người bạn rất tốt (Huy sở, Thảo, Phùng, Đại, Hiếu, Quang vv). Nhưng bài viết này không phải về họ. Sẽ có một bài về những người bạn HBT những người mãi luôn trong mình (dù không nói ra). Thay vào đó, mình muốn chia sẻ tại sao học ở HBT thì tốt cho mình sau này.

Thứ nhất: nếu mình vào QH mình có thể sẽ tự mãn và kiêu ngạo. Mình nghĩ ai cũng đồng tình 2 tính này thì không tốt. Mình không nói là các bạn QH là kiêu ngạo nhé.

Thứ hai: nếu mình vào QH thì mình sẽ bị bao quanh toàn là anh tài. Điều này là rất tai hại cho một người thiếu tự tin như mình. Ngược lại, vì mình vào HBT, mình cảm thấy tự tin hơn vì mình không thua nhiều người quá. Sau một thời gian ở HBT mình đã hình thành được sự tự tin đủ lớn: trong đầu mình bắt đầu có suy nghĩ "mình sẽ thi đậu Bách Khoa SG". Các bạn nên nhớ thậm chí C. Ronaldo–danh thủ bóng đá người Bồ Đào Nha–còn phải nhìn vào gương và tự bảo "mình đẹp trai hơn Messi"! Jean Shinoda Bolen là bác sĩ tâm thần, nhà phân tích Jungian và tác giả. Bolen đã viết một số cuốn sách về tâm lý nguyên mẫu của phụ nữ và nam giới trong quá trình phát triển tâm linh, và là một trong những phụ nữ xuất hiện trong bộ phim năm 1986 Women – for America, for the World (Giải Oscar cho Phim tài liệu hay nhất). Bà đã viết

> *"Trước khi bạn có thể làm điều gì đó mà bạn chưa từng làm trước đây, bạn phải hình dung nó là có thể."*

Thứ ba: Ở HBT không có áp lực. Mình không thấy ai bàn tán sẽ thi đại học X, hay đại học Y. Đơn giản là lên lớp, học xong về. Mình nghĩ, ít nhất là trong lớp A3 của mình, không có sự canh tranh, không có áp lực. Vì cả lớp trong suốt ba năm học cấp ba không có ai là học sinh giỏi cả! Không có môi trường nào tốt hơn như vậy cho việc học! Chú ý rằng mình đã có động lực là phải cố gắng đậu đại học rồi. Mình cũng không biết tại sao. Có lẽ ngày nào cũng nghe ba mình nói "nhà mình nghèo thì chỉ có con đường học mới thoát nghèo", nên cái ý nghĩ đó ăn sâu vào trong đầu mình. Cũng có thể để chứng tỏ với cô bạn gái kia. Không biết được. Ước gì có người khuyên mình viết nhật ký!

Thứ tư: không biết từ bao giờ mà trong đầu mình có suy nghĩ là giáo viên (GV) HBT không chất lượng (ô hay, mà đó là sự thật. Bởi vì các bạn HBT khi đi học thêm thì phần lớn chọn học GV QH hay Sư phạm). Và thế là mình quyết định tự học! Thầy làm gì trên bảng là chuyện của thầy, mình cứ học theo lịch của mình thôi. Và chính nhờ cái kiểu tự học này mà sau này mình mới làm nghiên cứu được. Vì nghiên cứu là tự tìm tòi, tự mò mẫm, cái gì cũng tự hết. Nếu mình vào QH, và GV dạy Toán là thầy Quang (thầy là một GV giỏi), mình nghĩ phần nào mình sẽ ỉ lại vào thầy.

Thứ năm: trong thâm tâm việc vào HBT là một thất bại hay chí ít cũng là một sự xấu hổ. Đó có thể là nguyên nhân mình cắt đứt liên lạc các bạn cấp hai. (Ngẫm lại có lẽ là một điều đáng tiếc). Vì đó là thất bại nên mình cần một chiến thắng. Và thường sau một thất bại bạn sẽ có 1 thành công. Và việc vào BK là chiến thắng đó cho mình. Thomas John Watson Sr. (1874 - 1956) là một doanh nhân người Mỹ, là chủ tịch và CEO của IBM. Về thất bại ông đã nói:

> *"Bạn có muốn tôi cung cấp cho bạn một công thức thành công không? Nó rất đơn giản, thực sự: Gấp đôi tỷ lệ thất bại của bạn. Bạn đang nghĩ về thất bại như là kẻ thù của thành công. Nhưng thực sự không phải như vậy. Bạn có thể bị nản lòng bởi thất bại hoặc bạn có thể học từ nó, vì vậy hãy tiếp tục và mắc lỗi. Hãy mắc càng nhiều lỗi càng tốt. Vì hãy nhớ rằng đó là nơi bạn sẽ tìm thấy thành công."*

Thứ sáu: chỉ vào HBT thì mình mới có cơ hội giúp các bạn khác học Toán. Và chính khi suy nghĩ tìm cách giải thích sao cho các bạn này hiểu, mình đã phát triển kỹ năng giải thích rành mạch rõ ràng một khái niệm từ lúc nào không hay. Các bạn cần chú ý là thầy cô đã giải thích rồi mà các bạn kia vẫn không hiểu, nên mình phải tìm cách giải thích khác. Thầy cô họ không có nhu cầu phải giải thích rõ ràng vì họ phụ trách một lớp. Trung bình thì sẽ có người hiểu và người không hiểu: đằng nào nhiệm vụ cũng hoàn thành, có khi xuất sắc nữa cơ! Mình thì khác. Một là mình chỉ giúp một vài bạn. Hơn nữa mình có áp lực là phải giải thích làm sao các bạn này hiểu. Vì nếu họ không hiểu thì họ ... cho mình nghỉ chơi. Mà mình thì cần họ cho mình giải thích. Vì trong họ có ... nàng. Chung quy, mình có thể không phải là anh hùng, nhưng vẫn không qua được mỹ nhân quan.

Và cái kỹ năng (giải thích rành mạch một vấn đề) này 5 năm sau giúp mình rất rất nhiều lúc làm thạc sỹ và đặc biệt là lúc làm tiến sỹ. Mình không cần mất thời gian học cách làm sao để viết báo cáo khoa học rành mạch, mình đã biết làm sao rồi! Mình chỉ việc xem viết báo cáo như đang giải thích một vấn đề cho những người bạn chưa biết mà thôi. Rất rất nhiều người dù đã có bằng Tiến sỹ vẫn cảm thấy khó khăn trong việc viết báo cáo khoa học! Và mình có được kỹ năng này miễn phí! Cảm ơn Hai Bà Trưng.

Hai Bà Trưng hay Quốc Học? Đúng là tao ngộ cuộc đời. Để cho tăng phần kịch tính, hồi xưa ba mình là trai Quốc Học và mẹ mình là gái Đồng Khánh (tiền thân của Hai Bà Trưng sau này). Mình chọn HBT vì ai đó, nhưng mà tình cờ lại giống mẹ. Mà mình thì giống mẹ nhiều.

Sau khi bài viết này đăng lên Facebook thì mình nhận được phản hồi từ nhân vật chính trong câu chuyện kể trên. Đã 27 năm trôi qua mình không gặp và nói chuyện với bạn! Mình mừng lắm. Thế mà càng đọc comment của bạn mình càng toát mồ hôi hột! Lúc đọc là khoảng 5h sáng định mệnh đó, và mình thức luôn tới sáng. Cà phê là một phần, nhưng chắc chắn là phản hồi của bạn làm mình không ngủ được. Vì bạn đã trả lời công khai trên Facebook nên mình được phép giới thiệu ở đây, Nhưng mình nói trước là mình giữ ý chính còn mình sẽ tránh dùng từ ngữ không hay.

Bạn mình nhìn vào chuyện HBT-QH hoàn toàn khác hẳn. Bạn viết.

Hình 5.1: Hai trường Hai Bà Trưng và Quốc Học (Huế).

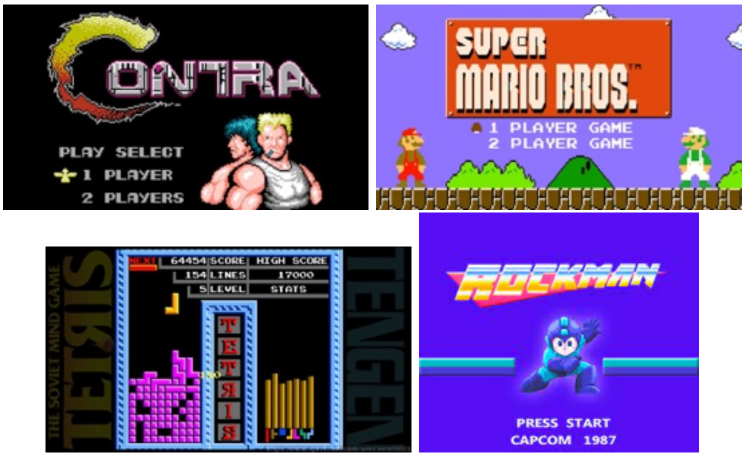
> *Thật ra thì cuộc đời chúng ta vốn vẫn đi trên 2 con hẻm khác nhau cho đến khi bạn đặt câu hỏi "HBT hay QH?" Nhưng mình sẽ kể lại câu chuyện "HBT hay QH" ở 1 phiên bản khác: Bạn trai thích bạn gái, bạn gái không hề biết. Thì yêu thầm mà!!!! Bạn gái đủ điểm vào QH mà không cần thi. Thực ra thời điểm mua hồ sơ thì chả ai biết điểm tuyển thẳng là bao nhiêu và bạn gái vẫn mua hồ sơ QH, ôn thi như mọi người. Cái dở của bạn gái là lại cũng sĩ diện hão, mua hồ sơ QH nhưng lại nói với bạn bè là mình thi HBT. Vậy là bạn trai cũng mua hồ sơ HBT để học cùng bạn gái! Cái này là tự miệng bạn trai nói với bạn thân của bạn gái nha. Zậy zụ xé đơn QH là cái quần què z zậy? (đôi khi mình cũng thích dùng giọng xì goòng). Bản thân bạn gái cũng shocked khi biết tin bạn trai nộp hồ sơ vào HBT vì khả năng bạn quá đủ để vào QH (nhất là môn Toán thì quá siêu) cùng một niềm ân hận tột cùng sau đó khi biết lý do. Điểm tuyển thẳng được công bố là lúc bạn trai biết là người mình thương đã vào QH. Quá muộn cho việc đổi hồ sơ và bạn trai thi đỗ vào HBT. Chuỗi ngày đầy tổn thương của bạn gái bắt đầu từ đây...*

Rồi bạn kể tiếp. Hồi đó bạn đi học thêm thầy Nghệ và thầy Quang, và mình cũng đi học ở đây. Có mấy bạn ở HBT cũng đi. Và các bạn HBT này thì nào là ném giấy bạn nữ, xô bạn nữ vào mình, giấu xe đạp, khèo chân cho bạn nữ té ... Và mình chỉ cười, không làm gì cả. Mình thật là hèn. Xin thành thật xin lỗi bạn.

Sau khi mình đăng bài này lên thì mẹ mình mới chat với mình và kể phiên bản của bà. Theo mẹ mình thì mẹ bắt mình thi vào HBT vì lúc đó mẹ không tin mình có thể vào QH. Mẹ kể, năm lớp 10, mình hay càm ràm đòi mẹ xin cho mình sang QH. Mẹ kể hồi đó chẳng những mê truyện chưởng mình còn mê chơi game điện tử. Gần nhà mình có nhà chú Tiến-chị Lan, có game điện tử. Chú Tiến thì có hai đứa con, mình không thích đứa lớn, nhưng cực thích đứa thứ hai, tên Cao. Lúc nào mình cũng bế Cao đi ra ngoài ga chơi 2, 3 tiếng đồng hồ. Sau khi đi học thêm buổi tối là mình ghé nhà chú Tiến xem người ta chơi. Sau 9h thì chú Tiến và mình chơi game. Lúc đó thì mình quên trời trăng mây gió, nhiều lúc phải ba mình ra gọi mới về, lúc đó thường là 11h đêm. Đó là lí do mẹ mình không tin mình có thể vào QH.

Thời đó thì mình mê game Contra, Kage, Mario, xếp gạch, xe tăng, và đặc biệt là game Rockman (Hình 5.2). Giờ thỉnh thoảng mình vẫn chơi những game này.

Ngày 5 tháng 8 năm 2022


CONTRA
PLAY SELECT
1 PLAYER
2 PLAYERS
SUPER
MARIO BROS.
1 PLAYER GAME
2 PLAYER GAME
THE SOVIET MIND GAME
TETRIS
64454 SCORE HIGH SCORE
154 LINES 17000
5 LEVEL STATS
TENGEN
ROCKMAN
PRESS START
CAPCOM 1987

Hình 5.2

# Chương 6

# Những thần tượng đời thường của tôi (Phần 2)

VẬY là mình vào Hai Bà Trưng (HBT) năm 1995. Thôi bỏ qua chuyện mình buồn hay vui vì chuyện này. Thật tình vô đây mình gặp ít thần tượng như hồi cấp hai. Đó là vì cao thủ đều vô Quốc Học. Nhưng không phải là không gặp cao thủ. Ở HBT mình ngưỡng mộ Nguyễn Đình Hoa Cương vì Cương học giỏi hơn mình mà kiến thức sâu rộng. Sau này Cương là thành viên chủ chốt của đội tuyển Bảy Sắc Cầu Vồng của trường. Sau Cương thì phải kể Vàng Anh. Thật tình mình không thích cô nương này, nhưng mà về thành tích học tập thì mình rất nể. Hai bạn này học lớp A2. Trong lớp A1 thì mình thích Thảo, xinh và học giỏi Toán. Còn có Cư nữa, Hồ Văn Cư, hơi tiếc là cái chân bị tật. Rất là ngầu và giỏi Toán. Lớp A4 thì lúc đầu mình không hâm mộ ai, nhưng lớp 12 thì có bạn gì có giải Hoá. Còn mình thì học lớp A3, do Thầy Sơn dạy Toán làm chủ nhiệm. Thầy làm chủ nhiệm cả ba năm luôn. Trong lớp A3 thì có Hồ Trung Hiếu và Khanh là “đối thủ”.

Hình 6.1: Lớp cấp 3: 10A3, 11A3 cho tới 12A3. Hình bên phải chụp dịp kỷ niệm 100 năm thành lập trường, có Thầy Sơn. Hình trái, Đại là người mặc áo ngược có vẽ hình tháp Eiffel. Nó vẽ rất đẹp.

Lớp rất đông phải chừng 40 đứa, và có chừng 11 bạn nữ thôi vì là lớp ban A (Hình 6.1). Trong đó mình chơi thân với Phùng, Thảo, Đại, và Huy. Hình 6.2 trái là chụp với Thảo, Phùng và Đại.

Để kể chuyện Đại vì nó rất thú vị. Hồi cấp 2 nó học Nguyễn Tri Phương và ngồi gần Hiếu A và Hiếu B mà hai bạn Hiếu này thì nổi tiếng học giỏi. Lúc này cả hai đang học chuyên Lý với Lựu và Hữu Bảo. Đại không cần học vẫn qua cấp 2 và vào HBT. Nhà hắn ở sau ga Huế nên hắn với mình chơi thân. Buổi sáng Đại đi bộ qua nhà mình rồi hai thằng đi tới trường. Có khi đi với Quang Gia lai (Nhật Quang) nữa. Đi học về hai thằng thường đi tới quán chè o Sao ở gần chợ Bến Ngự. Vào quán rồi thì mình làm ngay năm li chè đậu đỏ. Về nhà ăn trưa không nổi là mẹ mình biết đi ăn chè về. Tiền ai trả thì giờ không nhớ. Ăn chè đậu đỏ nhiều như vậy mà không đổ đại học sao được?

Đại còn để lại cho mọi người một kỉ niệm vui. Hồi đó có lớp Tin học do Thầy Sinh (ba của bạn Như chuyên Toán QH) dạy. Hôm đó có kiểm tra thực hành trên máy tính. Làm cho đã, Đại nó rút cầu dao tắt điện, mất hết. Thầy Sinh, là người nóng tính–vì mình chứng kiến Thầy ném phấn vào ai nói chuyện trong lớp, rượt nó chạy khắp trường.

Mình chơi với Phùng, Lê Nguyễn Hạnh Phùng, cái tên rất hay. Không biết tại sao. Mẹ của

Hình 6.2

Phùng, cô Thanh lớp 9 dạy mình môn Sử. Nhà cô Thanh ở sau sân bóng của trường NCD. Mình không biết lúc lớp 9 mình có biết con gái của cô không. Hồi đó mình hay về nhà Phùng chơi. Hình như ở đó có những thứ mà mình không tìm thấy ở nhà. Về nhiều đến nỗi mình thành bạn của hai em gái của Phùng: Hạnh Phước (tên ở nhà là Na) và Hạnh Phương (tên ở nhà là Bơ). Na nhỏ hơn Phùng một tuổi còn Bơ thì nhỏ lắm, lúc đó mới học lớp năm. Sau này Na vào chuyên Văn Quốc Học, còn Bơ thì nhiều năm sau vào chuyên Toán QH. Mình rất thích Bơ vì Bơ học giỏi Toán. Điều mình vui nhất là tặng Bơ (lúc đó là thời sinh viên) quyển sách "How to solve it" của nhà toán học nổi tiếng người Hungary Geoge Polya. Mình cũng quý Na vì Na nấu ăn cực ngon và Na khác những bạn nữ mình quen, vì thích văn chương mà. Lúc sau này mình đi Pháp thì vài lá thư tay của Na là những món ăn tinh thần.

Hình 6.2 bên phải chụp với Phùng và Bơ năm 2008, với Su, chụp ở biển Thuận An. Hình này do Na chụp. Mình tên P và có ba người bạn tên Phùng, Phước và Phương. Nghĩ lại cũng ngộ. Tình bạn với ba chị em PPP này kéo dài từ 1995 cho đến khoảng 2008 thì nhạt dần. Ngẫm thì lại là một điều đáng tiếc nữa.

Và mình cũng chơi thân với Thảo–Trần Thị Minh Thảo. Thảo học NCD nên mình có gặp vài lần. Thảo rất xinh. Về chơi thì nhà Thảo cũng có ba chị em gái. Chị đầu là chị Thanh, lúc đó đã là sinh viên và không chơi thân với chị. Em út là Thuý. Sau này Thuý học QH. Sau ba chị em chữ P thì giờ là ba chị em có tên bắt đầu chữ T. Khác với nhà Phùng, mình chỉ thân với Thảo, mặc dù chị Thanh và Thuý rất dễ thương và hiếu khách.

Người bạn thân tiếp theo là Huy, Huy sở như người nhà hắn gọi. Mình không biết vì răng. Huy có người chị đầu là chị Diễm, lúc đó học HBT luôn. Chị Diễm rất xinh gái. Sau Huy là Khánh. Huy học giỏi tiếng Anh còn lại thì bình thường. Hồi đó hay về nhà Huy, đi đá banh với xóm của hắn ở trường QH (và chính ở đây mình gặp thần tượng Thảo chuyên Toán). Mình có rất nhiều kỷ niệm với Huy sở. Nhớ nhất là về nhà hắn, hai đứa chui vô mùng, tắt điện hết, rồi uống bia hơi chui! Trốn mẹ Huy. Sau đó là ngủ lại nhà Huy luôn. Đôi lúc có cả thằng em bạn dì của Huy. Ba đứa uống bia vậy đó. Mồi thì có mấy món mẹ Huy nấu cho ăn tối. Kỷ niệm tiếp theo là gọi điện thoại. Hồi đó chỉ có vài nhà có điện thoại thôi. Mà ba Huy khoá nó lại! Mình thì muốn gọi cho "người ấy", mà không có chìa khoá. Huy lấy chiếc đũa thò vào chọt chọt mãi mới bấm đúng số. Bên kia người ấy trả lời. Mà không biết chi nói hết. Mình vẫn chơi với Huy Sở, về Huế lúc nào cũng gặp hắn. Hình bên chup8 năm 2010 ở nhà mình, Huy ngồi với con trai. Trong hình có Đại và anh Bảo.

Năm lớp 10 Trần Bá Quang làm lớp trưởng. Quang đẹp trai cao ráo, rất tốt bụng và nhiệt tình và nhìn rất hiền. Sau đó Thầy Sơn ép mình làm lớp trưởng, hình như năm 11 và 12. Mình không có tài lẻ, không có cái uy, và khiếu nói trước đám đông nên mình biết mình sẽ là lớp trưởng tồi. (Và đúng thế thật, mình cứ nghĩ nếu Nhã làm thì tốt hơn. Như hay Hiếu cũng tốt hơn). Tại sao Thầy Sơn chọn mình? Số là mình nhìn tài liệu môn thuộc lòng, và bị phát hiện. Thầy Sơn bảo nếu làm lớp trưởng thì Thầy sẽ không cho hạnh kiểm yếu. Sợ ba mẹ biết thì buồn, thế là làm thôi.

Theo như mẹ mình kể thì đầu năm lớp 10 mình vẫn đòi xin sang QH như vậy là mình còn nhớ người bạn cấp 2. Nhưng sau một thời gian thì mẹ nói mình không còn đòi sang QH nữa. Có lẽ lúc đó mình đã gặp TY. Mình cảm bạn này ngay từ đầu. TY học lớp A4, tức là hàng xóm. Bạn này học thêm Hoá Thầy Thức dạy ở trường HBT luôn. Và thế là mình không học Thầy Nghệ nữa, mà chuyển sang học Thầy Thức. Thời điểm này có thể là học kỳ 2 năm lớp 10. Chắc là mình muốn gặp TY nhiều hơn.

Cạnh nhà mình có bạn nữ cùng tuổi tên là Hán Thị Thành Vinh. Vinh xinh vì có má lúm đồng tiền. Mình hay qua nhà Vinh chơi (trong xóm nữ cùng tuổi không có nhiều). Vinh thì học Nguyễn Huệ, học cùng lớp với Phương Linh. Dĩ nhiên là mình phải tâm sự chuyện TY. Lúc đó dĩ nhiên là thích thầm thôi, không dám nói. Rồi ở nhà Vinh thì mình gặp Duyên, học A2 thì phải. Sau này bạn Duyên thi vào Kiến Trúc. Bạn này cũng thích đua tranh, hay hỏi mình có giải được mấy bài Toán có dấu sao trong sách GK. Không nhớ mình có giải được hay không.

Thời đó cứ tan học xong thì ra đứng với Đại và Nhật Quang (hay gọi là Quang GL vì hắn từ trong đó ra) chờ TY đi qua thì đi theo. TY nhà ở Trần Thúc Nhẫn, trước kia là quán cà phê số 6 thì phải. TY hay đi học với bạn Hoà Lan học A2, bạn Lan này rất xinh và sau này vào Sài Gòn học đại học thì Bá Quang có lúc cảm nắng Lan. Dù Đại và Quang có làm gì thì TY không bao giờ quay lại, không bao giờ. Nhưng có một hôm nàng quay lại vì mình đạp vỏ chuối và té. Không những quay lại mà còn cười nữa chứ. Lúc đó thì mình mới hiểu 100% câu chuyện của Trụ Vương và nụ cười của Bao Tự. Vì nó mà Trụ Vương sẵn sàng thắp tháp dầu trêu đùa chư hầu. Mình thì sẵn sàng trượt vỏ chuối, tiếc là nó chỉ diễn ra có một lần!

Câu chuyện này hao hao câu chuyện nhà thơ Phạm Thiên Thư và bà Hoàng Thị Ngọ. Nhà thơ kể rằng "Cô ấy ôm cặp đi trước, tôi đi theo nhưng không dám lên tiếng. Trong bóng chiều tà, ánh nắng hắt qua hàng cây, cô ấy lặng lẽ bước, gây cho tôi những cảm xúc bâng khuâng khó tả. Cứ thế, tôi chỉ biết lặng lẽ đi theo sau cô ấy hàng ngày, giấu kín những cảm xúc của mình không cho bất cứ ai biết". Để nhớ lại một kỷ niệm trong sáng ấy, nhà thơ đã viết lên bài *"Ngày xưa Hoàng Thị"* quá hay, quá vô tư:

Em tan trường về, đường mưa nho nhỏ
Em tan trường về, đường mưa nho nhỏ
Ôm nghiêng tập vở, tóc dài tà áo vờn bay...
Em đi dịu dàng, bờ vai em nhỏ
Chim non lề đường nằm im giấu mỏ
Anh theo Ngọ về, gót giầy lặng lẽ đường quê...
Em tan trường về, anh theo Ngọ về
Chân anh nặng nề, lòng anh nức nở
Mai vào lớp học, anh còn ngẩn ngơ, ngẩn ngơ...

Bài này sau được nhạc sỹ Pham Duy phổ nhạc và được ca sỹ Thái Thanh hát. Quá tuyệt vời. Sau này Phạm Thiên Thư đi tu.

Hồi đó mình nghèo mà cũng không có lãng mạn nên không biết cách gì để tiếp cận TY. Suy nghĩ mãi thì thấy mình chỉ có Toán là ok thôi. Thế là mình chọn một chủ đề, rồi suy nghĩ vắt óc làm sao giải thích cho dễ hiểu nhất, rồi tìm ví dụ, giải nó, mà phải giải thích vì sao mình nghĩ ra cách giải đó. Ghi chép cẩn thận, khoảng 5 hay 6 trang giấy. Rồi chờ TY đứng ở cổng trường (TY đang chờ Hoà Lan để về chung), mình tới dúi vào tay tập "thơ tình". TY nhận. Rồi từ đó mình cứ làm như vậy. Rồi không biết ai chỉ cho mà mình có ý định là "dạy kèm" cho TY miễn phí. Nhưng dĩ nhiên là TY không chấp nhận đi học một mình, thế là có Phùng và Thảo. Hồi đó ở nhà mình trên ga Huế, mình giúp TY, Phùng và Thảo học Toán. Chắc có ít người dạy miễn phí mà hạnh phúc như mình. Không hiểu sao mà chuyện này không diễn ra lâu. Sau đó thì bó tay không còn chiêu nào nữa. Mối tình đơn phương của mình kéo dài cho đến khoảng năm 3 đại học thì mình bỏ cuộc. Sau thất bại này mình quyết định sẽ không có chuyện 'cua gái lâu như vậy' nữa.

(Lúc đầu mình bỏ hình TY vào tập sách này, nhưng sau khi tham khảo ý kiến thì TY nhắn xin đừng làm vậy. Do đó mình đã bỏ hình TY ra. Thật đáng tiếc.)

(Một điều đáng tiếc nữa: giá như hồi đó mình hào sảng mở lớp giúp cho các bạn trong lớp hay trong trường về Toán thì sẽ là một việc làm có ý nghĩa. Giúp TY thì chỉ là vì bản thân mình mà thôi.)

Thời gian hạnh phúc nhất trong những năm cấp ba là năm lớp 11. Ba mẹ tổ chức sinh nhật cho mình, lần đầu tiên trong đời. Và mình được mời bạn bè! Dĩ nhiên là có Phùng, Thảo, Như Ý (Như Ý chơi thân với TY lúc cấp 2, không có Như Ý thì TY không đi), Vinh, Hiếu, Quang, Đại, Huy. Hôm đó TY thật đẹp và mình được chụp hình với TY lúc mình trao hoa hồng cho TY. Phó nháy là cậu Lực, em trai của mẹ mình. Ôi cái album này mình quý lắm. Mấy hôm sau đem lên lớp cho TY xem. Tiếc là albumn đó bị mất rồi, lúc mẹ mình gửi albumn đó vào Sài gòn nhưng bị lạc. giờ còn mỗi cái hình chụp với cô Phương–em gái ba mình (hình bên). Nhưng buổi tiệc đó không giúp gì cho mối tình một phía của mình cả. Nhưng nó lại giúp thằng Huy Sở.

Huy gặp Vinh (hàng xóm mình) và cả hai cảm nhau. Thế là có cặp Vinh-Huy. Sau đó Quang Gia lai cặp với bạn của Vinh: một cặp nữa. Nhưng trong nhóm đi chơi thì còn thêm một bạn nữ nữa. Tiếc là bạn đó và mình không thích nhau. Thành ra đi chơi sáu người.

Năm 12 thì mình ngồi hàng cuối với Thái Doãn Hùng, Huy, và Nguyễn Quốc Cường. Mọi người gọi Cường là cảnh sát trưởng vì Cường tập tạ nên rất khoẻ. Hắn hay khoá tay bạn bè không ai nhúc nhích cựa quậy gì được cả. Hồi đó nhớ nhất là Thái Doãn Hùng và cô gì dạy Hoá. Hùng bị cô kêu đứng lên trả lời, không biết làm sao, hắn nói "em thử cô có biết không thôi". Hùng có chiếc xe đạp rất ngầu (Hình 6.3b). Một hôm nó bị ai tông rồi đền cho 10 hay 20 ngàn chi đó, rửa là cả nhóm đi ăn chè. Hùng có nhiều trò lắm. Hồi đó có môn Giáo Dục Công Dân và ông Thầy có thói quen báo trước sẽ có kiểm tra 15 phút hay một tiết. Mình thấy nó chuẩn bị sẵn các câu trả lời, chép vào giấy hẵn hoi. Sau đó chỉ việc lấy ra tờ giấy có sẵn ra nộp. Và môn đó hắn có điểm tổng kết là 9.8 hay 9.9. Rồi hắn đọc cho bạn bè xung quanh chép. Ai cũng điểm cao. Cảm ơn mi, Hùng, mà tau và một số bạn khỏi phải học bài.

(a)

(b)

Hình 6.3: Một vài tấm hình ghi lại kỷ niệm thời cấp ba. Bên trái là hình với Bá Quang, Nhật Quang, Huy. Hình phải có Hùng, Huy và Cường.

Một nhân vật mà mình ấn tượng ở A3 là Đỗ Duy Nhã. Hồi đó mình không chơi thân với hắn nhưng có dạo hắn đi đâu không về nhà và ba hắn lên nhà mình hỏi thăm. Thế là hai chú cháu đi tìm hắn. Sau đó không biết vì sao mình đề nghị với Nhã là lên nhà mình học chung, nhưng hắn làm eo, đòi mình xuống nhà nó. Mình không chịu. Thế là hắn với mình chỉ có vậy thôi. Sau này Nhã bị đình chỉ học tập vì lí do gì mình không nhớ lắm. Còn nhớ hắn kiểm tra môn Sinh, do Thầy Am dạy, mà không làm bài còn vẽ trong giấy hình ông Thầy đi xe dream. Nhưng mà hắn rất thông minh, năm sau tu chí học hành thì đậu đại học; chuyện này mình không ngạc nhiên. Mình nghĩ hồi đó hắn mà học hành đàng hoàng thì mình không địch nổi.

Giờ phải nói đến đối thủ, không thôi nó giận. Nhà Hiếu ở biển Thuận An, hồi xưa cả lớp hay về nhà nó rồi đi tắm biển. Mình thì lùn, còn Hiếu cao lắm (1m8?), có lẽ vậy mà không thích đi cạnh hắn? Nhớ năm 11 Hiếu có giải 3 Toán thành phố còn mình thì giải khuyến khích (Cư A1 cũng giải khuyến khích) thôi. Hơi buồn buồn. Hiếu giỏi Toán, Lý, Hoá và cả Sinh (mình thì chịu chết với XX, YY). Nhưng nó không thi vào Bách Khoa. Hiếu kể do xem phim Hàn Quốc có anh chàng làm thị trường chứng khoán quá giỏi nên Hiếu thi vào Kinh tế.

Một bạn nữ mình ấn tượng là Ngọc. Người nhỏ con, hiền hiền. Hồi đó Đại và nhiều người thích Ngọc. Nhà Ngọc ở dưới phía Hương Thuỷ, xa nên phải thuê phòng trọ ở học. Nhà bạn này có quán cà phê thỉnh thoảng mọi người xuống chơi.

Mình không có ấn tượng tốt về Thầy Sơn lắm vì Thầy ... nhậu nhiều quá. Có hôm lên lớp mà thấy mặt Thầy đỏ au, rồi thì Thầy kêu mình lên giải bài tập hộ Thầy. Để Thầy nghỉ hay ngủ một tí. Nhưng giờ nghĩ lại thì chính Thầy đã làm mình tự tin hơn. Mình chưa bao giờ cảm ơn Thầy và ít khi gặp Thầy, vì mình ít đi họp lớp. Không những mình trốn họp lớp cấp 2 (còn có lí do), mình cũng trốn họp lớp cấp ba. Có lẽ Huy không đi nên mình cũng không. Hơn nữa mình luôn lạc lõng giữa đám đông, không biết nói gì. Mình thích tụ ba tụ năm thôi.

Có lẽ có rất ít bạn thích Thầy Nguyễn Bê, dạy Anh Văn. Thật tình mà nói Thầy Bê có thực tài (vì từng đi du học ở Úc) và Thầy dạy hay vì có óc hài hước. Tuy nhiên Thầy cho nhiều trứng ngỗng quá nên không được ai thích. Mình, dù không ăn trứng ngỗng, cũng không thích ổng vì Thầy có vẻ kiêu ngạo. Mình nhớ hồi đó Thầy ra một câu hỏi với giọng điệu khinh khỉnh là không ai trong lớp này biết câu trả lời. Không may là có thằng Phính này biết. Ổng giật mình hỏi ngay: "sao mi biết?" Thì tui biết chứ sao. Mà các bạn lớp nào có Thầy dạy đều không thích ổng. Hồi đó buổi tối mình đi học thêm Hoá (quên mất tên Thầy). Thầy này dạy giỏi nên nhiều bạn QH (nhất là mấy bạn chuyên Lý, có Hiếu A) cũng sang học. Giờ nghỉ giải lao thì cả đám đi lang thang trong khuôn viên trường chơi. Lúc đi ngang lớp dạy Cenlet của Thầy Bê thì làm tiếng con bò kêu. Ổng cầm micro ra chửi thật to: "đồ mất dạy, lũ ăn cắp xe". Ôi, một thời tuổi trẻ. Nghĩ lại trò không ra chi mà Thầy cũng chẳng ra gì.

Giờ mình nói về các bạn trong đội Bảy sắc cầu vồng (Hình 6.4a[†]). Không biết do ai đề cử mà mình lọt vô trong cái đội này. Vào đây thì vui vì gặp được cao thủ từ các lớp khác. Lâu nay chỉ nghe tiếng, giờ cũng được gặp mặt. Mình gặp Hoa Cương (xem Hình 6.4b chụp năm 2006) và Vàng Anh đã đề cập rồi. Lớp A2 đóng góp ba thành viên, người thứ ba là Cao Giang Nam–nghe cái tên thấy có mùi Trung Quốc là không thích rồi. Nói đùa thôi chứ mình không thích anh chàng này. Không hiểu sao. Không nhớ A1 có ai không còn A4 thì không. Có mấy bạn lớp C, và tất nhiên là Hà My Anh lớp 11. My Anh, cái tên thật là hay và còn xinh gái nữa. Bạn này và mình hay thi đấu nội công môn Anh Văn. Mặc dù sau này vào Học Viện Ngoại Giao ở Hà Nội, và sau đó đi học cao học ở Mẽo, My Anh thắng mình nhưng không chênh lệch mấy.

(a)

(b)

Hình 6.4

Trong Hình 6.4a thì người con gái Huế ngoài cùng bên phải, mặc áo dài tím là cô Diệp dạy văn. Bây giờ mình chỉ nhớ ba điều về cô: (1) cô hay mặc áo dài rất đẹp, (2) cô luôn cho mình năm điểm môn văn với nhận xét duy nhất "ý nghèo", và (3) bộ phim *Before Sunrise*[††]. Một hôm cô

[†]Mình không biết tới sự tồn tại của tấm hình này. Mãi tới năm 2023, nhờ Facebook mà một người bạn cấp ba–Nguyễn Thanh Luân–mới gửi cho mình. Cũng không biết vì sao cậu này có tấm hình luôn.

[††]*Before Sunrise* là một bộ phim tâm lý lãng mạn năm 1995 do Richard Linklater đạo diễn và cùng viết kịch bản với Kim Krizan. Phim theo chân Jesse (do Ethan Hawke đóng) và Céline (Julie Delpy) khi họ gặp nhau trên tàu Eurail và xuống tàu tại Vienna để trải qua một đêm bên nhau.

lên lớp và nói về phim này. Sau này, phải mấy chục năm sau, mình mới được thưởng thức phim này.

Ngày 8 tháng 8 năm 2022

# Chương 7

# Vào Sài Gòn

CUỐI năm lớp 12 có một cột mốc quan trọng. Đó là thời điểm chọn thi trường Đại Học nào. Không có bất cứ tư vấn nào từ phía gia đình, mình phải chọn đại thôi. Do học khá Toán và Lý nên mình chọn trường Bách Khoa Sài Gòn. Ngành chi đây? Khoa Hóa? Không vì ghét môn Hóa. Khoa Cơ Khí? Không vì tay chân mình siêu vụng về. Khoa Tin? Không vì không có tiền để mua một cái máy tính. Khoa Điện? Cũng không vì giựt điện rất ghê. Xem ra chỉ còn một khoa sót lại. Vậy là mình nộp đơn thi vô khoa Xây Dựng. Một quyết định quan trọng bậc nhất cuộc đời đã diễn ra như vậy đó. May mắn cho các bạn trẻ là sau này thì đã có tư vấn tuyển sinh.

Mà quyết định lần này của mình hoàn toàn dựa trên lý trí. Không có sự phân vân như chuyện HBT-QH. Nhưng mình cũng biết là TY sẽ thi vào Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp HCM, khoa Tin. Sau này TY thi đậu và học trường này chung lớp với Quân (bạn cấp ba).

Hồi đó mình thi ba đợt: đợt một vô BK, đợt hai vô Kinh Tế và đợt ba vô BK Đà Nẵng. Hai đợt thi sau là phương án B thôi vì mình không thích học hai trường đó. Cô Thảo, em gái ba mình, dẫn vô SG thi, và có thêm cậu Lực (em mẹ mình) từ Cà Mau lên chở đi. Vui nhất là được đi tàu từ Huế vô Xì Gòn, trên tàu mình gặp mấy bạn Quảng Nôm mà họ nói gì mình cũng không hiểu được. Thi xong ở SG thì chạy như ăn cướp để ra kịp Đà Nẵng thi đợt ba. Lúc này thì mình ở nhà dì Nga-cậu Tường, là chị cô cậu của mẹ mình. Nhà dì Nga đông con (giờ mình chỉ nhớ chị Vi) và mê thể thao, đặc biệt là bóng đá. Kì thi đại học năm đó trùng với Wolrd Cup 98 tổ chức ở Pháp. Lúc mình thi ở Đà Nẵng thì là lúc trận bán kết giữa Hà Lan và Braxin (đội yêu thích của mình) diễn ra, nhưng vẫn xem vì đi thi cho vui thôi (phương án B mà lị). Sau khi thi xong thì xem trận chung kết Braxin-Pháp. Tỉ số 0-3, mình không ngủ được luôn. Và ghét Zidane đầu hói cho đến bây giờ. Ở nhà dì Nga mình được ăn món tàu hủ đá lần đầu trong đời. Ghiền luôn. Ở Huế mình nhớ không có, Huế chỉ có đậu hủ nóng. Cũng rất ngon.

Điểm thi ba đợt của mình (theo đúng thứ tự đợt thi) là $x$, $x + 1$ và $x + 2$. Rất thú vị. Có một số nhận xét cho rằng đợt hai là khó hơn, ít nhất là môn Toán, vậy mà điểm đợt hai mình cao hơn đợt một. Lí do rất đơn giản: tâm lý thoải mái! Vì mình muốn vào BK nên áp lực lớn, còn thi Kinh tế là cho vui thôi nên không có áp lực. Còn làm sao để giảm bớt áp lực thì mình bó tay.

Nói về điểm thi thì phải kể tới Thảo chuyên Toán. Lúc vô BK rồi thì biết bạn Thảo chỉ đạt 29.5 thôi. Tức là môn nào cũng 9.5 điểm. Quá đỉnh. Vậy mà chưa phải vô địch nhé. Hồi đó đi học đại cương, mình ngồi sau một bạn nữ (hình như xinh xinh). Mọi người nói đó là Đoàn Ngọc Thanh Thảo đó nha, chỉ có 30 điểm thôi. Eo ơi, nhìn ngưỡng mộ ghê. Sau đó một thời gian ngắn, bạn Thảo này (người Xì gòn và hình như học Bùi Thị Xuân) đi Mỹ học.

Rồi thì mình thi đậu vào BK Sài Gòn, khoa Xây dựng. Mình không biết vui mừng thế nào, chứ sau này ba mẹ kể lại là hết sức lo lắng vì phải trang trải cho việc học của mình. Rồi mẹ dắt mình vô Sài Gòn. Lúc đầu thì mẹ quyết định cho mình ở nhà bà con cho đỡ tốn kém và yên tâm. Mình ở nhà bác Liêu ở Thị Nghè và đi học ở Thủ Đức. Nhưng sau đó thì chuyển lên BK ở Q10 học nên mình chuyển nhà. Lần này mình qua nhà một người bà con của dì Cần, bạn mẹ mình. Nhà này rất to, mặt tiền Điện Biên Phủ Q3, cô chủ nhà là bác sỹ Thu và chú chủ nhà là giám đốc một công ty. Vì sao cô cho mình ở thì mình không biết, vì–ngạc nhiên thay–lúc mình mới tới thì cô không nói gì cả. Nhưng cô chú có hai người con trai ở tuổi đi học, và mình ngầm định là mình sẽ giúp họ nếu họ hỏi. Nhưng mà hai cậu này thì không thấy hỏi mình cái gì bao giờ. Mà mình thì đối phương không hỏi thì tui ngồi im. Rồi sau đó, mình chuyển ra. Câu chuyện rất phức tạp mà mình không muốn làm phiền các bạn. Tuy nhiên, thật tình mà nói thì ở đó không thoải mái vì nhà giàu quá; mình không quen.

Sau đó mình đến ở nhà cô Thuỷ là bạn học của mẹ. Cô Thuỷ, chú Triển (chồng cô Thuỷ) và mẹ là bạn nhau. Mình ở đó rất thoải mái. Cô Thuỷ có hai người con trai, người thứ hai tên Linh, lúc đó đang học cấp 2. Linh và mình rất hạp, hay chơi đá banh trên máy tính. Nhưng Linh lười học mà mình không có cái uy (hay quyền để buộc Linh học). Mình ở đó một thời gian thì cô Thuỷ chuyển nhà lên gần sân bay, nhà mới to đẹp. Một hôm chú Triển có lẽ đã uống bia về nhà, chú dọn dẹp gì đó và mình thì không giúp (ở nhà ba mẹ mình mình cũng không biết dọn dẹp là gì vì mình không thấy có gì phải dọn cả). Chú nóng tính nên la mình. Tự ái, mình chuyển đi.

Cuối cùng thì mẹ mình quyết định không nhờ bà con mà cũng không bạn bè nữa. Cho thằng con đi thuê phòng ở. Rồi thì mình dọn tới ở cùng Quang, rồi Hiếu cũng chuyển đến, sau đó có thêm Trần Văn Phúc (lúc trước học chuyên Hoá, giờ học BK khoa Hoá). Tụi mình ở khu Lữ Gia, gần trường BK, chủ nhà là "bà mẹ Việt Nam", mọi người gọi vậy. Không biết tại sao. Nhà có nhiều phòng, và ngoại trừ vài phòng cho mẹ VN và phu quân thì cho thuê hết. Người thuê toàn là người Huế, đa phần học BK, và từ trường QH, Nguyễn Huệ, HBT ít thấy.

Ở đây thì bao ăn ở, tức là mẹ VN nấu cơm cho ăn luôn, ngày hai buổi. Mình thấy ở đó rất rất là vui, mặc dù lúc ăn thì phải ăn cho lẹ không thôi ... hết cơm. Một chuyện vui nữa là chuyện ngủ: không có phòng riêng nên tất cả mọi người ngủ chung trên sàn nhà (bằng ván), mỗi người một chiếc chiếu và một cái mền, quạt mở vù vù cho khỏi muỗi. Buổi sáng mẹ VN lên thấy vậy thì la toáng lên: "đắp mềm mà bật quạt!" Bà tiếc tiền điện thôi. Ở đây thì đúng rất là vui vì lúc nào cũng ồn ào. Hình như có khoảng 12 đến 15 chú sinh viên. Hồi đó mình hay xem các anh (như anh Ân, anh Vinh) đánh cờ tướng. Đôi lúc mấy anh ép phải ngồi xem thâu đêm. Ấn tượng với mình nhất là anh Thắng vì ảnh đẹp trai, cao ráo và học siêu giỏi. Sau này anh Thắng học lớp cao học Việt-Bỉ khoá 4 rồi đi Canada làm tiến sỹ và định cư ở đó. Có lẽ đôi lúc mình nghe anh Thắng nói chuyện (với anh Ân thì phải vì hai ảnh lúc đó hình như làm cho Viện Cơ) thì hình ảnh của cao học Việt-Bỉ nó in vào đầu mình lúc nào không hay. Nhớ có lần anh Thắng đốt cái chiếu trên lầu làm mọi người tưởng là cháy nhà. Thật một phen khiếp vía, ấy vậy mà anh Thắng tỉnh bơ! Anh Thắng, Nguyễn Chiến Thắng, sau này là phu quân của bác sỹ Quỳnh Anh hồi xưa học Quốc Học.

Ở nhà bà mẹ VN thì mình quý nhất là anh Đức, lúc trước học Nguyễn Huệ, và lúc đó thì học Xây dựng. Anh Đức người da ngăm đen, lúc nào cũng cười hề hề rất giống ông Phật Di Lặc. Hồi đó xem trên TV phim hoạt hình gì mà trong đó có một bài hát quá hay. Mình hỏi anh Đức thì ảnh bảo là bài *If We Hold on Together* do danh ca Diana Ross hát. Lúc tết ở Huế anh Đức còn viết ra đầy đủ lời bài này cho mình. Cảm ơn anh Đức rất nhiều. Mình yêu thích nhạc tiếng Anh từ đây.

Và chính ở đây mà mình nhìn thấy quyển sách có chữ `C++` mình đã đề cập ở Chương 2.

Không nhớ ở đó được bao lâu thì có người mất tiền (Hiếu, Quang hay Phúc). Thế là bốn người trẻ nhất ở đó bàn nhau chuyển ra thôi. Thế là 4 người dọn ra, qua một cái nhà cách đó không xa. Nhà này có ba mẹ con thôi, tầng dưới chủ nhà ở, có quán cà phê ở trước, tầng trên thì cho tụi mình thuê. Sau này thì có thêm một nhóm người Nha Trang, và rồi thì anh Tri (chuyên Lý, và đang học BK khoa Điện tử), anh Bảo (học khoa Hoá), anh Công (học Xây dựng), anh Công người miền tây (học Cơ khí) và cuối cùng là Nguyễn Văn Phúc (học chung lớp cấp 3 và đại học với Phúc kia). Vì có hai Phúc nên Trần Văn Phúc có mỹ danh là Phúc cận vì hắn cận thị, còn Phúc kia gọi là Phúc bụi hay Phúc trợn. Không biết ai đặt cho. Thời sinh viên nghèo khó không có tấm hình kỷ niệm. Mãi sau khi đi làm thì mới chụp hình. Hình bên cạnh là đám cưới Phúc trợn: từ trái sang phải: anh Tri, vợ chồng Phúc, mình, Lựu và Phúc bồng Rôn, con trai đầu Lựu.

Ở nhà này thì thoải mái hơn vì mọi người tuổi tác xêm xêm nhau cả. Anh Bảo thì mê hát, chiều là ra đúng ban công, mở nhạc lên, hát theo. Lúc đó có chương trình Làn Sóng Xanh rất hay; và mình biết đến Phương Thanh, Lam Trường, Đan Trường từ đó. Anh Tri thì đánh cờ và chơi bài tiến lên siêu hay. Buổi chiều mình thường đá cầu với anh Tri và Phúc cận. Sau đó thì tắm rửa rồi mọi người đi ăn cơm bụi. Mình nhớ rõ là một phần cơm là 4000 đồng, vị chi mỗi ngày là 8000 đồng. Chỉ có khi mới nhận tiền từ ba mẹ thì mới dám ăn thêm là 6000 đồng. Mình hay thức khuya nên dậy trễ, thế là khỏi cần ăn sáng. Một thói quen không lành mạnh kéo dài cho tới bây giờ (khoản ít ăn sáng)! Lâu lâu thì mình đi ra tiệm đá banh điện tử với Quang và Hiếu. Hiếu thì chọn đội Nigeria, Quang thì Braxin và mình thì Achentina (vì mê Batigol). Nhớ Quang nhất là chuyện nó về nhà TY chơi rồi về huyên thuyên với mình kiểu "tau mới đi chơi với TY". Nó không biết là thằng bạn đau lòng cực độ. (Sau này TY đính chính là nó về nhà TY nhưng là cua Hà Lan. Cũng có thể Quang có nói là về thăm Lan nhưng mà nó gặp được TY trong khi mình thì không là đủ khiến Phính này buồn rồi.) Ấy vậy mà sao này Quang suýt thành em rể của mình. Nhưng nhờ nó đi chơi vậy nó chép được mấy bài hát của ban nhạc Air Supply như *Making love out of nothing at all, All out of love* ... Mình biết đến và ghiền nhóm nhạc này luôn từ đây.

Hồi đó khó khăn nhất là xem bóng đá C1 lúc khoảng 2h sáng. Cô chủ nhà thì có TV nhưng mà ba mẹ con nằm ngủ ngay đó nên xem thì không bật tiếng và không la! Chán quá mình mới leo từ ban công xuống rồi ra quán cà phê xem. Đông vui, la hét thoải mái. Rứa mà không biết (ai mách lẻo ta?) mà cô chủ nhà biết, la mình một trận. Không nhớ sau đó thì xem C1 kiểu gì. Thích nhất là đi học về mọi người quây quần bên cái ti vi xem *Trộm Long Tráo Phụng* (mê Thiên Thiên quá) và *Thiên Long Bát Bộ*.

Lớp 12 của mình lúc đó vô SG học có: Quang, Hiếu, Ngọc (cùng học Kinh tế), Đại (Kiến trúc), và Quân (Khoa học tự nhiên). Hồi đó hay đến nhà Ngọc chơi (Ngọc ở với anh trai) rồi đi uống cà phê. Rứa thôi. Nhà tụi mình ở hầu như ít có giai nhân viếng thăm. Nhưng bổng một hôm có hai mỹ nhân tới chơi tìm Phúc Cận. Một là Hiền. Hoàng Hiền, lúc trước học chuyên Hoá Quốc Học với hai Phúc. Hiền rất xinh. Còn mỹ nhân thứ hai là Lợi, Mai Thị Lợi, lúc trước học lớp C QH. Lợi cũng xinh. Kiểu một người là Triệu Minh thì người kia cũng là Chu Chỉ Nhược. Hai bạn nữ đều đang học Kinh Tế. Tụi mình đứng trên ban công nhìn xuống thấy Phúc đi chơi với người đẹp mà thèm. Sau này thì mình thành bạn của cả hai cô nương này. Hình bên cạnh chụp năm 2013/4.

Lúc năm 3 ở BK thì vào chuyên ngành và mình gặp lại Lựu (bạn cấp hai NCD, hồi xưa học chuyên lý QH). Hồi đó trong nhóm ai cũng đi xe đạp cà tàng, còn Lựu đi xe dream lùn. Lựu hay chạy qua chơi với Phúc, Quang, mình, anh Tri, anh Bảo. Hồi đó Lựu ở nhà với anh bà con, ở quận Tân Bình, gần cái chợ gì quên mất tên. Mình hay qua đó, chơi, ngủ lại, xem đá banh, đá banh với hắn. Thời đó cứ đi xa là mượn chiếc Dream của Lựu đi. Lựu thì quá rộng rãi, không bao giờ nói không với bạn bè. Giai đoạn này thì hắn đang cua một em gái người Đà Nẵng rất xinh tên bé Anh (ai cũng gọi vậy nên gọi riết giờ vẫn không biết tên đầy đủ là gì). Mình theo hắn cua bé Anh rất vui. Rồi Lựu đưa bé Anh về dinh, hai người kết hôn nên duyên vợ chồng. Sau này khi mình ở Hà Lan về SG thì mình ở lại nhà vợ chồng Lựu, được dành nguyên một phòng hẳn hòi. Bé Anh cũng rộng rãi như Lựu. Cảm ơn hai bạn nhiều.

Vào năm ba thì chú Thọ ở Mỹ cho mình tiền (200 đô thì phải) để mua máy tính. Lúc đó nhờ Khương, rồi Khương nhờ Quốc Anh (con trai thầy Quang dạy chuyên Toán QH) mua linh kiện rồi ráp cho. Quốc Anh học Công Nghệ Thông Tin mà. Cái máy tính này thay đổi cuộc đời mình. Mình nhớ là hồi đó mình không thích ai dùng nó (vì sợ hư?). Rồi một hôm cô chủ nhà bảo mình phải đóng thêm tiền điện vì chỉ có mình là có máy tính. Vì hai lí do đó mình đã dọn ra với anh Bảo. Giờ nghĩ lại thấy đúng là nghèo thì hèn. Dĩ nhiên nhiều người nghèo vẫn sang. Tới giờ vẫn thấy xấu hổ vì chuyện này.

Anh Bảo (hình bên) là người đam mê âm nhạc. Cứ chiều chiều là anh ra ngoài ban công mở cát sét lên nghe nhạc. Nhờ đó mà mình biết đến, ngoài chương trình Làn Sóng Xanh kể trên, nhóm nhạc Westlife với bản *Soledad*, và nhóm M2M với bản *The day you went away*. Anh Bảo và mình ở cùng nhau hai nhà. Có một nhà, ông chủ nhà có 3 cô con gái dễ thương, còn sinh viên thuê toàn là đực rựa. Ông này rất mê phim chưởng. Hồi đó buổi tối ông chiếu cho xem phim *Cỗ Máy Thời Gian* do Cổ Thiên Lạc đóng†. Mà mỗi tối chỉ một tập thôi. Lúc này Đại hay lên chơi và có lẽ hắn đang yêu hay thất tình mà toàn nghe nhạc Trịnh, Vũ Thành An và Ngô Thụy Miên. Và thế là mình biết đến Tuấn Ngọc, Khánh Ly. Rồi thì mình lại chuyển nhà, qua ở với Cường (bạn cấp 3). Lúc đó là năm 2002, mình nhớ rõ là vì có World Cup ở Nhật và Hàn. Đây là World Cup sung sướng nhất vì thời gian quá thích hợp, mình xem rất nhiều trận. Nhớ là đi nhà thi đấu gì để xem trận bán kết Anh-Braxin; màn hình thật to, quá sướng. Rồi đi xem trận chung kết Đức-Braxin với Đại, Nghĩa và mấy đứa bên trường Kiến Trúc. Sau nỗi buồn State de France thì Braxin của mình đã vô địch với Ronaldo kiểu tóc thằng Bờm.

Mình lại chuyển nhà lần nữa, và lần này thì qua ở với Bá Quang. Chú nó đi Mỹ để lại căn nhà ở chung cư gì Q5. Ngôi nhà này chia cho Quang và một gia đình bà con bên vợ chú nó. Thời gian ở đó là lúc làm luận văn tốt nghiệp. Chủ yếu là ở nhà làm luận văn, lâu lâu lên trường gặp thầy Bùi Công Thành và thầy Châu Ngọc Ẩn để báo cáo tiến độ. Quang lúc đó mê chơi game gì thấy thức suốt đêm. Mình nói game chi mà ghê vậy, rồi chơi thử và cũng thức trắng đêm. May mà cũng không thành nghiện. Còn Quang thì giờ vẫn còn chơi!

Thời sinh viên không phải lúc nào cũng ăn uống cam khổ, mình cũng có nhiều lúc hoành tráng về ăn uống. Số là mẹ mình có người em gái tên Lu. Dì Lu lấy chồng và sống ở Gia Lai. Chồng dì, cậu Đệ, hay đi công tác Sài Gòn. Cậu Đệ là người thoải mái và cực kỳ hào phóng. Lần nào cậu xuống Sài Gòn là mình được đi nhậu với cậu và bạn bè cậu. Được ăn đủ món ngon như là ốc. Rồi thì lúc nhận tiền do học lớp AUPELF, cả lớp rủ nhau đi nhậu ... rượu. Không có tiền uống bia. Mấy đứa gọi món thịt chó ra rồi chờ mình ăn xong mới nó đó là thịt chó. Có kì hay đi ăn thịt chó với Khương. Sau này ba mình nói mình là theo đạo Phật không nên ăn nên từ đó không ăn nữa.

Rồi thì còn chú Ninh, người yêu cũ của mẹ mình. Mẹ kể hồi đó hai người yêu nhau rồi chú đi bộ đội, trước khi đi chú nói "Liên không phải chờ anh,...". Mẹ mình tự ái, rồi định mệnh cho gặp ba mình. Lúc mình vào SG học thì chú đã có gia đình và vợ con. Thỉnh thoảng chú tới thăm và cho tiền. Nếu mà chú còn độc thân mình xin chi chắc chú cũng cho, mình tin như thế. Tình yêu của chú dành cho mẹ mình thật mãnh liệt.

Dì Dinh rất tốt với mình. Dì là bạn học Đồng Khánh với mẹ mình. Mà chồng dì thì chúa ghen, mình nhớ gọi điện đến nhà dì, chú cầm máy nghe mình nói là "cho con gặp dì Dinh", vẫn hỏi ""Anh là ai?". Không lẽ mình trả lời "Anh là cu Tiên, cháu dì Dinh". Hèn chi dì Dinh bỏ chú không lâu sao đó. Dì Dinh tính tình bộc trực, ăn ngay nói thẳng, không như con gái Huế. Mình thích dì là ở điểm này. Mình hay tới pharmacie của dì chơi, tới nhà di chơi. Dì còn dẫn cho đi bơi không phải bơi ở sông mà ở hồ; đó là lần đầu tiên. Hồi học cao học và tiến sỹ dì còn làm mai mấy mối. Dù không thành, nhưng mình luôn cảm ơn dì. Tiếc là mình không chơi thân được với con trai dì. Mình muốn lắm.

Hồi đó Đại và mình chơi thân vì chơi từ cấp ba. Đại là người có ý chí mạnh mẽ. Hắn thi rớt đại học lần đầu, vào Sài Gòn luyện thi Kiến Trúc và năm sau Đại đậu Kiến Trúc. Một chuyện không thể tin được nếu kể thêm rằng có lúc Đại suýt bị đuổi học, chỉ vì đá sập cái cửa lúc thầy Bê đuổi ra lớp. Vì Đại học Kiến Trúc nên mình chơi thân với nhiều bạn bên KT. Đại chơi thân với Quang, Quang người Gia Lai, và Quang thì có hai người em gái rất xinh. Người em gái lớn gọi là bé Lớn và người em là bé Nhỏ. (Đặt tên rất chi là Toán, dễ nhớ). Bé Nhỏ chuẩn bị thi đại học và Quang nhờ mình chỉ giúp vài chiêu. Mình đồng ý ngay. Mình chỉ chờ có vậy, vì ngoài

†Giờ mình mới biết phim này chuyển thể từ tác phẩm *'Tầm Tần Ký'* của nhà văn Huỳnh Dị.

cái đó thì mình cũng chẳng có chi cho ai nhờ. Thì mình cũng thích thích bé Nhỏ, nhưng mà chỉ một xíu thôi vì lúc đó hình bóng người khác vẫn còn chiếm hết tâm trí mình. Hồi đó hay về nhà Quang chơi, ăn không biết bao lần. Cảm ơn Quang, bé Lớn và bé Nhỏ.

Lúc vào BK thì mình chọn học lớp tiếng Pháp (gọi là lớp AUPELF) vì có tiền. Lí do đơn giản thế thôi. Trong lớp tiếng Pháp thì có bốn người Huế: Thảo và Khương chuyên Toán Quốc Học, Bảo A1 QH và mình. Mình hay chơi với Khương, về nhà nó chơi hoài. Nhà Khương có ba anh chị em mà ai cũng học giỏi. Lúc đó em gái Khương đã vô học Kinh tế (?). Rồi đi trong trường thì gặp thêm Trâm, Quỳnh Như, Hữu Chúc, đôi lúc có gặp Thái Bình, toàn là cao thủ bên QH, và Lê Tuấn Anh. Phía HBT chỉ có mình và hai bạn, một là bạn nữ tên Thảo học A1 (giờ đang ở Cali) và hai là một thằng học A4 (con chai ai thèm nhớ tên).

Trong lớp AUPELF thì có nhiều cao thủ như Hoàng Thế Thao sau này là Huy Chương Vàng lúc tốt nghiệp, nhưng mình thích Đỗ Đăng Doanh vì hắn đá banh rất hay. Tuy nhiên trên sân hắn nói hơi nhiều. Mình nhớ mình chuyền cho nó ghi bàn, mà nó còn càm nhàm mình. Lúc nào Doanh cũng có người xung quanh. Và mình ngưỡng mộ điều đó.

Về chuyện học hành thì cũng không có gì đáng nói. Hai năm đầu học đại cương còn ba năm cuối học chuyên ngành. Mình nhớ học kỳ đầu tiên của đại học kết quả rất tốt: Triết (9/10), Toán A1 (9/10), Toán A2 (9/10). Thế mà học kỳ 2 mình rớt môn Lý. Và sau đó rớt luôn môn Thống Kê. Không hiểu nổi! Mình thất vọng, và từ đó không còn động lực bằng giỏi luôn. Sau khi vào chuyên ngành thì mình thích các môn cơ bản như Sức Bền Vật Liệu, Cơ Kết Cấu, Cơ Lưu Chất, và đặc biệt là môn Phương Pháp Số. Đó là môn mình thích nhất trong cả chương trình học và điểm của mình môn đó là 6.3/10. Ông thầy dạy môn này rất hay vì ổng vui tính. Môn này phải làm bài tập lớn và phải trình bày bằng Microsoft Word, mà mình thì không biết Word (lúc này chưa có máy tính ở nhà). Mình ra ngoài tiệm net vừa học Word, học gõ công thức, làm rất vất vả. Làm xong lên nộp cho ổng, trễ khoảng 30 phút, ổng cho ZERO! Mà phần bài tập này đóng góp tới 30% số điểm cuối cùng! Mình nhớ ông này mãi. Ông hay đạp xe đạp trong sân trường, mắt cận nặng.

Một kỉ niệm nữa là môn Đồ Án Thép. Lúc bảo vệ thì người chấm điểm của mình, may mắn thay là Thầy Nhân. Thầy Nhân người Huế, và dạy rất hay môn Kết Cấu Thép vì lớp Thầy lúc nào cũng đông. Nói chuyện thì Thầy biết mình người Huế, Thầy nói: “học chi mà bèo rứa em. Cố lên nhé”. Nói xong Thầy cầm bút ghi xuống con số 5. Con số này nó đáng yêu làm sao. Vì nó đủ để qua môn này. Cảm ơn Thầy, mặc dù lúc nghe Thầy nói thì cũng cảm thấy hơi nhục nhục, dù mình không biết chi hết về bu lông, và đinh tán. Không chút sexy gì cả. Hèn chi phần lớn học sinh giỏi chọn học Công Nghệ Thông Tin.

Các môn còn lại thì rất chán vì phần lớn là áp dụng công thức (mà mình không hiểu từ mô ra) để thiết kế nhà. Có môn Đồ Án Kiến Trúc thậm chí còn phải nhờ Đại nó vẽ giúp. Lên gặp ông thầy là kiến trúc sư nổi tiếng Nguyễn Tài My (học thầy này rất vui và có lúc ria mép của ổng chỉ có một bên), ổng nói "nhờ bạn vẽ đúng không, khai thật thì cho 5 điểm". Mình khai thật và qua môn này. Biết chi mà vẽ nhà trời!

May cho mình là lúc đó mình tìm được đồ chơi khác là C++ và môn Phương Pháp Phần Tử Hữu Hạn, và đặt biệt là cái máy tính. Rất đúng thời điểm. Nay ngẫm lại mình thấy mình không có động lực lúc học đại học. Học mà không biết để làm gì, vì mình không có đam mê xây dựng các công trình. Mà trong chương trình học ở BK cũng không có ai giới thiệu những công trình vĩ đại (như tháp Eiffel, đập Hoover ở sông Colorado nước Mỹ...) để kích thích niềm đam mê của sinh viên. Có thể giảng viên khoa Xây dựng cũng không thích cái món này!

Lúc làm luận văn tốt nghiệp thì càng chán. Vì mình thích tính toán kết cấu dùng phần tử hữu hạn, nên mình lên gặp Thầy Bùi Công Thành. Thầy phán cho một câu: "cái đó làm để làm gì em". Thế là cuối cùng mình làm luận văn về nhà cao tầng, cao mấy chục tầng luôn, như đa phần các bạn khác. Làm xong và quên luôn, và không bao giờ thiết kế một công trình thật dù là nhà A4. Vậy mà giờ mình là giảng viên khoa Xây dựng. Đời đúng là vui.

Và mình viết luận văn bằng tiếng Pháp. Lúc đó là một điều chẳng làm gì thích thú, mà mình đâu có biết chính nhờ làm chuyện không có gì thú vị này mà sau này mình đi Pháp dễ dàng hơn. Phải nhờ luận văn của các anh chị khoá trước mình mới viết xong luận văn bằng tiếng Pháp. Hôm bảo vệ thì có mấy ông Tây từ Pháp qua, hỏi lung tung một hồi thì cho 7 hay 8 điểm. Vậy là qua. Nhưng mà còn nhiều môn khác! Vì mình rớt nhiều môn trước đó nên học kỳ cuối cùng ở BK mình học rất nặng, ngoài đề tài tốt nghiệp thì học thêm 4 hay 5 môn khác, trong đó môn Kiến Trúc 2 là một nỗi kinh hoàng. Mình học nó lần này là lần hai. Và nếu rớt thì không có bằng đúng thời hạn. Mình thì không sao nhưng mà ăn nói răng với ba mẹ? Hôm xem điểm thi mà hồi hộp nhiều hơn 5 năm trước đó xem điểm thi đại học trên báo. Và mình được số điểm mình cần: 5 điểm. Tạ ơn trời đất. Vậy là sau năm năm mình tốt nghiệp BK bằng khá. Làm gì tiếp theo với cái bằng này?

Ngày 30 tháng 10 năm 2022

# Chương 8

# Chương trình cao học Việt-Bỉ

HỒI đại học thì văn phòng của lớp AUPELF ở tầng 4 toà nhà A4 của trường Bách Khoa. Cái hay là văn phòng của chương trình cao học Việt-Bỉ (tên tiếng Anh là EMMC) cũng nằm cùng tầng. Đây là một sự tình cờ thú vị. Mình nhớ hồi đó đi ngang qua thì thấy trên tường treo mấy cái poster có hình chiếc máy bay nhiều màu sắc rất đẹp. Những thứ này nó thu hút mình vì thật tình mà nói ngành xây dựng không có cái sức thu hút đó. Hay nói cách khác ngành này không sexy. Hơn nữa hồi xưa ở nhà bà mẹ Việt Nam thì mình đã nghe anh Thắng nói về chương trình này, dù chỉ là nghe lỏm thôi. Khi chúng ta nghe nhiều về một thứ thì ít hay nhiều chúng ta thích nó. Đó là hiệu ứng tiếp xúc do nhà tâm lý học Robert Zajonc đặt ra.

Rồi thì mình tốt nghiệp đại học, và đi làm cho một công ty xây dựng nhỏ nhỏ. Công việc thì không có gì thích thú. Thế là mình quyết định đi học cao học Việt-Bỉ. Hình như từ lúc mình thấy mấy cái poster đó mình đã bị nó mê hoặc. Rất may là ba mẹ đồng ý. Sau này mẹ mình kể lúc nghe mình nói vậy thì tá hoả vì vừa lo xong học đại học đã là một vấn đề. Nhưng may mẹ mình hiểu tính khí mình không hợp ngành Xây dựng nên đồng ý. Hơn nữa chương trình cao học Việt-Bỉ có cái rất hay là chi phí rẻ, hình như khoảng 3 triệu đồng cho một khoá học dài hai năm.

Thế là mình ở nhà tu luyện nội công để thi vào cao học Việt-Bỉ (VB) năm 2003. Chương trình này thì quá nổi tiếng nên mình không nói nhiều về nó như lịch sử hình thành hay nó đã đào tạo ra bao ông thạc sỹ và góp phần ra mấy bà tiến sỹ (hình bên cạnh là 4 cựu sinh viên EMMC 9 và 10 gặp nhau ở Paris. Hình có Phan Văn Tùng, Cao Đức Toàn, mình và Nguyễn Thành Nhơn). Nhưng mình cũng muốn chia sẽ đôi điều. Chương trình VB là tâm huyết của Giáo Sư Nguyễn Đăng Hưng. Là GS người Bỉ làm việc ở đại học Liège và đang ở đỉnh cao của sự nghiệp, GS Hưng đã hầu như là dừng công việc nghiên cứu để phát triển chương trình cao học VB. Đây là hình thức du học tại chỗ, tạo cơ hội cho sinh viên VN không có điều kiện ra nước ngoài mà vẫn được học từ các GS châu Âu. Và mình là một trong số đó.

Mình thi vào lớp VB 9 hay còn gọi là EMMC 9. Tức là đã có 8 lớp EMMC trước đó (tính ở Sài Gòn thôi). Lúc này có lẽ kinh phí đã gần hết, chất lượng có vẻ đã giảm. Mình nhận xét chủ quan là vì so với các khoá trước, các GS qua dạy năm mình không nổi tiếng lắm. Mình thi vào thủ khoa. Vui thật, nhưng công bằng mà nói, học cao học thì phần lớn người lớn tuổi đi làm rồi. Có vài bạn trẻ bằng mình, như bạn Như, nhưng có lẽ không ai như mình là không đi làm, mà chỉ học.

Vào EMMC9 mình gặp được 4 người bạn rất dễ thương. Đầu tiên là Như nè. Như là cựu học sinh chuyên Toán Quốc Học, học Bách Khoa Hàng Không. Mà ba của Như thì là thầy dạy tin học lúc mình ở cấp ba (HBT). Tiếp theo là Hồng Phong, Lê Bùi Hồng Phong, người Gia lai, lúc trước học lớp Như. Rồi Tri nè, Trương Quang Tri, người Quảng Nam, cũng học lớp với Như và Phong. Lúc đó, Phong và Tri là giảng viên Bách Khoa bộ môn Cơ Học Ứng Dụng. (Tức là học giỏi và được giữ lại trường). Như vậy là 3 người cùng tuổi con khỉ. Người cuối cùng là anh Mỹ. Phạm Mỹ, người Quảng Nam, lúc trước học Xây Dựng Hà Nội và lúc đó là kỹ sư cho một công ty Xây dựng. Làm bài tập thì thường làm theo nhóm, thế là các bạn Như, Phong, Tri, và mình lập một nhóm, rồi sau thêm anh Mỹ vào. Lúc đó mình thêm anh Mỹ vào vì thấy anh này không đi học gì cả (vì bận đi làm công trình) và thấy ảnh vui vui. Lại một quyết định có vẻ tào lao mà cuối cùng hoá ra tốt cho mình.

Lúc này thì mình ở với anh Tri, Lựu, và anh Lịch (học cùng anh Tri). Sáng thứ bảy thì cùng với hai anh Tri và Lịch đi đá banh trong BK với lớp chuyên Lý QH của hai ảnh. Lớp này hình như vào Sài Gòn hết và học BK rất đông. Anh Lịch thì mê xem phim Mỹ, nhờ anh mình biết đến diễn viên Richard Gere. Ở ngắn thôi nhưng anh đã truyền lại sở thích xem phim Mỹ cho mình. Mình thích Richard Gere có lẽ vì ông có đôi mắt biết cười, giống cậu Sol (em mẹ mình). Nhà này hình như của Lựu; mình nhớ đi lại rất tự do. Hồi đó xem cúp C1 thì lái xe máy ra quán cà phê xem. Lựu thì hâm mộ Real Madrid còn mình thì MU. Mà MU thì toàn thua RM. Sau đó không biết tại sao anh Tri và mình chuyển ra thuê phòng gần đó ở.

Lúc vào EMMC thì mình biết là hai hay ba người xuất sắc nhất lớp sẽ được học bổng đi Bỉ ba tháng, và những người này hầu như sẽ đi làm nghiên cứu sinh ở nước ngoài sau khi hoàn thành cao học. Và mình muốn là một trong ba số đó. Mình không nhớ rõ là từ bao giờ mà mình thích đi nước ngoài. Thế là mình học rất chăm. Không sót một buổi nào. Học khác hẳn thời đại học vì bây giờ mình có động lực và cũng không có hình bóng giai nhân nào quấy nhiễu (dù muốn lắm). Như thì lúc đi lúc không, nhưng sau một vài tháng thì Như có học bổng đi học ở Singapore. Mình nhớ là phần lớn ai học Hàng Không ra đều đi nước ngoài du học. Và người có công lớn trong chuyện này là Thầy Tống, GS Nguyễn Thiện Tống. Mình chưa gặp Thầy bao giờ, nhưng vẫn tự nhận là học trò của Thầy, vì mình ngưỡng mộ những đóng góp to lớn của Thầy.

Còn lại trong nhóm thì Phong và Tri hầu như không đi học vì quá bận bên trường BK. Còn bác Mỹ thì không đi buổi nào! Vậy những người này qua cái ải cao học như thế nào? Chuyện thế này. Mình đi học, ghi chép đầy đủ. Và trước khi thi một môn nào, thì mình luôn viết ra một cái tóm tắt cho toàn bộ kiến thức của môn đó. Xem Hình 8.1a cho một ví dụ, nhưng cái này không phải của mình. Notes thời học cao học mất hết rồi. Phong, Tri và anh Mỹ học theo mấy cái notes này trong vòng vài ngày và điểm của họ không thua mình mấy. Có khi còn cao hơn. Anh Mỹ cứ chọc quê mình chuyện này. Dĩ nhiên bài tập nhóm thì ai cũng phải đóng góp (vì một mình làm thì không nổi).

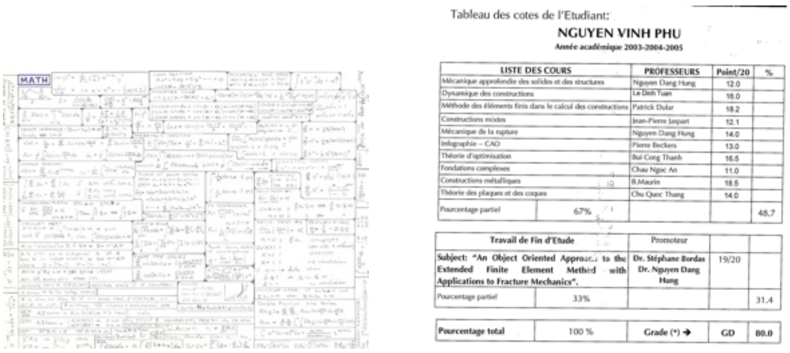


Tableau des cotes de l'Etudiant:

NGUYEN VINH PHU

Année académique 2003-2004-2005

| LISTE DES COURS | | PROFESSEURS | Point/20 | % |
|---|---|---|---|---|
| Mécanique approfondie des solides et des structures | | Nguyen Dang Hung | 12.0 | |
| Dynamique des constructions | | Le Dinh Tuan | 16.0 | |
| Méthode des éléments finis dans le calcul des constructions | | Patrick Dular | 18.2 | |
| Constructions mixtes | | Jean-Pierre Jaspart | 12.1 | |
| Mécanique de la rupture | | Nguyen Dang Hung | 14.0 | |
| Infographie – CAO | | Pierre Beckers | 13.0 | |
| Théorie d'optimisation | | Bui Cong Thanh | 16.5 | |
| Fondations complexes | | Chau Ngoc An | 11.0 | |
| Constructions métalliques | | B.Maurin | 18.5 | |
| Théorie des plaques et des coques | | Chu Quoc Thang | 14.0 | |
| Pourcentage partiel | 67% | | | 48.7 |

| Travail de Fin d'Etude | | Promoteur | | |
|---|---|---|---|---|
| Subject: "An Object Oriented Approach to the Extended Finite Element Method with Applications to Fracture Mechanics". | | Dr. Stéphane Bordas Dr. Nguyen Dang Hung | 19/20 | |
| Pourcentage partiel | 33% | | | 31.4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Pourcentage total | 100 % | Grade (*) → | GD | 80.0 |

(a) (b)

Hình 8.1

Chương trình EMMC bao gồm 10 môn học và luận văn tốt nghiệp. Trong 10 môn thì 5 môn do giảng viên Bách Khoa dạy và 5 môn do GS châu Âu (Thầy Hưng tính là GS Châu Âu), xem Hình 8.1b. Trong những môn này thì mình chỉ thích năm môn: hai môn của Thầy Hưng, môn Phần Tử Hữu Hạn (PTHH) của GS Dular, môn CAO của GS Becker và môn Tối Ưu Hoá Kết Cấu của Thầy Bùi Công Thành (mình rất thích Thầy Thành từ hồi đại học, và cũng buồn Thầy vì đã từ chối hướng dẫn mình làm luận văn về PTHH). Và mình đạt điểm khá cao cho môn PTHH không chỉ vì mình thích nó mà vì mình biết nó rồi. (Nếu các bạn còn nhớ thì thời đại học mình theo Phương học môn này, dù sau đó bỏ, thì sau này mình có mua sách tự học nó, dù chỉ là cho vui). Chỉ tiếc là hai môn của Thầy Hưng mình điểm bèo quá. Cái giá là trong ba người được học bổng đi Bỉ không có mình! Giờ nghĩ lại cũng không nhớ ai đã đi Bỉ. Nhưng mà mình không quan tâm ai đi, vì điều quan trọng là mình không được đi. Bây giờ cố nhớ lại thì trong số người đi Bỉ có Bùi Quốc Tính (học Khoa Học Tự Nhiên) và giờ làm GS ở Nhật.

Mình buồn và thất vọng lắm. Học nhiều như vậy, thủ khoa thi vào mà giờ thì... Sau này bạn bè nói mình trầm cảm giai đoạn đó! Sự thật thế nào thì không biết, nhưng mình chuyển nhà ra ngoài ở với anh Mỹ. Có lẽ mình muốn một sự thay đổi. May mắn là mình còn có Phong, Tri, Hiền, anh Mỹ và chị Kim Anh. Mình hay qua nhà Phong chơi, và đi đá banh ở sân Phú Thọ. Phong còn dẫn mình đi ăn cơm tấm ở quận mười. Ở Sài Gòn đã 5 năm mà giờ mình mới biết món này. Ghiền từ đó luôn. Phong còn giới thiệu việc làm cho mình. Đó là đi dạy Tin học ở vài Trung tâm Tin học. Hồi đó mình đi dạy AutoCAD (là một phần mềm dùng trong Xây dựng để tạo bản vẽ kỹ thuật). Lần đầu tiên mình đứng lớp và mình không biết giọng Sài Gòn. Mở miệng ra nói là dưới lớp có người cười. (Cái ni không có chi lạ, từ khi vô Xì gòn thì mấy đứa bạn đã thích chọc người Huế như mình rồi; tụi nó cứ nói thế này: ‘P ơi, nói từ *lộn* cho tụi tao nghe’. Mình nói xong là tụi nó cười. Nhưng mình không thay giọng, không hiểu vì sao.) Đứng lớp phai nói liên tục hai tiếng đồng hồ. Về uống 5 li nước mía! Mệt thật, nhưng mà lúc nhận lương là mệt nó bay đi mất tiêu. Mình nhớ vui nhất là có một lớp học, mà trong lớp có một học viên nữ dễ thương mà mình rất là thích. Định bụng sẽ rủ đi chơi. Cái ngày cuối cùng, vào lúc lớp xong, mình ra đứng nhìn em đó. Mà em này hình như cũng có ý chờ. Mà mình không mời được, vì trong túi không có một đồng xu! Tiếc là không dám lên nói thẳng. Đành nhìn em đi về. Giờ mới thấm bài hát ‘*Một lần nào cho tôi gặp lại em*’ của nhạc sỹ Vũ Thành An:

Một lần nào cho tôi gặp lại em
Đôi môi đó đến nay còn nồng
Một lần nào cho tôi gặp lại em
Rồi thiên thu sẽ là nhung nhớ

Sau thì mình giới thiệu Phong với Stéphane và Phong cũng làm luận văn với ông này. Sau này Phong đi làm NCS ở Queensland với GS Trần Công Thành và làm hậu tiến sỹ ở Caltech (là Học Viện Công Nghệ California nổi tiếng toàn thế giới). Mình rất ngưỡng mộ và đôi chút ganh tị. Tiếc là Phong ra đi quá trẻ vì làm việc quá sức. Nếu còn Phong thì Phong-Phính song kiếm hợp bích cũng đủ quậy tưng bừng cái võ lâm. Mình nói vậy vì trong nhóm chỉ có Phong làm nghiên cứu cùng ngành mình. Hơn nữa Phong rất giỏi. Tri thì giỏi nhưng hắn theo Hàn Quốc cứ làm gì robots, mình không biết chi cả.

Hồi đó không biết lí do gì mà anh Mỹ (mặc dù có vợ) rủ mình ra thuê phòng ở chung. Nói là ở chứ ảnh đi suốt ngày và lâu lâu mới ngủ lại. Hai anh em chơi rất hợp, nhất là đi đánh bóng bàn suốt, sau khi đánh bóng bàn thì đi ăn bún mắm, và đi ăn chè Thái. Mình thua bóng bàn hoài và vẫn nhớ giọng cười đắc thắng của ảnh. Rất dễ ghét, nhưng ảnh trả tiền nên bỏ qua. Anh có cái duyên rất lạ. Ngồi ăn chè với mình, thế mà lúc ra lấy xe có 2 em gái tới xin số điện thoại! Ảnh nói dạy mình, nhưng không thấy thực hiện lời hứa. Mà chắc mình cũng không bao giờ học được. Sau này anh Mỹ đi Hàn Quốc làm NCS và giờ là giảng viên Bách Khoa Đà Nẵng. Trong ảnh anh Mỹ đang bồng Súp–cháu mình–lúc ảnh ra Huế chơi năm 2020.


Hình 8.2: Kỉ niệm với chị Kim Anh.

Chị Kim Anh (KA) là chỗ dựa tinh thần của mình (ở hình bên, là người thứ hai từ dưới lên). Ngoại trừ mẹ mình thương mình thì chị Kim Anh là người con gái tốt nhất với mình cho tới lúc đó. Mình quen chị Kim Anh qua Đại. Hồi đó Đại vào Sài Gòn học trường Kiến Trúc thì ở nhà chị Kim Liên–là chị của chị KA. Vợ chồng chị Liên anh Bính ở chung cư Thanh Đa, và chị Kim Anh ở đó, rồi Đại vào SG cũng ở đó. Mình chơi thân với Đại nên lúc học đại học hay đạp xe xuống đó chơi. Và mình cảm tình với chị KA tức khắc. Rất khó giải thích thứ tình cảm này. Chị KA có một người bạn bị mù. Mình cứ suy nghĩ hoài, một người có thể chơi thân với một người mù thì nhất định rất tốt bụng. Và quả đúng như thế thật. Sau này nhiều người kể, không phải mình đặc biệt gì, mà chị KA tốt với tất cả mọi người. Mình được cái hơn các người bạn khác là chị KA và mình đã kết nghĩa chị em. Từ đó đến nay mình không kết nghĩa với chị gái nào cả. Tiếc là hai chị em ít đi chơi với nhau và thậm chí không có tấm hình nào chụp chung! Nhưng chị lúc nào cũng email cho mình, động viên mình và nói thẳng kiểu chị nhớ em (Hình 8.2). Và mình cần tình cảm như vậy để vượt quá khó khăn.

Tri thì ít gặp vì nó bận tối ngày! Mình không nhớ rõ nhưng Tri hình như hồi học cấp ba có giải Vật Lý toàn quốc. Mà phải công nhận Tri rất thông minh và có nhiều ý tưởng, Tri đẹp trai và cao ráo. Rồi thì mình cũng dụ nó làm việc với Stéphane. Nhưng mình không thuyết phục được nó là nên đi Mỹ hay Châu Âu. Cuối cùng Tri đi Hàn Quốc, hình như có sự giới thiệu của Thầy Tống. Tri luôn tự ti về tiếng Anh của mình. Và có thể nó không thể chờ có học bổng đi châu Âu trong khi Hàn Quốc thì rất mê sinh viên VN, đặc biệt là dân BK. Không phải mình chê bai gì HQ (về mặt chất lượng có khi cao hơn), nhưng mà lúc đó mình cứ nghĩ là làm với Tây là tốt nhất, rút ra từ kinh nghiệm làm với Stéphane thôi. Sau này thì Tri nói làm ở HQ khổ quá. Mình bảo đảm là làm TS ở Hàn không thể sướng hơn làm ở Pháp hay Hà Lan. Sau khi xong tiến sỹ Tri về làm việc cho Bách Khoa Sài Gòn, rồi vì lí do gì không biết nó qua Sư Phạm Kỹ Thuật. Một hôm Tri bảo mình phải làm việc bán phần cho một công ty để có tiền mua cái máy tính thật tốt để làm nghiên cứu. Mình nghe mà thương cho bạn. Làm nghiên cứu gì mà phải bỏ tiền túi ra như vậy.

Hồi đó mình hay qua nhà Hiền chơi. Anh trai của Hiền, anh Quang, cũng là học viên EMMC khoá 6 hay 8 gì. Hai anh em này đều là cao thủ. Anh Quang là cựu chuyên Toán Quốc Học (sau đó là sinh viên BK Xây dựng) còn Hiền, không chịu kém đàn anh, là chuyên Hoá QH nhưng sau học Kinh Tế (chắc mê làm giàu). Qua nhà chơi, được ăn ngon nè. Rồi thỉnh thoảng Hiền và mình đi ăn bún mắm nêm trên Tân Bình (cái quán gì thì quên tên). Quán này thì người Huế hay lui tới, nhớ là gặp mấy bạn trai chuyên Toán ở đó.

Thời gian này mình thỉnh thoảng về Cà Mau thăm cậu Bu và cậu Lực (là em trai của mẹ mình). Hồi nhỏ cậu Lực hay chăm mình. Cậu Bu thì cho mình nhiều thứ nhưng nhớ nhất là cái điện thoại Nokia cục gạch. Đó là cái điện thoại đầu tiên của mình. Nghe mẹ mình kể hồi xưa cậu Bu học đại học Huế thuộc hàng cao thủ và có học bổng đi Nga. Nhưng không có tiền mua vé máy bay nên ở lại. Cậu Bu là bạn học của Thầy Dũng dạy chuyên Lý QH. Có lần cậu nhờ Thầy Dũng dạy kèm mình, nhưng có lẽ mình yếu quá nên học vài bữa thì nghỉ. Lúc đó về chơi với Tí anh (con cậu Bu) rất vui. Tiếc là khoảng cách tuổi tác chênh quá sau này thì hai anh em hầu như không liên lạc.

Sau cùng thì mình cũng đứng lên được sau nỗi buồn không được đi Bỉ. Mình quyết định phải làm một luận văn xuất sắc hơn tất cả vì đó là cú chót. Đầu tiên, mình gặp Thầy Hưng xin làm luận văn với Thầy. Dĩ nhiên là Thầy không có ấn tượng gì về mình, và do đó Thầy bảo "em lấy đại một bài báo nào đó, rồi em lặp lại kết quả của họ dùng phần mềm SAMCEF". Vậy là xong một đề tài. Mình chào thầy rồi đi về, suy nghĩ rất nhiều. Nếu mình nghe lời Thầy thì mình chỉ có cái bằng thạc sỹ thôi. Mình cần hơn thế! Mình phải đi nước ngoài, và mình phải cho các bạn thấy mình không dởm đâu nhé! Làm sao đây?

Mình nhớ đến anh Hân, anh Trần Đức Hân. Anh Hân học EMMC khoá 4 và hình như là thủ khoa (vào và ra). Lúc trước mình vào EMMC 9 thì anh đang chuẩn bị hồ sơ đi Mỹ làm NCS ở đại học Austin Texas–một trường xịn–anh Hân đi bằng học bổng VEF. Mình hâm mộ anh lâu rồi nhưng chưa bao giờ nói chuyện. Lúc này thì anh đã ở Mỹ. Mình email ảnh hỏi rằng hiện nay thì trên thế giới có đề tài gì hot nhất trong ngành mình. Xin được giải thích một tí, ngành Thầy Hưng làm gọi là Cơ Học Tính Toán (tiếng Anh: computational mechanics, vì có khi dịch chưa xác). Ngành này phát triển các mô hình toán học trên máy tính để phân tích các hiện tượng cơ học. Thay vì phải làm thí nghiệm để biết kết cấu có bị phá hoại hay không, thì chúng ta có thể dùng mô hình máy tính để làm điều này. Tiết kiệm thời gian và tiền bạc. Đại khái nó là như thế.

Anh Hân (xem hình bên) trả lời rất nhanh, "Phính, là XFEM". Anh Hân là vậy, to the point. Vì anh ít nói mà mình thì nói ít nên nhiều lần cố gắng mình cũng không thân với anh được. Thế là mình đi google XFEM nhưng ở VN không tải các tài liệu này được. Mình đành phải email các ông GS làm về đề tài này. Email cho nhiều GS lắm. Không ai trả lời. Cho đến một hôm, mình đi chơi với chị Kim Anh về, vào quán net kiểm tra email thì thấy có email từ một người tên Stéphane Bordas. Stéphane nói sẽ hướng dẫn luận văn thạc sỹ của mình từ xa. Ổng ở Thụy Sỹ còn mình ở Sài Gòn. Ông chỉ đạo qua email, mình có câu hỏi gì thì email lại. Cứ như thế. Làm việc có lẽ là đúng một năm tròn thì mình có kết quả. Hồi đó không biết ai giới thiệu mình hay liên lạc anh Nguyễn Kinh Luân (lúc đó ảnh đang làm NCS ở Đại học Queensland). Anh Luân rất tốt bụng và luôn động viên mình. Cảm ơn anh Luân. Giờ hai anh em cùng đang sống ở một thành phố mà vì Covid nên chưa gặp ảnh được.

Làm một vấn đề trong suốt một năm mà không có kết quả mong muốn. Mình chưa bao giờ rơi vào tình huống tương tự. Học cấp 2/3 thì nếu bí thì nhìn lời giải. Làm luận văn tốt nghiệp đại học thì cũng không khó, vì chỉ dùng phần mềm (SAP) chạy thôi. Không hiểu cái đông lực nó mạnh đến cỡ nào mà nó đẩy mình tiếp tục trong suốt quãng thời gian đó. Nhưng mà, *có chí thì nên*. Rồi có một ngày, mình tình cờ phát hiện được cái 'bug' trong chương trình C++ của mình. Ngày hôm đó có Tri, hai đứa mừng không sao tả xiết: kết quả của chương trình mình và lời giải lý thuyết trùng khớp! Và rồi thì các bài toán khác cũng khớp luôn. Mình đi mail cho Stéphane liền (xem Hình 8.3). Nghĩ lại ổng thật kiên nhẫn với mình. Cảm ơn Stéphane!

Nguyen Vinh Phu <nvinhphu@gmail.com>  Thu, 15 Sept 2005, 18:52
to STEPHANE, stephane.bordas@epfl.ch

Hi Stephane

I am so happy to let you know that crack could grow now :)

Below is the story :

This morning, accidently, I doubted that the reason is due to the number of segments which are more than 2 . Then, I solved the edge crack problem with two approches :
1. Crack is a PiecewiseLinear of ONE segment
The SIFs are of course ok
2. Crack is approximated as a PiecewiseLinear of TWO segments
The SIFs were incorrect .

AH, the reason is the number of segments. Why?

To compute the H(x) function for a given point, the code calls

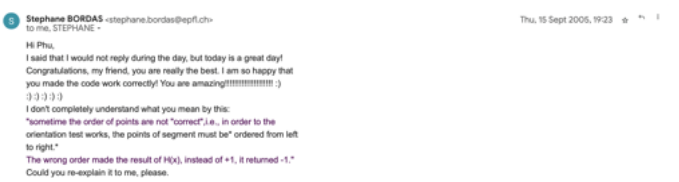
PiecewiseLinear :: giveClosestSegmentTo(Point)

This method returns correct result but sometime the order of points are not "correct",i.e., in order to the orientation test works, the points of segment must be **ordered from left to right.**
The wrong order made the result of H(x), instead of +1, it returned -1.

I corrected it and we're done :)

I am so happy ...........

(a)



Stephane BORDAS <stephane.bordas@epfl.ch>  Thu, 15 Sept 2005, 19:23
to me, STEPHANE

Hi Phu,
I said that I would not reply during the day, but today is a great day!
Congratulations, my friend, you are really the best. I am so happy that you made the code work correctly! You are amazing!!!!!!!!!!!!!!!!!! :)
:) :) :) :) :)
I don't completely understand what you mean by this:
"sometime the order of points are not "correct",i.e., in order to the orientation test works, the points of segment must be" ordered from left to right."
The wrong order made the result of H(x), instead of +1, it returned -1."
Could you re-explain it to me, please.

(b)

Hình 8.3

Đến ngày bảo vệ, hình như chỉ có vài người thôi vì những người khác bận làm ăn không làm kịp. Mình nhớ không ai đi cổ vủ mình cả. (Nghĩ cũng buồn). Nhưng mà luận văn mình đạt 19/20 cao nhất lớp. Và sau cùng, mình đã thu hút được sự chú ý của Thầy Hưng. Đứng trước mọi người, Thầy nói: đây là người tự tìm đề tài, tự tìm GS hướng dẫn và hoàn thành nó xuất sắc. Rồi thầy đề nghị mình cái job ở lại làm việc công ty Hưng Việt của Thầy (sẽ được đi Đức training). Ngày hôm đó mình rất vui. Bên cạnh là tấm hình chụp hôm bảo vệ. Và là tấm hình duy nhất mình với Thầy. Sau ngày đó mình đi biền biệt và chỉ gặp lại Thầy một lần ở trường Tôn Đức Thắng năm 2012. Mình có cảm giác mình ít nói nên Thầy không thích. Nhưng chính Thầy (và Stéphane) đã giúp mình tìm được học bổng đi Pháp. Em cảm ơn Thầy vì không có chương trình EMMC của Thầy thì em không bao giờ đi nước ngoài được.

Lúc đó anh Lê Đình Tuân (học EMMC 1 và có ngồi trong hội đồng bảo vệ thạc sỹ của mình) nói với mình là nếu muốn anh sẽ giới thiệu mình đi Hàn Quốc. Không biết vì lí do gì mà trong đầu mình (mình đoán là do lúc đọc sách/báo toàn thấy tác giả là người da trắng), khi đi du học thì chỉ có US, UK, EU mà thôi. Mình vì vậy từ chối lời đề nghị của anh Tuân và đi Pháp chứ không sang xứ sở kim chi.

Tuy đã làm được rất nhiều cho các sinh viên Việt Nam, mình thấy chất lượng của EMMC cũng có chút vấn đề, ít nhất là đối với lớp EMMC 9 mình học. Thời đó các ông GS Châu Âu qua Sài Gòn dạy thì chỉ trong vòng 1 hay 2 tuần thôi. Trong thời gian ngắn ngủi đó, ông lên lớp sáng chiều! Mình không thể nào tiêu hoá nổi, dù mình là học 100%, chỉ có vài tối là đi dạy thôi. Sau đó ông đi về (hay đi Mũi Né du lịch), còn tụi mình thì bắt đầu ăn dần dần môn ông dạy. Sau 2 tháng (không sure) thì ông gửi bài kiểm tra qua, cho mọi người thi. Xong môn này thì đến môn khác. Mình không nhớ các môn do GS Việt phụ trách thì có gì khác không.

Ai thì không biết chứ với kiểu này thì học xong mình chỉ có võ công mà không có nội công. Múa may quay cuồng, làm hoa mắt người khác thôi. Gặp phải cao thủ nội công thâm hậu thì chết tươi. Vì lí do đó mà mình nói hâm mộ Thảo (Thảo-Đức) mà mình quen ở Mỹ. Đơn giản là Thảo học thạc sỹ ở Hàn Quốc, còn mình mãi vẫn là du học tại một chổ!

Ngày 14 tháng 10 năm 2022

# Chương 9

# Chuyện đi Tây (nước Pháp, hồi một)

NĂM 2006 mình đi Pháp, nhưng câu chuyện có lẽ nên bắt đầu từ bạn Thảo. Là Thảo chuyên Toán Quốc Học mà mình thần tượng từ hồi cấp ba đó. Lên đại học mình học chung với Thảo, mình thì quý bạn mà hai người không thân thiết. Giờ mình suy nghĩ thì thấy đó là một chuyện hết sức logic. Một người con gái vượt trội về IQ so với một người con trai, thì người con gái chỉ hứng thú khi người con trai có những tài lẻ; ví dụ biết chơi một nhạc cụ, hay đá banh hay (như bạn Đỗ Đăng Doanh chẳng hạn). Tiếc là mình không có một tài lẻ nào cả!

Thảo học giỏi và kết thúc với chiếc huy chương bạc (có nghĩa là xếp thứ hai trên tổng số khoảng 300 hay 400 sinh viên gì đó). Để làm một so sánh cho vui, không ai thèm xếp hạng mình, nhưng nếu có chắc mình trong tốp 100-130, đại loại vậy. Với thành tích như vậy Thảo đi Pháp (Paris) để học thạc sỹ ngay sau khi tốt nghiệp (có lẽ là năm 2003). Sau thạc sỹ thì Thảo làm nghiên cứu sinh ở Ecole des Ponts et Chaussée–một trường danh tiếng thế giới.

Lúc biết sắp đi Pháp (cuối năm 2005) thì mình liên hệ Thảo nhờ giúp đỡ (nhà cửa, ngân hàng vv). Điều đáng quý ở Thảo là mặc dù không thân thiết Thảo vẫn giúp đỡ mình hết sức nhiệt tình. Nhưng bạn Thảo thì ở kinh đô ánh sáng Paris hoa lệ còn mình thì phải đi Saint Etienne, một thành phố nhỏ gần Lyon (có lẽ nhiều người bây giờ vẫn không biết đến thành phố này). Mình bay từ Xì Gòn đến Paris (mẹ mình phải mượn tiền dì Hằng mới mua được vé máy bay), rồi bay tiếp đến Lyon. (Không hiểu sao mình đến được Lyon vì đó là lần đầu tiên mình đi máy bay và như đã trình bày: mình đi Pháp nhưng không nói được tiếng Pháp) Còn Thảo đi tàu từ Paris đến Lyon, ở lại nhà bà con và rồi Thảo dẫn mình đi tàu từ Lyon đến Saint Etienne.

Sau đó Thảo ở lại vài ngày để chỉ cho mình đi siêu thị mua đồ ăn (lần đầu tiên) và nấu một vài món căn bản (cũng là lần đầu tiên!). Ngày Thảo quay lại Paris mình buồn thúi ruột! Vì đó là lần đầu tiên mình biết cô đơn nó đáng sợ đến thế nào. Cả thành phố này chỉ có mình thôi! Không bạn bè, không máy tính (lức đó cuối tuần không lên trường), không điện thoại, và cũng không có nhiều tiền!

Rồi dần cũng quen. Mình đi làm, được một tuần thì hết tiền! Không còn cách nào khác, phải đến gặp giáo sư (GS): "cho tôi ứng lương được không?" Mình giao tiếp bằng tiếng Anh. "Ok". GS trả lời bằng tiếng Pháp. Chỉ lúc nào thấy mình mặt đựt ra thì ông sẽ nói tiếng Anh.

Nói chung mới sang thì mình cũng chẳng làm gì nhiều (có thể nói không làm được gì cả). GS cho đi học ở Lyon và mình ở ké nhà anh Ngọc–một người rất tốt bụng–lúc đó ảnh đi đâu nên anh giao nguyên cái phòng ảnh cho mình ở khoảng một tuần. Một trục trặc xảy ra khi mình bị kỳ thị văn hoá. Trường mình làm việc là một trường nhỏ, và vì vậy không có mấy sinh viên quốc tế. Nay bổng dưng có một thằng châu Á mà lúc nào cũng mang cơm toàn mùi nước mắm! Ông GS không chịu được cái mùi này, ông nói với thư ký nói lại với mình. Hồi đó có lẽ mình xử lý tình huống này không khéo. Chuyện nhỏ này tự dưng tạo thành một khoảng cách giữa 2 thầy trò.

Nhưng chuyện quan trọng là khi sang đó mình mới biết là học bổng mình nhận được là học bổng CIFRE–một loại học bổng công nghiệp. CIFRE lấy tiền từ một công ty, rót về trường mình cho ông GS. Rồi ông dùng tiền này trả cho mình làm một đề tài mà công ty quan tâm. Vấn đề là cái đề tài này không có tính học thuật cao, và vì vậy dù mình có giải quyết được (mà chưa chắc mình đã làm được) thì mình cũng không học được gì nhiều. Mình sẽ làm gì sau cái PhD này?

Với những khó khăn, ngăn cách, cô đơn ở thành phố này, và một tương lai mù mịt, và cả sự khuyến khích của Stéphane Bordas (người hướng dẫn thạc sỹ và giới thiệu mình sang đây), mình quyết định nghỉ việc. Dĩ nhiên là chưa báo cho ông GS biết vì chưa có công việc mới. Stéphane hứa chắc chắn có học bổng cho mình sang Scotland (lúc này thì Stéphane đã xong hậu tiến sỹ ở Lausanne và chuyển sang Glassgow để làm giảng viên–lecturer). Nhưng mà mình không thích Glassgow (nghèo mà làm eo), vì mưa nhiều! Thế là mình tìm việc và thấy đại học TU Delft (đại học danh tiếng của Hà Lan mà mình đã biết đến qua chương trình cao học Việt-Bỉ) đang tuyển người. Mình đi phỏng vấn (Stéphane viết thư giới thiệu mặc dù ông muốn mình sang Glassgow–ông nói tau chưa 100% chắc chắn có tiền cho mày nên giúp mày phỏng vấn; không thể tốt và chuyên nghiệp hơn). Còn đang loay hoay chua biết nên thế nào thì bên TU Delft nói qua đây phỏng vấn, chi phí đi lại, ăn ở tụi tau lo. Ô hay văn hoá chi mà tốt thế.

Vậy là mình qua Hà Lan phỏng vấn. Đi bằng tàu TGV–tàu tốc độ cao–rất thích; đi từ Saint Etienne lên Paris, rồi từ Paris qua Brussel rồi từ Brussel đi Rotterdam. Đi lại ở châu Âu quá tuyệt. Hôm phỏng vấn thì chỉ có 3 người và mình. Họ bảo mình làm một bài thuyết trình (và mình trình bày những gì mình làm được từ luận văn thạc sỹ), sau đó họ hỏi vài câu hỏi. Mình không nhớ rõ nhưng mà hình như không có câu hỏi kiểm tra kiến thức. Họ cũng không xem bảng điểm đại học (cho thấy uy tín của EMMC) và họ cũng không yêu cầu bằng cấp tiếng Anh gì cả. Hà Lan quá tuyệt! Sau khi phỏng vấn họ bảo sẽ trả lời trong vòng một tuần. Mình lại đi tàu về Saint Etienne.

Một vài ngày sau TU Delft báo chúng tau tuyển mày. Mừng, rất là mừng, nhưng còn Glassgow và Stéphane thì trả lời làm sao? Không đến nổi éo le là phải một chọn hai như HBT vs QH nữa. (Không có women là mọi chuyện nó đơn giản; ai vẻ hồi nhỏ yêu sớm làm chi!!!) Stéphane không xin được dự án! Vậy là đi Hà Lan. Chỉ còn một chuyện; ăn nói làm sao với ông giáo ở Pháp? Thì cuối cùng cũng phải đối mặt với ông GS. Phản ứng của ổng rất bình thường. Chuyện này diễn ra như cơm bữa đó mà. Sau khi thấy mình dứt áo ra đi, ông nói OK. Và lúc mình nhận tấm check cuối cùng thì thấy luôn 2 tháng, gần 3000 euros! Sao mà tốt thế! (Mình đã dùng dạ tiểu nhân đo lòng người quân tử: cứ nghĩ là sẽ không có một xu hoặc là nửa lương).

Nhưng đâu phải muốn qua Hà Lan là qua đâu. Hồi xưa đi phỏng vấn là xem như đi du lịch, có thể đi thoải mái. Nhưng giờ mình là nhân viên của TU Delft (ở TU Delft nghiên cứu sinh xem như là người đi làm, đóng thuế cho chính phủ HL), phải cần visa Hà Lan. Để có visa HL thì phải mất thời gian: tất cả giấy tờ lúc trước đi Pháp mình chỉ có bảng dịch tiếng Pháp. Giờ phải cần bảng dịch tiếng Anh. Thời gian chờ đợi này mình làm gì và ở đâu?

Và bạn Thảo lại xuất hiện. Không nhớ rõ lắm, là ai nghĩ ra cái ý này. Nhưng cuối cùng là mình từ biệt Saint Etienne để lên Paris ở nhà Thảo. Rồi ở đó làm giấy tờ (vì đại sứ quán Hà Lan o Paris) xong thì đi HL. Chuyện ở Paris thì phải hỏi ý kiến Thảo đã.

Ngẫm lại cái sự đời thấy nó huyền diệu ghê. Hồi xưa, 1995-1996, mình qua bên trường Quốc Học (có lẽ muốn gặp người muốn gặp), đứng từ xa nhìn bạn Thảo, ngưỡng mộ. Mà mình cũng không biết sao lại là bạn này. Chuyên Toán có nhiều bạn nữ mà: Như nè, Trân nè, Trâm nè, mà mình cứ fan Thảo thôi. Có lẽ học giỏi, con gái, đội mũ lưỡi trai và mang dép như con trai nên mình chú ý. Rồi thoáng một cái chớp mắt 10 năm sau, tức năm 2006, Thảo là người giúp đỡ mình trên đất khách xứ người. Như vậy mà lồng vào một câu thơ thì còn gì bằng. Nhưng không làm được. Thật là điều đáng tiếc.

Có một chuyện vui về sự khác biệt văn hoá giữa phái nữ Ta và Tây, chia sẻ với các bạn cho vui. Có thể giờ không còn hợp thời chăng? Một hôm mình đi lang thang (một mình) ở Lyon, khi đi qua một cái cầu thì có một cô gái chạy lại phía mình giao cho trái banh. Thì mình cầm trái banh (bóng rỗ thì phải), còn cô gái thì ôm mình để cho bạn chụp hình. Chưa kịp hoàn hồn vì ... sung sướng, thì cổ bỏ đi mất tiêu. Mình không kịp nói gì! Chưa cô gái nào làm như vậy với mình cả. Tây thật là ngộ, phải không các bạn? Họ thích gì thì làm, người Việt mình nhiều ràng buộc quá.

Mặc dù ông GS đầu tiên của mình cực kỳ dễ thương, nhưng ông dễ dãi quá. Ông nói cứ ở lại với tau khi mình báo với ông là mình muốn bỏ, không có kết quả không sao! Ông có vẻ coi thường người Việt quá. Mặc dù tôi đã mừng gần như phát khóc khi ông cho tôi cái cơ hội để sang nước ông học. Nhưng tôi không sang đó để lấy cái bằng. Tôi muốn kiến thức và tôi muốn làm cái gì đó khó khó. Thế là mình bỏ Pháp sang Hà Lan, nơi mình gặp được những người bạn tuyệt vời, và cả một ông giáo dễ thương. Mỗi khi ông đứng gần cái máy pha cà phê và thầy mình tới là ông pha cafe cho mình.

Ngày 29 tháng 8 năm 2022

# Chương 10

# Chuyện đi Tây (Hà Lan, hồi 1)

VẬY là sau đúng một năm ở Saint Etienne thì mình khăn gói lên đường đi Paris. Điểm đến là ga Gare de Lyon, nơi có sẵn Thảo đón. Bước xuống tàu từ xa mình thấy không chỉ Thảo mà còn hai em gái xinh xinh. Thảo giới thiêu với mình, một em gái cũng tên là Thảo người Huế–lúc trước học chuyện Lý Quốc Học và giờ đang học Y (từ giờ mình gọi em này là Thảo nhỏ, xem hình bên, Thảo chuột ở giữa). Em còn lại tên Thư, người Đà Lạt, đang học cao học kinh tế. Không khó thì các bạn cũng đoán được mình suy nghĩ gì. Môt màu xanh hi vọng cho chàng trai độc thân! Nhưng buồn thay 2 em gái này nói thẳng: bọn em chỉ thích trai đẹp thôi và Thảo nhỏ thì đã có người yêu là một chàng kỹ sư Pháp (người mà sau này thành chồng Thảo nhỏ). Hy vọng vừa loé lên thì cũng vụt tắt. Và vì vậy mình đành sống lặng lẽ chờ ngày đi Hà Lan. Cuối cùng thì visa HL cũng xong, tháng 7 năm 2007, tức là một năm rưởi sau khi đặt chân đến nước Pháp thì mình chia tay nó.

Vậy mình được và mất gì sau khoảng thời gian thất bại này?

Nếu xem mục tiêu là cái bằng tiến sỹ thì mình hoàn toàn thất bại. Thất bại ê chề như Brazil thua Đức 1-7 ở bán kết World Cup 2014 vập. Nhưng mình không gục ngã: không phải mình mạnh mẻ gì. Đơn giản là mình đã nếm qua thất bại rồi. Chuyện nhỏ! Một may mắn cho mình là mình không để cho thời gian trôi qua mà không học được gì. Thời gian ở Pháp mình không làm được những gì ông GS giao thôi, thời gian còn lại mình học, dĩ nhiên là tự học những gì mình thấy mình còn yếu. Và có lẽ do trí nhớ mình kém hay sao mà mình quyết định ghi lại tất cả mình học vào một cái note (định dạng pdf). Cái note này chẳng chứa đựng kiến thức gì mà nhân loại chưa biết cả, vì thế bạn có thể đang nghĩ nó vô ích. Có lẽ đôi lúc mình cũng có suy nghĩ như bạn. Nhưng bạn sẽ thấy, y hệt chuyện mình học `C++` lúc trước, nó lại góp một phần quan trọng trong cuộc đời mình sau này! Xin xem Chương 53 mình sẽ nói về số phận cái note này.

Như vậy hành trang mình đem đến HL là: cái file pdf kể trên, vài trăm euros, một cái máy tính xách tay hiệu Vaio, một cái máy chụp ảnh, một cái điện thoại di động, và vài bộ áo quần. So với lúc từ VN sang Pháp thì giờ mình "giàu" hơn rõ. Có lẽ có thêm một cái nồi cơm điện nữa chăng? Và một niềm hi vọng: sau một thất bại sẽ là một thành công. Bạn có tin vào công thức thần kỳ của mình không? Với hành trang như vậy mình đến HL bằng tàu: mình đi từ Paris đến ga Rotterdam, rồi đi tàu địa phương đến Delft. Lúc đó mình 27 tuổi. Một người bắt đầu làm tiến sỹ ở tuổi 27 thì chẳng có gì là tài năng cả, một ý kiến chắc bạn cũng không thèm phản đối. Trái với lần từ VN sang Pháp có Thảo đón, lần này chả có ma nào. Ở Hà Lan mình gặp một số bạn tốt và đa phần là đàn ông! Một sự dịch chuyển có vẻ đáng lo.

Ấn tượng rõ nét nhất về Hà Lan là có rất nhiều xe đạp và nhiều nước (Hình 10.1). Người mình thì thích xe hơi, còn người ta thì thích xe đạp! Cuộc đời đúng là huyền diệu.

TU Delft (TUD)–đại học kỹ thuật Delft–đã thuê phòng cho mình, ở ngay đối diện toà nhà khoa Xây dựng khá nổi tiếng. TUD làm việc rất chuyên nghiệp. Có bà thư ký chở đi làm giấy tờ,... Cuối cùng thì lên tầng 6 để gặp GS. Ông tên là Bert Sluys, một người chỉ cao khoảng 1m95 (bạn thử hình dung mình, 1m63, đứng cạnh ông cho vui). Ông dắt mình đi chào hỏi các nhân viên và nghiên cứu sinh khác, trong đó có anh Nguyễn Tiến Dũng-giảng viên đại học Xây Dựng

Hình 10.1

Hà Nội. Sau đó ông dẫn tới phòng của mình. Chung phòng có một chú người Tây Ban Nha tên Oriol–nhìn cũng không thể nào ngờ cái chú khó coi này là anh Bé của đời mình sau này 3 năm. Đến trưa thì anh Dũng gọi mình đi ăn và mình được gặp rất nhiều người Việt Nam. Điều đặc biệt là tất cả mọi người VN đều mang đồ ăn VN có mùi nước mắm thơm phức! Đã có một sự khác biệt rõ rệt so với trường quê Saint Etienne. TUD là một trường quốc tế và vì vậy chuyện thừa nhận các nền văn hoá khác nhau là điều hiển nhiên. Sau này thì mình biết họ có phòng cầu nguyện cho mấy người Hồi giáo. Chỉ riêng phần nước mắm là thấy ok rồi!

Và quả thật sau cơn bỉ cực đến hồi thái lai. Thời gian ở Hà Lan là quãng thời gian đẹp nhất thời độc thân của mình. Cảm ơn Hà Lan, và cảm ơn Pháp đã đem mình đến Hà Lan.

Ngày 3 tháng 9 năm 2022

# Chương 11

# Chuyện đi Tây (Hà Lan, hồi 2)

TẠI sao mình cảm thấy hạnh phúc ở TU Delft (TUD)? Mình nghĩ là do những nguyên nhân sau:

- Người Hà Lan sử dụng thành thạo tiếng Anh nên mình ít gặp khó khăn trong vấn đề ngôn ngữ hơn thời ở Pháp. Và họ cũng không ép mình phải học tiếng Hà Lan; việc này tiết kiệm cho mình khối thời gian. Mình ở HL hơn bốn năm và chỉ nói được 1 câu "Dank u wel" (cảm ơn).

- Đề tài tiến sỹ của mình không liên quan gì đến giới công nghiệp. Làm cho công nghiệp thì họ muốn có kết quả, còn đề tài học thuật (cái mình phải làm là thứ này) thì không bị công ty áp lực mình đòi kết quả. Và ông GS mình cũng không áp lực gì cả. Dĩ nhiên không phải ông GS nào cũng tốt như vậy. Chuyện GS và NCS cũng như hôn nhân sắp đặt vậy, hên xui (xin xem Chương 56 bàn về chủ đề này).

- TUD là đại học hàng đầu Hà Lan nên có nhiều sinh viên giỏi làm NCS ở đây. Và mình hưởng lợi từ điều này. Như mình sẽ trình bày quý nhân của mình đang ở đây, như là chờ mình tới để giúp vậy;

- Ở TU Delft có một cộng đồng người Việt đang làm thạc sỹ và tiến sỹ khoảng tầm 30 người. Nam có, nữ có, già có (già so với mình), trẻ có, miền Nam có, miền Bắc cũng có (Hình 11.1). Miền Trung có ít. Và giờ có Huế. Trong một nhóm người đa dạng như vậy quả thật mình tìm được một vài người chơi thân. Và với mình, thế là đủ.

Hình 11.1: Cộng đồng du học sinh Việt Nam ở Delft.

- Ngoài những giờ làm việc căng thẳng thì mình có ít nhất 2 thời điểm thư giãn trong tuần. Một là buổi ăn trưa vào lúc 12h. Phần lớn mọi người đều đến tầng 6 khoa CITG (là khoa Xây dựng) để ăn trưa. Đó là lúc mình được quay về với bản ngã. Nói toẹt là được nói tiếng Việt. Hai là buổi đá banh vào thứ bảy. Cái này thì triệu đô cũng không bằng.

  Thử tưởng tượng nếu mà không có những giây phút thư giãn như vậy chắc mình sẽ bị điên! Bởi vì làm nghiên cứu sinh như húc đầu vô đá vậy. Húc tới lúc nào đá thủng thì ... nhận bằng! Sau này với sự xuất hiện của nhiều bạn trẻ anh em Delft có thêm tối bóng bàn. Và còn được đọ sức với cường quốc TQ nữa chứ. Rồi còn phải kể đá banh PS2 với Đăng, Sơn, Hoàng vv. Cảm ơn Chí Nguyễn, cảm ơn anh Tuấn ... cảm ơn Đăng, cảm ơn Khánh, cảm ơn anh Việt, cảm ơn Hoàng, Nghi và vô số các người khác.

- Cuối cùng là vấn đề muôn thủa của loài người: ẩm thực. Như mình đề cập ở trên ở DELFT có nam và có nữ. Trong các bạn nữ này có nhiều bạn thích nấu ăn, nấu rất ngon và cho mọi người ăn miễn phí. Sao mà có những con người đáng yêu như vậy? Cảm ơn chị Yến Trần, cảm ơn Phương.

Ngày 4 tháng 9 năm 2022

# Chương 12

# Chuyện đi Tây (Hà Lan, hồi 3)

MÌNH ở HL chỉ có hơn 4 năm mà có không biết bao nhiều tình nhân ... nam. Nay xin chia sẻ về những kỉ niệm này. (Vừa nghe Sỹ Phú-Tuấn Ngọc hát vừa ôn lại kỷ niệm xưa, không gì bằng).

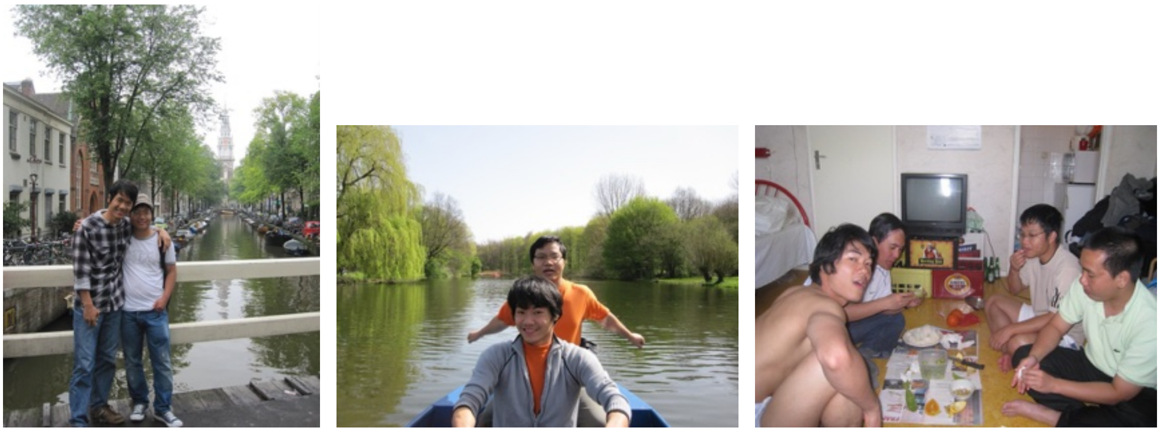
Lúc mới sang thì mình độc thân, nhưng không lâu sau đó thì mình có tình nhân đầu tiên. Đăng, một cậu người Cần Thơ, trước học Bách Khoa Việt Pháp (là thứ dữ đó các bạn), nay sang TU Delft làm thạc sỹ chuyên ngành cơ tự động. Đăng trẻ hơn mình một vài tuổi. Đăng muốn share phòng với mình để tiết kiệm tiền. Mình thì cần người nấu ăn. (Mình là nhân viên TU Delft nên có lương, nhiều hơn các bạn đi bằng học bổng VN). Thế là thành một cặp. Đăng nấu ăn, mình rửa chén, đi chợ thì đi cùng. Không nhớ Đăng nấu ăn ngon không. Đăng rất thông minh (kiểu như Thảo), lúc trước thi Đường Lên Đỉnh Olympia. Không biết có đạt vòng nguyệt quế không nhưng mà khá nổi tiếng trong các thí sinh của cuộc thi này. Mình hâm mộ Đăng là đi đâu cũng có bạn bè. Mình thích Sở Lưu Hương cũng là vì vậy. Đăng có nhiều tài lẻ, thường làm đầu trò trong những lúc mọi người tụ tập. Đăng đánh cờ rất hay (nói vậy là biết mình phần lớn là thua). Ấy vậy mà không như Tuấn Anh cấp 2, Đăng giới thiệu cho mình một người bạn gái lúc đó hình như ở Singapore. Người này sau đó ... thành vợ Đăng! Mình hâm mộ hai bạn này.

Không hiểu vì nguyên cớ gì mà chuyện tình Đăng-Phính đổ vỡ. Đăng dứt áo ra đi, Phính ở lại một mình. Nhưng cô đơn chưa được bao lâu thì P đi bước nữa dù không muốn! Số là một hôm có một anh tên Huy, người Hà Nội lớn hơn mình dăm ba tuổi đến gặp mình ngỏ ý muốn share phòng. Quả thật mình không muốn tí nào. Nhưng mà mở miệng say yes. Đó là căn bệnh cả nể của mình mà có thể cũng của nhiều người Việt.

Cũng như thời ở với Đăng, anh Huy nấu ăn, và mình rửa chén. Anh Huy (giảng viên ĐH Xây Dựng Hà Nội) hay luộc thịt heo, rồi lấy cái nước đó nấu canh cải hoặc broccoli (lúc trước ở Pháp, mình đổ cái nước này hết). Thịt heo thì, không chấm nước mắm, mà chấm với bột nêm thêm chanh. Rất ngon và dễ! Mình học được món này và sau này xài hoài chiêu này. Mặc dù chia sẻ 2 đam mê mình và anh Huy không thân thiết nên anh hay mời bạn về chơi. Trong số đó có một cậu người Hà Nội tên Chí. Mình chỉ chào xã giao Chí và Chí cũng chẳng ấn tượng gì về mình. Sau này Chí nói: anh cứ im lìm không nói gì cả, ai thích được! Đôi lúc mình muốn có thể nói nhiều được. Nhưng đó chỉ là một giấc mơ. Mình thậm chí không thể thò lưỡi ra và uốn được cong nó. Thằng con mình làm một cách dễ ẹt! Rồi anh Huy cũng ra đi. Hình như anh xong NCS nên về. Thế là mình lại kiếm bến đỗ mới. Lúc này mình thích ở chung rồi (vì khỏi phải nấu ăn là chủ yếu). Và Chí rủ mình qua nhà Chí ở!

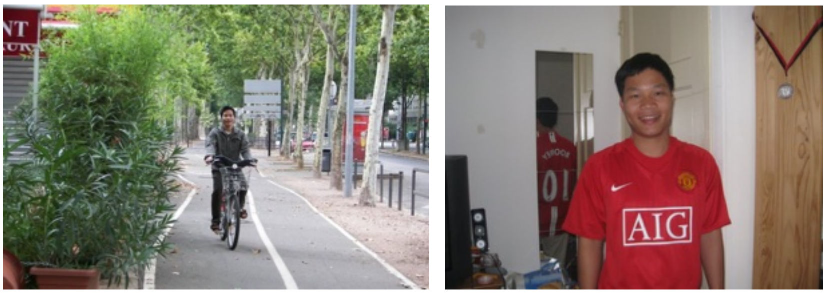
Chí sinh năm 1983 và là giảng viên rất trẻ của trường ĐH Thuỷ Lợi Hà Nội. Lúc đó Chí đang làm thạc sỹ về cơ học đất. Mình không biết thành tích học tập của Chí nhưng hình như có giải Tin học thời sinh viên. Nhưng mà mình hâm mộ Chí là cậu này cái gì cũng biết: kiếm hiệp, chính trị, quân sự, lịch sử, gái gút, tất tần tật. Một điểm đặc biệt là Chí rất rất nhiệt tình. Nhiệt tình đến nỗi mà party nào ở Delft Chí đều được mời. Và vì mình ở chung với Chí, mình ăn ké không biết bao party như vậy. Đặc biệt là chú em này rất chi là đẹp trai, cao và hào phóng. Toàn những thứ mình không có. Không phải có do là con trai một không mà mẹ Chí hay gọi điện thoại qua hỏi, kiểu hôm nay con ăn chưa, mặc áo có ấm không. Mẹ mình lúc mình mới sang Pháp cũng như vậy. Tình mẹ thương con đúng là vô bờ bến. Ba mình thương mình, nhưng không hỏi một câu. Hình 12.1 là vài tấm hình kỉ niệm với Chí.

Trước lúc mình sang ở với Chí mình khoảng 45-50 kí. Vậy mà ở với cậu này một khoảng thời gian thì mình trở thành 66 kí! Và từ đó không ốm được nữa (Hình 12.2)! Thời gian với Chí rất đẹp vì lúc đó ở TUD đón rất nhiều bạn trẻ từ miền Tây (Đồng, Thuận, Huy...). Và tất cả ở chung một chung cư hết. Hầu như tối nào cũng tụ tập ăn uống, nhất là bia. Có lẽ vậy mà bụng mình ... to lúc nào không hay. Vui nhất là mùa hè đá banh xong rồi vào uống bia tươi. Không gì bằng. Mình học được một điều ngạc nhiên về người Hà Nội lúc ở với Chí. Chuyện là cuối tuần là mọi người ra sân bóng (cỏ nhân tạo đẹp miễn chê) đá banh. Thế nhưng có rất nhiều người (đặc biệt là các bác–mình học được từ này lúc sang HL) không muốn đi ra sân sớm. Họ sợ nếu không đủ người thì họ phải mất công đi về! Họ tính toán ghê thật. Lúc đó Chí là người gọi điện thoại giục các bác này. Trên điện thoại, mình nghe Chí nói: "anh đi đi nhé, em 5 phút là tới sân rồi ạ". Mà mình ở ngay nó mà, sao 5 phút tới sân được? Sau vài lần như vậy thì mình hiểu. Mình thì chỉ muốn ra sân càng sớm càng tốt.



(a) (b) (c)

Hình 12.1: Một vài tấm hình ghi lại kỷ niệm với Chí và anh em trẻ ở Delft.

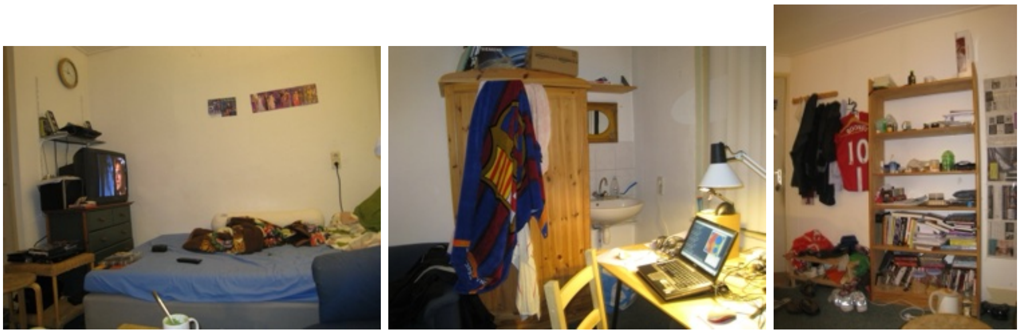



(a) ở Pháp, 2006 (b) ở Hà Lan, 2008

Hình 12.2: Một sự khác biệt rõ rệt về cân nặng.

Chuyển nhà nhiều nhưng không vất vả vì phòng cho thuê đều furnished, nghĩa là đồ đạc tương đối đầy đủ. Người thuê chỉ cần đem đồ dùng cá nhân vào là ok ngay. Thường thì tụi mình dùng xe đạp chuyển nhà. Nhưng Chí thì dùng xe ba gác. Chí có rất nhiều đồ, nhiều khi mua về không biết dùng làm gì. Những lần chuyển nhà lúc đó rất vui. Không như bây giờ, nghe chuyển nhà là oải củ tỏi.

Vui và khá hợp là thế, mà Chí cũng chia tay mình. Chí ra ở một mình (có thể lúc này anh chàng có người yêu?). Thế là mình phải đi thuê phòng và ở một mình. Thời gian này mình tự phải nấu ăn. Nhưng mà đã có món bảo bối thịt heo luộc của a Huy nên không sao. Ở một mình được cái tự do. Mình mua TV, PS2, phim về coi, tha hồ. Lần đầu tiên được xem phim trong chính nhà (phòng) của mình. Ở tuổi 28, 29! Lúc đó mình luyện phim truyền hình Mỹ với 2 mục đích: (1) là giải trí và (2) học nghe tiếng Anh. Hồi đó mê Ngã rẽ cuộc đời với Katie Holmes (Hình 12.3). Cái phòng mình ở nằm trong một căn nhà của một bà HL. Bà cho thuê nguyên nhà. Phòng cạnh mình có chú người Ý ở. Thỉnh thoảng mình cũng có xả giao với chú này, nhưng không hợp gu. Có một chuyên vui thế này. Hôm nọ bà chủ nhà tới và tình cờ gặp mình, bà bảo: "dọn cái tủ lạnh cho sạch, nhớp quá". Mình thì chúa lười cái khoảng này, nhưng mà bị nhắc thì nổi máu nóng lên. Dọn sạch cả cái tủ lạnh. Rất là happy vì mình làm việc tốt, thì thấy chú người Ý đi ra cái tủ lạnh tìm thức ăn. Mình nghi nghi là có gì không ổn. Không lẽ trốn, thì mình đi ra hỏi có chuyện gì. Nó hỏi có thấy thức ăn của nó trong tủ lạnh không. Mình thật thà bảo tau dọn tủ lạnh vứt hết rồi. Mà còn trong thùng rác kìa, tới xem sao! Mình biết lở lời, thấy hắn mặt đỏ phừng phừng đi vào phòng. Hay ghê, vậy mà không đánh mình. Tí nữa thì thấy có nhiều người trong phòng nó đi ra. Thì ra ba mẹ nó sang thăm nó, và nó chuẩn bị nấu ăn cho nhà nó! Xin lỗi nhé.



Hình 12.3

Độc thân được một thời gian thì lại có người muốn ở chung. Lần này là anh Tuấn. (Thật ra trước đó mình hay qua nhà ảnh chơi vì ảnh có đứa con trai dễ thương mà mình thì thích con nít; Hình 12.4) Mọi người gọi anh là Tuấn Răng. Anh Tuấn cũng là giảng viên Đại học XD Hà Nội (bộ môn vật liệu xây dựng). Anh Tuấn là người rất tốt bụng. Ảnh là người chỉ mình "nhìn vào điểm tốt và quên điều xấu của người khác". Nhờ nó mà mình bớt sân si. Cảm ơn anh Tuấn nhé.

Hình 12.4: Kỉ niệm với anh Tuấn và với Pooh. Lúc đó chưa có con không hiểu sao đặt tên này.

Ở một thời gian thì anh Tuấn chuyển ra, mình lại sống một mình. Cùng lúc thì Chí thuê phòng ở đối diện nhà mình, ngăn cách bằng một con kênh nhỏ đặc trưng HL. Mà chủ nhà chính là bà chủ nhà của mình. Té ra bà này giàu và có nhiều nhà cho thuê. Thế là hai người ở hai nhà, nhưng tới giờ ăn thì mình chạy qua nhà Chí ăn ké. Đi bộ khoảng năm phút, qua một cái cầu đá nhỏ nhỏ là tới. Ở HL mọi thứ rất thuận lợi vì là nước nhỏ xíu. Mà đừng hỏi dân số, diện tích hay lịch sử HL, mình không quan tâm! Khi đến HL thì mình chỉ có một mục tiêu là cô siêu mẫu (tức là cái bằng tiến sỹ) mà thôi. Mình không có bộ nhớ cho những thứ khác, dù chúng rất là thú vị. Không như Đăng và Chí có thể thành thạo nhiều thứ. Mình ở đây cho tới khi xong NCS tháng 11 2011.

Vậy là mình ở qua 3 nhà với 4 người tình: Đăng, anh Huy, Chí và anh Tuấn. Cảm ơn mọi người!

Rồi mình chia tay Chí đi Mỹ làm hậu tiến sỹ. Thời gian ở Mỹ là sự lặp lại của thời gian ở Pháp. Một thất bại toàn tập (dù vậy mình cũng kịp làm quen Thảo-Đức 2 đứa rất nice). Sau Mỹ thì mình về VN cưới vợ rồi đi Anh làm việc với Stéphane. Đùng một cái mình đi Úc làm hậu tiến sỹ. Nhưng như một sự sắp đặt của số phận Chí cũng qua Úc và làm hậu tiến sỹ cùng một trường với mình ở thành phố Adelaide–miền Nam nước Úc! Đó là năm 2014. Sau khoảng 2 năm xa cách Chí và mình lại gặp nhau. Như chừng đó chưa đủ, sau khi Chí rời Adelaide lên Melbourne làm việc ở ĐH Monash thì mình cũng tìm được việc ở chính Monash!

"Anh cứ im lìm không nói gì cả, ai thích được!", Chí thì nói vậy về mình. Còn mình thì cũng không ấn tượng mạnh về Chí. Thế đó, 2 người cứ gắn bó với nhau qua bao thăng trầm. Tiếc là Chí đã về VN. Cảm ơn em Chí vì tất cả. Gia đình anh thật sự nhớ em.

Người cuối cùng mình muốn nhắc đến là Trung, Lê Hải Trung, giảng viên ĐH Thủy Lợi như Chí. Mình thích Trung bởi vì mình là dân nhà quê, áo quần không có phong cách chi cả. Trung thì ngược lại, dân Hà Nội có phong cách sành điệu (Hình 12.5). Thế là Trung dẫn mi đi mua sắm. Kết quả là nhiều người không nhận ra mình thật (hình bên dưới mang quần bò, dày Converse là áo quần ông Trung chỉ cho mua). Cảm ơn Trung về những bài học thời trang, về những bữa ăn với Trung, Phương, Tâm, chị Yến.

(a) Với Trung ở Keukenhoff

(b) Thời trang Hải Trung

Hình 12.5

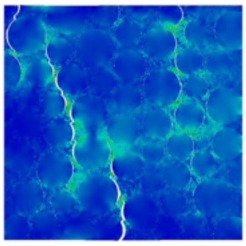
Ngày 28 tháng 10 năm 2022

# Chương 13

# Chuyện đi Tây (Hà Lan, hồi kết)

MỌI chuyện đều đang tốt đẹp ở Hà Lan trừ cái chuyện chính: công việc. Mình nhớ lúc bảo vệ xong ông GS phát biểu đôi lời về mình, trước tất cả mọi người. Ông nói đại ý là (vì ông biết mình mê đá banh như ông) quá trình tiến sỹ của mình có thể xem như một trận bóng đá. Hiệp một thì chậm chạp không có gì tiến triển, nhưng còn hiệp hai thì tăng tốc, làm việc rất hiệu quả. Ông dùng trận chung kết C1 năm 2005 giữa Liverpool-AC Milan làm ví dụ. Và ổng nhận xét chính xác. Trong hai năm đầu (2007 và 2008) chủ yếu là mình đọc tài liệu, học những thứ chưa biết (tự học), và tìm cách giải quyết vấn đề. Nhưng hoàn toàn bó tay. Đã có lúc mình nghĩ tới bỏ cuộc, nhưng may cho mình là đã bỏ cuộc một lần rồi. Kkông thể có lần thứ hai, không thì nhục lắm. Cũng may là đời sống tinh thần ở Delft rất tốt nên mình trụ lại được.

Chỉ sau khi có bước đột phá vào cuối năm 2009 và đầu năm 2010 thì từ đó mọi chuyện mới êm đẹp. Còn làm sao có được bước đột phá này thì sẽ trình bày sau ở Chương 19.



Đề tài tiến sỹ mình làm có thể gọi là đề tài cơ bản. Tức là nếu có làm xong thì cũng chẳng có ứng dụng (ít nhất là mình nghĩ thế). Nhưng đó không phải là vấn đề của ông GS và của mình. Ở các nước phát triển thì ngoài việc đầu tư vào các nghiên cứu có tính ứng dụng thì nghiên cứu cơ bản cũng được xem trọng. Đề tài của mình thuộc chuyên ngành gọi là Cơ học tính toán như đã đề cập ở Chương 8. Mình theo Thầy Hưng và Stéphane đi theo cái hướng này. Hình bên cạnh là một mô phỏng phá hủy của vật liệu bê tông: các khe hở chính là các vết nứt.

Hình 13.1: Đồng nghiệp ở Đại học kỹ thuật Delft, TU Delft.

Ông GS mình, ông Bert Sluys, hướng dẫn rất nhiều NCS. Lúc mình đến thì trong nhóm có anh Nguyễn Tiến Dũng, có Peter Moonen (người Bỉ), có Oriol Lloberas Vall (Tây Ban Nha, mình ngồi cùng phòng với chú này), có một cô người Trung Quốc Xuming Shan, có Ronnie Pedersen và Kristian (cùng là người Đan Mạch), có Frank (người Đức), có Mehdi Nikbakht (người Iran), và cuối cùng là Frans var der Mer (người Hà Lan) (Hình 13.1). Mọi người chơi rất vui, nhất là Peter, cứ tầm 2, 3 tiếng là đi từng phòng rủ mọi người ra uống cà phê chém gió. Vào ngày sinh nhật của người nào đó thì tổ chức đi ăn. Có lần vào nhà hàng Ấn độ và phải ăn bằng tay. Nói chung thì mình thích làm việc với Tây nhưng còn lại thì mình chơi chủ yếu là với người Việt. Đơn giản là vì mình không biết văn hoá tụi nó nên không tham gia được, hơn nữa mình ít nói. Nhưng có một lần mình đi theo tụi nó cho biết. Roonie mời mọi người đến nhà ăn vì có bạn gái từ Đan Mạch sang. Ăn uống xong thì tụi nó lấy bia ra vừa uống vừa tám. Không biết nói gì mà gần tới sáng. Đặc biệt nhất là nhậu mà không có mồi gì hết!

Có vẻ người Hà Lan tách công việc và gia đình hay sao mà mình không hề biết tí gì về ông GS như tuổi tác và gia đình. Và suốt thời gian ở đó mình chẳng được mời về nhà chơi. Người Pháp thì khác. Mình nghe Thảo kể là GS mời về nhà ăn tối nhiều lắm. Còn mình thì cũng được mời về một lần. Nhà ông GS (bên Pháp) của mình có cả hồ bơi, và bảo mình đừng ngại xuống bơi. Nhưng mà ai dám khi hàng họ í ẹ quá.

Quay lại ông GS Hà Lan. Mình đoán ổng khoảng tầm 45-50 tuổi lúc đó. Và ổng đã nổi tiếng trong ngành (vì ổng có sư phụ rất là nổi tiếng). Có thể ví ông sư tổ của mình là Trương Tam Phong, thì sư phụ mình là Tống Viễn Kiều, còn mình là đệ tử của Tống Viễn Kiều. (May mà không phải là con ông này). Và vì lí do gì mình không biết, ông không còn tự mình làm nghiên cứu nữa. Ổng chỉ viết đề tài xin dự án, tìm NCS về làm, đọc báo chí để cập nhật tình hình (xem có võ công nào mới không chẳng hạn). Nhưng đã qua cái thời ông vò đầu bức tai suy nghĩ, ngồi lập trình ... Có nghĩa là "Phính, có bài toán này nè, làm xong thì có cô người mẫu, làm không xong thì không có gì. Tau đã có người mẫu rồi. Hehehe.". Ngoài ông GS này thì mình còn có một người đồng hướng dẫn. Ông này tên Martin Stroeven trẻ hơn ông kia, chưa là GS và hình như giờ vẫn chưa là GS. Vì ông này thích chơi hơn là làm việc. Nhưng mà ngoài chuyện này ra (do mình xui, gặp ổng không đúng thời điểm thôi), còn lại ông Sluys là một quý ông đích thực (xem Chương 55 để hiểu sao mình nói vậy).

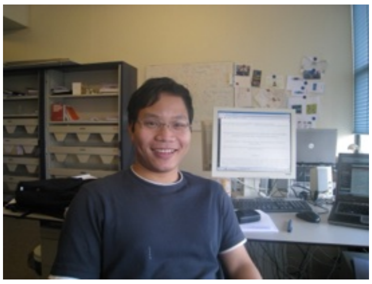
Năm 2010 là một năm may mắn cho mình. Đầu năm đó (tháng một) thì mình đi thăm Thảo. Tiếng là Thảo sẽ giới thiệu cho mình ai đó, nhưng mà mình vẫn luôn muốn thăm Thảo. Lúc này Thảo đã lập gia đình với Jérôme và có bé Chloé rất đáng yêu. Jerome rất hiền, hiếu khách và chiều vợ. Hình như các ông Tây hơn mấy ông Việt Nam cái khoản này. Mình nhớ mãi Thảo thích trái cây trong khi Jérôme thích sữa chua. Thảo nói: "ngu", Jérôme cười cười. Tiếc là Chloé còn nhỏ quá nên không có tấm hình nào với cháu cả. Thảo nhỏ cũng xuống chơi và tặng mình cái khăng quàng cổ (xem Hình 13.2). Cảm ơn Thảo nhỏ. Có rất ít bạn gái tặng mình quà nên mình quý cái khăng này. Giờ hình như vẫn còn giữ, tuy nhiên ở xứ Kanguru thì ít có cơ hội xài mấy thứ này.

Hình 13.2: Kỉ niệm với Thảo và Jérôme. Cảm ơn vì lòng hiếu khách.

Từ Pháp về thì mình đi lên thành phố The Hague tham dự party năm mới do Đại Sứ Quán Việt Nam tại Hà Lan tổ chức. Và, cho lần đầu tiên trong đời, mình thắng xổ số mua vui. Dù phần thưởng chỉ là một cái iPod trị giá 50 đồng euro, mình nghĩ rằng năm 2010 sẽ là năm may mắn của mình. Và quả đúng như vậy thật.

Mình nộp bài báo đầu tiên vào tháng một và chỉ một tháng sau là bài thứ hai. Tháng 3 thì mình tham dự hội nghị Euro-C ở Áo, hội nghị tổ chức ở một khu nghĩ dưỡng trượt tuyết quá đẹp. Và mình lần đầu tiên được trượt tuyết, nhưng mình không hợp với môn này. Không thích tí nào. Tháng năm thì đi Paris dự hội nghị ECCM và chính ở thành phố này mình gặp Stéphane lần đầu tiên. Như vậy là sau sáu năm quen biết mới gặp mặt. Paris thì mình luôn thích đi. Không bao giờ chán mà thích nhất vẫn là quận 13 có nhiều đồ ăn. Bảo tàng Lourve hay nhà thờ Đức bà không bằng. Tháng 6 thì bài báo thứ nhất được chấp nhận. Thật là một cảm giác khó tả, vui mừng khôn xiết.

Đạn đã thông nòng. Và cuối tháng 6 thì mình về Việt Nam chơi.



Tháng 8 thì mình quay lại Delft và sửa bài thứ hai. Tháng 10 thì bài đó được chấp nhận xuất bản. Một tháng sau thì mình xong bài báo thứ ba. Và mình gộp ba bài báo này thành một quyển luận văn (bản nháp) vào tháng 12. Lúc này thì mình biết chắc mình đã rất gần cô siêu mẫu rồi. Nên rất là thoải mái. (Nhìn hình bên, chụp trong phòng làm việc là các bạn hiểu rồi). Và thế là mình đi du lịch Ý trong vòng 9 ngày. Và là đi du lịch một mình, một việc mình chưa làm bao giờ trước đó. Tại sao lại là Ý? Số là, Chí đang qua trường Padua học một khoá ngắn hạn, và Chí gợi ý mình sang chơi, ở phòng Chí khỏi tốn tiền khách sạn. Thế là đi. Ý thì hoàn toàn khác hẳn Hà Lan. Như là người dân không nói tiếng Anh nè, kiến trúc thì tuyệt đẹp, thức ăn thì ngon. Mình ở Padua, rồi đi tàu tham quan Venice, Milan, Florence, Pisa, Verona (Hình 13.3), những thành phố gần Padua. Rất thích Venice vì nhiều nước, nhiều hơn cả Hà Lan! Mà mình không có kế hoạch gì cả. Lúc đầu còn mua bản đồ nhòm nhòm, rồi hoa cả mắt, vứt luôn. Mình đi đại: thấy đường là bước, thấy cầu thì qua, thấy cảnh đẹp thì chụp, thấy người đẹp thì nhìn. Chụp cả mấy trăm tấm hình, về úp lên Facebook hết. Đúng là độc thân!

Hình 13.3: Kỉ niệm đi chơi Venice, Milan, Florence, Padua với Chí.

Năm 2010 cực kỳ may mắn, có lẽ lấy từ bạn Thảo, thì năm 2011 cũng đẹp chẳng kém. Trong 2 năm đầu mình chỉ có hai bài báo thì trong năm 2011 này mình viết đến 4 bài. Chuyện này cũng như tiền đạo, mỗi khi đã thông nòng, thì ghi bàn liên tục. Hoặc như phụ nữ sinh con, đứa con đầu lòng thì rất khó khăn, nhưng sau đó thì phọt phọt, muốn bao nhiêu cũng được. Thật tình trong số 4 bài báo đó mình chỉ tâm đắc một bài thôi. Nhưng mà nếu muốn tồn tại thì mình phải tham gia cuộc chơi; người ta có câu nói rằng *publish or perish* (xuất bản hoặc diệt vong)! Để xin việc thì phần lớn các trường đại học trước hết nhìn vào số lượng bài báo công bố.

Không còn khó khăn, không còn những đêm thức trắng nữa, năm 2011 là năm của ăn chơi, đúng nghĩa luôn. Mình đi chơi liên tục và đã tham quan các cảnh đẹp của Hà Lan (Hình 13.4). Đơn cử là trong một khoảng thời gian ngắn mà đi chơi vườn hoa Keukenhoff xinh đẹp đến vài lần. Thật ra mình không biết hoa gì và hoa gì trong cái vườn đó cả. Chẳng qua ở đây quy hoạch đẹp quá, rồi không khí trong lành của mùa xuân, rồi tiếng nhạc du dương, rồi đi cùng người đẹp nữa. Đi vườn hoa lúc nào cũng là tháp tùng người đẹp, có lúc cả người đẹp Lê Hải Trung!

Hình 13.4: Đi chơi thắng cảnh ở Hà Lan năm 2011.

Rồi nhờ anh Nguyễn Đại Việt (người Hải Phòng) mà mình đi xem trực tiếp C1 trận đấu giữa Ajax Amsterdam và Real Madrid. Lúc đó Real Madrid có Cristiano Ronaldo. Và đó cũng là lần đi xem bóng đá thứ hai ở châu Âu. Lần đầu đi xem với Chí trận giao hữu của đội Hà Lan. Mình thấy cổ động viên Ajax ngồi mà có xem gì đâu, phải để ý xem làn sóng người đã lan tới mình chưa, để đứng lên. Xong thì ngồi xuống, một tí sau thì làm lại! Mình không là fan thì không hiểu được. Thôi, có một lần thấy Ronaldo bằng xương bằng thịt cũng vui vui.

Nhưng cũng có chuyện buồn. Năm đó mình đón tiếp hai bạn từ Pháp sang chơi Hà Lan. Người đầu tiên là Minh. Vì Minh là bạn Thảo nên mình phải tiếp đón đàng hoàng. Nhưng Minh chỉ cần ngủ qua một đêm thôi. Đơn giản. Mình tối hôm đó chỉ việc qua bên nhà Chí (phía bên kia con kênh thôi) ngủ. Minh đi mô tô chở bạn gái đến. Nhìn Minh rất phong độ kiểu ngang tàng như Kiều Phong chứ không kiểu công tử bột như Đoàn Dự. Minh để xe ở ngoài nhà, khoá lại, rồi ngủ qua đêm ở phòng mình. Sáng thức dậy, mình từ nhà Chí nhìn sang thì không thấy chiếc mô tô đâu cả. Không lẽ Minh không lời từ biệt ta? Mình đi qua rồi vào phòng gõ cửa thì thấy có Minh. Mình hỏi xe mô? Minh chạy ra ngoài xem, hoá ra xe đã bị ăn trộm. Mình thấy xấu hổ ghê dù không là người Hà Lan. May mắn là đi báo cảnh sát và Minh có đóng bảo hiểm nên bảo hiểm trả lại. Con mô tô đó nghe nói cũng mắc lắm. Mình đơn giản muốn làm người tốt mà cũng gặp khó khăn.

Người thứ hai là bạn Chi. Chi lúc trước học chuyên Toán Quốc Học với Thảo và Như, Chân. Sau đó học Khoa học tự nhiên khoa Toán. Lúc đó Chi đang làm NCS về Toán bên Pháp. Lại là bạn Thảo nên mình phải tiếp đàng hoàng thôi. Cũng mong là mình đã tiếp bạn Chi tạm gọi là được. Trong Hình 13.5 Chi đứng giữa trong hình có ông Einstein. Rồi sau đó không biết vì lí do gì mà mình không chơi với Chi nữa. Thành ra mất một người bạn! Xin lỗi Chi nhé, có khi mình cũng điên điên.

Hình 13.5: Đi chơi thắng cảnh ở Hà Lan năm 2011.

Vào khoảng tháng 4 hay 5 thì ông GS nói cho mình bảo vệ. Ôi mừng lắm, thứ nhất nhiều người làm trước mình mà ông vẫn chưa cho bảo vệ. Hơn nữa bảo vệ ở Hà Lan chỉ là hình thức mà thôi, được bảo vệ là xong rồi. Làm thật hoành tráng, nhưng cái bằng đã có sẵn, bảo vệ xong vô là kí tên thôi. Rồi thì mình phải hoàn thiện bản nháp quyển luận văn (mà mình đã viết từ năm 2010). Sau đó hai ông Thầy sửa. Rồi mình chỉnh sửa lại nó theo nhận xét của hai ổng. Sau khi ông ưng ý thì ông bảo in cho tau khoảng 200 quyển. Dĩ nhiên là tiền của trường nên ông mới hào phóng như vậy. Vậy là phải liên lạc nhà in, rồi phải tìm cho được cái bìa sao cho đẹp. Mất bao thời gian! Cuối cùng, bìa chỉ là màu trắng (xem hình) vì không nghĩ ra được cái gì có tính nghệ thuật cả. Lúc đó Hải Vân bạn cấp hai là kiến trúc sư ở bên Mỹ cũng bay vào giúp.

Rồi cái gì phải đến cũng đến. Mình bảo vệ vào ngày 26 tháng 9 năm 2011 (cái ngày thì ba mình nhắc mới nhớ). Trước đó là có đá banh chia tay ... Rooney Delft (mình mê MU và hay mặc áo Rooney nên tự gọi mình như vậy), vì sau khi bảo vệ là mình chia tay Hà Lan luôn. Tiếc là không có tấm hình nào party này cả. Vào hôm bảo vệ, rất may hôm đó nhiều bạn bè rảnh nên tới tham dự, lên dây cót cho mình (Hình 13.6). Dù biết là hình thức, nhưng mà không có ma nào đi xem thì cũng buồn. Có cả chụp ảnh và quay phim. Mọi người rất nhiệt tình và ai Việt Nam bảo vệ đều được ưu tiên này. Còn phải đi thuê bộ đồ chưa biết đến bao giờ với tuxudo gì đó. Rất ngộ. Hôm đó phải nhờ Chí và Trung mặc giúp.

Hình 13.6: Lễ bảo vệ luận án tiến sỹ của mình. Rất cảm ơn có nhiều bạn bè tới cổ vũ.

Hội đồng giáo sư thì có tám người (Hình 13.7), trong đó phe ta chỉ có 2 người (là hai GS hướng dẫn) còn lại 6 người kia là phe địch (mặc dù ông GS đã lựa những *địch nhân* này). Trong 6 người này thì phải có 2 GS không phải đang làm việc ở Hà Lan. Trường hợp của mình thì 2 GS này là Stéphane (là ông giúp đỡ mình từ thời thạc sỹ đó) và một ông bên Anh sang. Trình tự của buổi bảo vệ là như thế này. Trước tiên, mình sẽ giới thiệu về luận văn của mình, cho bạn bè và đồng nghiệp nghe chơi. Lúc này không có GS hội đồng tham dự. Sau đó thì các GS vào và bắt đầu tấn công mình ... một hồi chán chê thì xong. (Mình đùa tí thôi, các ông giáo này chỉ có 60 phút thôi). Sau đó ông Sluys đi vào phòng để kí tên ổng lên bằng, có chữ ký của ông GS hiệu trưởng nữa thì phải. Sau đó ông đi ra trao bằng và phát biểu đôi lời về mình[*]. Sau đó là ra ăn uống linh tinh và chụp hình lưu niệm.

Hình 13.7: Bảo vệ xong và nhận bằng. Cái ông cao nhất đưa cái ống màu đỏ là ông GS Sluys. Bên trong là cái bằng (hình phải). Hình trái: ông đứng bên phải mình thấp thấp mang kính là Martijn Stroeven–hướng dẫn 2 của mình.

Cách buổi bảo vệ mấy hôm thì mình đến gặp ông GS đề nghị ông là sẽ viết thêm một bài báo nữa. Ổng nói “chúng ta đã viết hết những gì cần viết rồi, không nên tham lam”. Nhưng cuối cùng thì mình thuyết phục được ông GS. Lúc bảo vệ ông nói thường thì GS ép sinh viên viết báo, còn thằng Phính thì ép GS cho viết báo. Thêm một kỉ niệm vui nữa. Chuyện thế này. Năm 2011 mình đi dự hội nghị cơ học toàn Hà Lan (chỉ có người đang làm việc ở HL mới được tham dự). Sau khi báo cáo xong thì mình về sớm để viết bài báo thứ tư. Không ngờ là mình được giải "báo cáo tốt nhất trong một session". Nhưng vì mình không ở đó nên trao lại cho người khác.

Như vậy là sau 4 năm 2 tháng mình tốt nghiệp tiến sỹ, ngày 26 tháng 9 năm 2011. Bò hoài rồi cũng gặp được cô nàng siêu mẫu khó tính. Khó tình thì là thật, nhưng mà siêu mẫu cũng không đẹp lắm ☺. Hôm chia tay ông Giáo, mình như không cầm được nước mắt. Cảm ơn Bert! Cảm ơn Hà Lan, đất nước mà trước đó mình chỉ biết đến qua bóng đá tổng lực với Johanne Cruyff hào hoa. Đất nước mà mình không nghĩ sẽ đến làm việc. Cảm ơn cả những người bạn Việt Nam dễ thương vì những giây phút thư giãn, những party ăn uống, những trận đấu bóng, những chuyến đi chơi.

Thôi mình xuống núi nhé. Đã có võ thì trong truyện chưởng là xuống núi, vào võ lâm quậy thôi. Mình làm y chang vậy và điểm đến là nước Mỹ. Trước khi xuống núi, Angelo Simeone (là GS người Ý trong nhóm của GS mình) gọi mình sang phòng ông và dặn:

[*]Video buổi bảo vệ mình up lên youtube.

*"Phính, làm chi thì làm nhưng đừng để mất mặc TU Delft nhé."*

Ngày 19 tháng 11 năm 2022

# Chương 14

# Chuyện đi Tây (Mỹ)

NHƯ vậy là sau 4 năm 2 tháng mình tốt nghiệp tiến sỹ, ngày 26 tháng 9 năm 2011. Trước đó thì mình đã phải nghĩ tới tương lai sau TS, tiếng Anh là postdoc và tiếng Việt là hậu tiến sỹ (HTS). Hồi đó trong đầu mình chỉ có nước Mỹ mà thôi. Không biết tại sao! Có lẽ các nhân vật nội công thâm hậu, võ công siêu quần bạt vía phần lớn tụ tập ở đó cả. Muốn biết mình thuộc cỡ nào không có chỗ nào tốt bằng. Chuyện này giống như cao thủ Tây Tạng–không chịu sống yên ổn ở đó–mà cứ vào Trung Nguyên, để chuốc lấy thất bại ê chề. Thật ra không phải cao thủ Trung Nguyên tài giỏi mà đơn giản là tác giả đến từ xứ này.

Thế là mặc dù ông GS đã giới thiệu cho một vị trí HTS ở Thuỵ Điển mình đã từ chối và lao vào giấc mơ Mỹ. Lúc này vì tưởng là mình có ít võ công mình toàn xin việc GS xịn ở trường đỉnh, kiểu như Stanford, UC Berkley[†]. Mà buồn thay không ai thèm trả lời. Thỉnh thoảng có vài người trả lời thì email ngắn ngủn: tau không có tiền. (Giờ mình cũng hay trả lời y chang như vậy cho mấy chú làm việc với mình. Mà mình thì không có tiền thật!). Nhưng mà cuối cùng thì cũng có người hồi âm. Có ba người đồng ý.

Một người là GS Alain Needleman. Ông này thì là một huyền thoại trong ngành mình. Cỡ như Trương Tam Phong phái Võ Đang vậy. Chưa kịp mừng thì đồng nghiệp bảo: "ai làm với ông này cũng tự bơi hết!" Thông tin này cộng với việc ông GS này lúc đó cũng gần 70 nên cuối cùng mình từ chối ổng. Nếu được làm lại mình sẽ chọn Needleman; vì mình sẽ học được nhiều từ một cây cổ thụ của ngành. Đáng tiếc, thật là đáng tiếc. Người thứ hai là một ông GS ở UC San Diego. Ông này thì chỉ cỡ Du Liên Châu, Du nhị hiệp trong Võ Đang thất hiệp thôi. Ông có một dự án với công ty Honda của Nhật. California! Vậy mà mình cũng từ chối. Không biết mình lúc đó nghĩ cái gì nữa.

Hai ông GS kia là dân Mỹ chính cống, da trắng phóc như ... Ngọc Trinh. Ông thứ ba thì da đen thui (như Naomi Campbell) vì ông là GS Mỹ gốc Ấn độ. Nhận được email mình, không những ông trả lời đồng ý, mà ông còn gọi điện cho mình! Ngẫm lại nhiệt tình như vậy thì có gì không ổn. Rồi mình chê Ngọc Trinh mà theo Campbell. Ông GS này ở Đại Học Johns Hopkins (JH) ở thành phố Baltimore, bang Maryland. (Nói cho đúng ra thì mình bị hấp dẫn của cái danh tiếng trường này, hay nói toạt là mình hám danh).

Khi biết mình sẽ đi Baltimore một ông GS trong hội đồng bảo vệ luận văn của mình nói mày sẽ bỏ việc sớm thôi vì thành phố này tội phạm nhiều lắm! Mình, dù bán tin bán nghi, vẫn không tin vào chuyện đó. Nước Mẽo mà ta. Còn các bạn Việt nam thì nói "anh chuẩn bị chai dầu ăn đi là vừa, chứ mấy chú da đen ghê lắm". Bỏ qua những lời căn dặn đó, mình nhất quyết xuống núi (vì đã có võ rồi mà, phải biểu diễn chứ). Bốn ngày sau khi tốt nghiệp, mình đi Mỹ. Nghĩ lại không biết sao mình đi vội vã vậy ta, có thể là ở lại HL thì cạp đất mà ăn. Không nhớ có ai đưa mình không nữa. Có lẽ không. Thế là mình đến HL không ai đón và rời HL không ai đưa. (Thật ra trước đó có party chia tay rồi và mình nhận được một món quà quá ý nghĩa từ Chí, Tâm, Phương, chị Yến và Trung.)

[†]UC = University of California.

Mình đến nước Mỹ với hành trang là Hoa Sơn Kiếm Pháp luyện được ở HL, một vài bộ áo quần (đôi giày huyền thoại Converse dĩ nhiên có), vài quyển sách, món quà kỉ niệm kể trên, và 2000 đồng Euro (còn nhớ là do lúc này chơi Facebook rồi, có post trên đó). Hình bên cạnh có gần hết những gì mình mang đến nước Mỹ. Đi máy bay đến sân bay JFK gì đó ở New York để chờ máy bay đi tiếp tới Baltimore. Năm 2006 mình đi máy bay lần đầu từ Sài Gòn đến Paris lúc 26 tuổi, khù khờ chưa có võ công gì hết trơn. Năm 2011, lúc 31 tuổi, lại là một chuyến bay từ một nước quen thuộc đến một nước khác hoàn toàn xa lạ. Lần này đã khác nhé. Ngồi chờ máy bay ở JFK, 2 tiếng đồng hồ, rồi cuối cùng 5 giờ sau mới có máy bay đi Baltimore. Thì ra nước Mẽo máy bay cũng trễ giờ như mọi nơi.

Xuống sân bay Baltimore thì mình bắt taxi đi về nhà đã thuê từ trước. Mình lên một chiếc taxi và người lái là một chú ... da đen. Nếu không có mấy lời khuyên quý báu kể trên thì không sao. Giờ thì mình tưởng tượng đủ kiểu mà lại không có chai dầu ăn! Không biết nó chở mình đi đâu đây? Có biết mô tê chi mô! Nhưng mà hoặc là chú này người tốt hoặc là mình không đủ đẹp trai nên mình bình an về tới nhà.

Vào nhà thì gặp bà quản lý, mà mình cảm giác cái bà này ghét mình hay sao đó. Cái mặt lạnh tanh. Cũng không còn nhớ mấy ngày đầu ăn uống thế nào. Và ở chính tại thành phố này mình gặp ... Thảo. Nhưng không phải là Thảo chuyên Toán QH. (Thảo đã theo Jerome người Pháp đẹp trai bỏ mình lâu rồi). Trước khi qua đây thì mình đã tìm hiểu xem ông GS có học trò là những ai. Trong website mình thấy một em gái tên Thảo (mà tên này thì mình có cảm tình). Mình đã liên hệ với Thảo. Mà sao phải là tên Thảo, sao không tên Tường, hay San Hô? Rõ ràng mình có duyên với cái tên này!

Thôi tạm thời khoan kể chuyện Thảo. Mà quay lại ông GS. Làm việc khoảng một hai tuần thì ông bảo mình làm presentation cho ông và nhóm. Mình chuẩn bị slides rồi giới thiệu. Mình biết Hoa Sơn Kiếm Pháp thì cũng chẳng làm được trò trống gì (không thì Quân Tử Kiếm Nhạc Tiên Sinh đã không phải quy đao tự cung mà luyện Tịch tà kiếm pháp), nhưng mà trong lúc mình nói huyên thuyên thì ông GS ... ngồi đọc email! Chờ cho mình nói xong, ông ngước mặt lên và phán "mà nè, cái mày làm thì tau đã làm mười mấy năm trước rồi". Cha mẹ ơi, thất vọng toàn tập! Như mình đã kể với các bạn, mình làm việc với ông Stéphane, và sau này là ông Bert Sluys, họ đều là dân châu Âu lịch thiệp. Có bao giờ họ khinh mình như vậy đâu! Vậy mà một ông Ấn độ lại dám như vậy. Mình nhục và buồn và tức. Một dấu hiệu cho thấy cuộc tình Ấn-Việt này sẽ không kéo dài.

Và quả đúng như vậy thật. Mình đến John Hopkins tháng 9 năm 2011 và mình bỏ nó tháng 4 năm 2012. Một cuộc tình chóng vánh. Dĩ nhiên là có nhiều lí do. Mình kể ra đây là cho các bạn trẻ suy nghĩ lúc chọn GS[†]. Dĩ nhiên yếu tố hên xui thì khó tránh được, nhưng mà tìm hiểu để giảm thiểu nó vẫn tốt hơn. Mình nhớ một hôm mình đi làm khoảng 10h sáng thì gặp ông. Ổng nói đi làm gì trễ vậy! Lúc ở Pháp, ông GS đã từng nói mình đừng làm việc cuối tuần! Rồi một hôm nọ, là thứ bảy máu chảy về tim, ông email cho mình. Vì sống độc thân thì cứ ôm cái máy tính cả ngày, nên mình nhận được mail. Nhưng mình cố ý không trả lời ông ngay, mà chờ đến tối chủ nhật mới trả lời. Và mình chờ xem ông phản ứng như thế nào. Và đúng như mình dự đoán, ông phản ứng thật, theo một cách rất...

Thứ hai mình đi làm, và có điện theo reng, bên kia đường dây là ổng (chứ còn ai nữa). Ổng nói xuống đây nói chuyện. (Phòng ông ở tầng trệt và phòng mình ở tầng lầu). Xuống gặp thì ông bảo "Phính nè, đây là nước Mẽo, chứ không phải châu Âu. Tau làm việc mỗi ngày 16 tiếng. Tau email cho mày sáng thứ bảy mà tới tận tối chủ nhật mày mới trả lời. Vậy là mày không làm việc". Cha mẹ ơi, ông làm mấy giờ thì liên quan gì tui. Sao ông không nghĩ lương ông bao nhiêu và lương tui bao nhiêu? Mà cuối tuần thì tui làm gì sao ông kiểm soát được? Đây là vấn đề bully trong nhà trường–rất hay xảy ra khi các GS chèn ép NCS vì biết NCS cần mình để tốt nghiệp.

Đó là chuyện ông GS khó tính, khó chịu và khó ưa và khó nhìn, nói túm lại là cái gì cũng

[†] Xin xem thêm Chương 56 trong đó mình lại bàn về đề tài này.

khó. Mà cái đề tài ông vẽ ra cũng chẳng có gì hay ho. Lúc ông gọi cho mình để dụ mình sang làm cho ổng, thì ông nói tau có một ý tưởng này nè này nè. Mình suy nghĩ rất lâu, nếu mà làm được như ông nói thì mình sẽ có tiếng (và từ đó sẽ có miếng để cạp cạp). Vì ông đang nằm mơ mà. Tới giờ là 10 năm rồi không ai làm cái đó cả, bao gồm cả ông ta! Thì ra để xin được tiền dự án (từ chính phủ chẳng hạn), ông phải nổ, nổ thật to là đẳng khác. Rồi ông cũng không biết làm sao để thực hiện luôn. Ông không quan tâm! Vì cơ quan cho tiền, sau khi cho, thì họ cũng không quan tâm là người xin dự án có làm được những gì hứa không.

Như vậy là phải bỏ qua ông GS này thôi. Có gì để lưu luyến ở đây không? Để kể về cái thành phố Baltimore này. Rất nhiều da đen (mà mình thì ky cái môn phái này, vì lời khuyên kể trên, mà cũng vì xem phim Mỹ nhiều nữa). Cứ lên xe buýt là thấy toàn đệ tử môn phái này. Mình ngồi không nhúc nhích, chuẩn bị tâm lý đủ kiểu. Như chừng đó chưa đủ, bạn bè còn dặn dò: anh đi chơi khuya thì về nhà sớm đừng đi bộ sau 9h tối. Ôi, thành phố gì thế này! Ở HL đi chơi đạp xe đạp 2,3 giờ sáng là chuyện bình thường. Rất bình an.

Bổng dưng nhắc xe đạp ngồi nghĩ lại thấy có một chuyên vui. Hồi ở trong nước mình đi xe máy, qua Hà Lan thì đi xe đạp và giờ ở Mẽo thì đi ... bộ. Phải tới khi qua xứ sở Kanguru thì mình mới biết đi xe hơi, nhưng chủ yếu là vì có con. Nếu được mình vẫn thích đi bộ, hoặc xe đạp hoặc đi tram (tàu điện).

Với tình cảnh như vậy thì chuyện mình chuẩn bị bỏ ông là chuyện phải xảy ra. Thế là mình lại tìm việc. Mà ô hay không biết sao mà không kiếm được việc ở Mẽo, thậm chí dù mình đã hạ mình xuống để tìm việc ở ... Canada thì cũng không luôn. Giờ thì phải nhờ ân nhân thôi. Và đó là Stéphane (dù mình đi đâu thì Stéphane và mình đều giữ liên lạc). Stéphane giờ đã là GS ở ĐH Cardiff, Xứ Wales, Vương Quốc Anh. Và có tiền, rất nhiều tiền là đẳng khác. Vậy là mình quyết định đi Anh. Anh không bằng Mẽo nhưng nếu một bên là Thiếu Lâm thì bên kia cũng là Võ Đang. Hơn nữa mình là fan của MU (ôi, buồn cho MU lúc này).

Không có gì là vui ở Baltimore, nhưng mình cũng kịp làm được một việc mình rất ưng ý. Đó là bay qua Cali thăm gia đình bác Nguyên và chú Thọ. Bác Nguyên và chú Thọ đi Mỹ lâu lắm rồi và chưa về VN lần nào. Mình quý bác Nguyên vì bác dễ dãi và hồi nhỏ bác cho mình chiếc xe đua điều khiển. Mình chưa bao giờ có món đồ chơi cool như vậy. Vừa qua sân bay là bác Nguyên và bác Hoa (vợ bác Nguyên) đón mình và dẫn ra casino liền. Bác mình thì nổi tiếng vì mê casino. Mà mình thì không thích cờ bạc một tẹo nào, thử đánh bài với mình là biết ngay. Về nhà thì mình gặp con Bác mà chưa bao giờ gặp: Robert này, thêm một đứa nữa mà quên tên. Vui nhất là tụi nó bảo mình nói tiếng Anh cho tụi nó nghe để tụi nó ... cười. Vì accent của mình không sao nói được, những từ như “cool, girl”. Sau đó thì đi thăm gia đình chú Thọ, rồi Rôbi–con trai lớn của chú–chở đi chơi. Dù chú Thọ chính là người cho mình 200 đô để mua cái máy tính mà góp phần thay đổi đời mình, mình không hợp chú nên mình ít đề cập về chú.

Công việc bê bát vậy nên mình bắt đầu tìm bạn gái. Một đứa em tên Khánh (là em trai của Huy Sở bạn thân cấp ba), đang ở Florida, chỉ cho trang web vietsingle.com. Khánh nói anh vô đó đi, đầy. Hô hô hô. Vậy là vô thôi. Làm hồ sơ ghi rõ về mình. Rồi có người liên lạc. Mình gọi điện ngay. (Từ lúc qua HL thì mình hết rụt rè chuyện trai gái rồi). Bạn đó nói anh nhanh quá hen. Rồi tự dưng hỏi mình "anh ở Mẽo bao lâu rùi, có xe (xe hơi bạn, không phải xe đạp hay xe wave) không". Hỏi gì kì vậy? Thêm một vài trường hợp nữa, mình thất vọng quá. Thế là lên profile chỉnh sửa (để khỏi phải trả lời những câu hỏi khiếm nhã này một lần nữa): sang Mỹ năm 2012, không có xe!

Và thế là không có ma nào liên lạc!

Rồi một hôm có người liên lạc! Nhưng mà từ Việt Nam. Thật tình mà nói mình tránh các bạn ở VN vì cũng đã có người nói thẳng với mình: không bao giờ rời VN". Mình không muốn ép buộc ai phải đi khỏi VN vì mình cả. Nhưng mà profile của bạn này thì mình rất thích. Mình không nhớ có hình không, nhưng mà có hai điều mình thích. Một là, người đó thích trẻ con (và là người góp phần cho các bé chào đời). Thứ hai là, người đó làm trong ngành Y. Mà mình thì có rất rất nhiều dính dáng đến ngành này. Mình sinh ngày 27-2 tức là ngày thầy thuốc Việt Nam, mẹ mình làm trong bệnh viện và mình không biết đã trải qua bao nhiêu thời gian ở bệnh viện Huế.

(May mà không phải trên giường bệnh). Hồi nhỏ mình thích nhất là được ra đó tắm nước nóng.

Rồi mình chát với bạn này. Bạn gửi cho mình một tấm ảnh chụp với bà con dịp Tết. Mình cũng kể chuyện (mình hình như lúc nào cũng phải xả cái tâm sự yêu đương, và may là lúc nào cũng có người cho xả, thích hay không thì mình không biết) với Thảo (Thảo-Đức đó) và đưa cho Thảo tấm ảnh. Thảo chỉ vào chị họ của bạn mình (khoảng 40 tuổi) và hỏi "người này hả anh?". Mình tức thật, chỉ thẳng vào Thảo và nói "em khinh anh quá", rồi chỉ vào bạn mình. Thảo nhìn vào tấm hình, rồi bảo thẳng thừng (bạn Thảo này rất thẳng tính): "anh coi chừng bị lừa, không ai hồ sơ như vậy mà cần lên vietsingle mà còn thích anh cả!" Mình trả lời: "anh có mẹ gì mà lừa em!"

Bị lừa gì thì mình không thích chứ lừa tình thì sẵn sàng. Không phải nhạc sỹ Duy Quang đã viết trong bài Kiếp Đam Mê những lời sau sao:

Tôi xin người cứ gian dối
Cho tôi tưởng người cũng yêu tôi
May ra còn được thấy đời vui
Khi cơn mưa mùa đông đang tới
Xin giã từ ngày tháng rong chơi

Thế là mình quyết định bỏ Mẽo về VN. Thật ra thì lúc đó mình cũng muốn về VN, mình đã xa VN 6 năm. Mình muốn về VN thăm nhà, nghỉ ngơi sau bao nhiêu đêm không ngủ (anh Tuấn Răng chứng kiến mình làm đến sáng), và quan trọng nhất là xem mình bị lừa có vui không. Lúc mình báo với gia đình mình sẽ về VN không quay lại, có rất nhiều phản ứng. Bác Nguyên thì rất hào sảng, như tính tình của Bác, kêu mình qua ở nhà Bác! Nhưng căng nhất là ba mình. Ba giận mình lắm. Nhưng rồi thì mình vẫn về.

Đây là chuyện kể về trời Tây nên không bàn đến cái gì đã diễn ra ở Việt Nam. Nhưng mà kết quả của việc mình lên vietsingle.com một hôm buồn đời là giờ mình có 2 con chó nhỏ dễ thương và một con chó bự–sếp bự.

Một chàng trai xứ Huế đi lòng vòng lung tung qua nhiều nước trong vòng 6 năm. Chỉ khi đến nước Mẽo thì lại quen một cô gái VN nhưng ... đang ở VN và thành duyên vợ chồng. Không thể tin nổi. Ba mình cưới mẹ mình lúc ông 32 tuổi và mình kết hôn cũng lúc 32 tuổi. Lại một sự trùng hợp không giải thích được.

Nước Pháp không cho cái mình muốn, nhưng nó cho mình cơ hội đi Hà Lan. Rồi HL cho mình võ công để Mỹ cho vào. Nhưng nước Mỹ không phải là duyên của mình. Ấy vậy mà nó cho mình về lại, không phải nơi nào khác, nơi mình bắt đầu, Việt Nam, nơi cưới bà xã. Ngẫm lại, trong thất bại vẫn luôn có một cái gì đó tích cực, đúng không các bạn?

Ở Mỹ ngắn quá mình thậm chí không kịp đi tham quan Nữ Thần Tự Do ở New York dù nó ở cũng khá gần. Nhưng mà cũng kịp đi thăm toà Bạch Ốc. Thời gian này tình cờ gặp lại Loan–bạn học ở Bách Khoa. Loan người miền Tây, học BK xong thì đi làm cho một công ty nước ngoài. Rồi trong một dịp đi công tác nàng đã gặp chàng, một người Mỹ. Rồi họ cưới nhau và định cư ở thành phố Virgina ở gần Baltimore. Loan rủ mình đến nhà chơi và dẫn mình đi chơi Washington DC, đi thăm nhà Trắng. Cảm ơn Loan rất nhiều. Rất vui vẻ, nhiệt tình. Đến giờ vẫn rủ mình sang Mỹ ở! Còn nhớ là Loan giới thiệu mình một cô gái đang ở đảo Hawaii. Lúc đó mình cũng muốn đi đảo chơi lắm. Nhưng mà cô bạn này thì làm nail, mình không đủ dũng cảm để vượt qua định kiến nghề nghiệp. Không có gì tự hào! Định không kể ra, nhưng mà đã là sự thật thì không có gì phải dấu cả.

Giờ mình quay lại với Thảo. Thảo học rất giỏi và trước đó đi du học Hàn Quốc làm thạc sỹ. Ở xứ Hàn, Thảo gặp Đức và hai người cưới nhau. Sau đó Thảo và Đức sang ĐH JH để làm NCS. Thảo thì làm với ông GS đáng ghét kể trên (ở khoa Cơ khí), còn Đức thì làm ở khoa Môi trường. Thảo-Đức có một cô con gái khoảng 4-5 tuổi tên là Thảo Nguyên. Thảo Nguyên rất đáng yêu, mà mình thì chúa mê con nít. Hồi đó mình chỉ chơi với nhà Thảo-Đức. Nhớ đi chợ nè, sáng cuối tuần hay đi mua đồ cũ nè, đi chơi Washington DC thăm khu vườn hoa anh đào gì rất đẹp (Hình 14.1). Thậm chí trước khi về VN mình còn ở lại nhà Thảo-Đức. Hai cháu bác Thảo Nguyên-P đã có thời gian rất vui vẻ. Cảm ơn hai em nhé Thảo-Đức, cảm ơn cả Thảo Nguyên. Mong gặp lại một ngày không xa.

Hình 14.1: Một vài kỉ niệm với gia đình nhỏ Thảo-Đức-Thảo Nguyên.

Ở Mỹ mình cũng gặp lại một người đồng hương Huế. Hồi mới sang Mẽo thì cô đơn lắm. Lúc đó không biết sao (chắc nhờ Facebook) mà biết có bạn Chân đang ở Houston, bang Texas. Chân là cựu học sinh chuyên Toán Quốc Học (bạn cùng lớp với Thảo, Thảo Pháp). Lúc xưa học Ngoại Thương ở Sài Gòn. Một hôm Chân có qua Bách Khoa và vì một tai nạn nho nhỏ mà mình ấn tượng với Chân. Chân cao, cao hơn mình. Thế là mình gọi điện nói chuyện với Chân. Mà có quen biết chi mô. Không ngờ hai bạn này tám $2,3$ tiếng đồng hồ trên điện thoại. Chân nói chuyện phải nói rất hay, mình rất thích nghe Chân kể chuyện, và chủ yếu mình nghe thôi. Mình ngưỡng mộ việc Chân và ba bạn đó rất hợp; ba mình và mình không hợp gu nhau ☹. Cảm ơn Chân!

PS. Nhân kể chuyện chú lái taxi da đen mà nhớ lại chuyện ở Paris năm 2007. Số là hồi đó mình ở nhà của Thảo, Thảo nhỏ và Thư Đà Lạt. Và Thảo nhỏ thì chơi thân với một người tên là Đỗ Mạnh Cường. Chú này hay tới nhà chơi và một hôm vì lí do gì không biết mà ở lại. Không biết sắp xếp thế nào mà mình ngủ chung với chú này. Mình run như cầy sấy vì hồi đó có biết gì đâu. Sáng thức dậy thì thấy vẫn còn trong sạch. Giờ bạn đã đoán ra Đỗ Mạnh Cường này là ai chưa? Chính xác, là nhà thiết kế nổi tiếng DMC đó.

Ngày 5 tháng 11 năm 2022

# Chương 15

# Chuyện đi Tây (Úc)

SAU khi mình rời nước Mỹ thì về Việt Nam, vào tháng 4 năm 2012. Dĩ nhiên là mình phải xem "bị lừa tình" như thế nào. Hằng đón mình ở sân bay Sài gòn. Sau đó hai đứa đi chơi Vũng Tàu, rồi ra Huế. Và rồi tụi mình tổ chức đám cưới tháng 7 năm đó. Mọi chuyện diễn ra quá nhanh. Rooney Delft là phải như vậy. Sau đó mình đi làm ở trường Tôn Đức Thắng (TDT), boss là GS Nguyễn Xuân Hùng (anh Hùng lúc trước học EMMC 7). Ở đó mình gặp nhiều bạn trẻ dễ thương như Trần Vĩnh Lộc, Thái Hoàng Chiến, Phùng Văn Phúc, và Hoàng Tường. Sinh viên TDT thế nào mình không biết còn cơ sở vật chất của TDT rất tốt, nhất là phòng vệ sinh quá sạch. Vui nhất là mình phải đi tập văn nghệ để nhóm biểu diễn nhân dịp sinh nhật trường. Lần đầu tiên mình lên sân khấu biểu diễn. Hôm đó anh Hùng hình như có biễu diễn đàn ghi ta. Ảnh giống thầy Hưng: văn võ toàn tài. Rồi cả nhóm đi Hà Nội (lần đầu tiên của mình) tham dự hội nghị Cơ học toàn quốc (Hình 15.1). Rất là vui. Mình có đi thăm anh Tuấn và gia đình. Lần đầu đi hội nghị trong nước thấy có nhiều điều lạ chưa thấy ở phương Tây. Nhưng mà lương bổng thì bèo lắm, khoảng 10 triệu một tháng. Ấy vậy mà cao hơn các trường khác nhiều. Hèn chi nghiên cứu của nước mình vẫn thua Thái Lan.


Hình 15.1: Kỷ niệm với các anh và các em làm nghiên cứu ở Việt Nam. Trong hình bên trái hàng ngồi có Hoàng Tường ngồi ngoài cùng bên trái. Tường sau này làm NCS với Clemens Verhoosel–có thể xem là sư thúc của mình, người mình đề cập ở Chương 19.

Bàn một tí về công việc. Hợp đồng của mình với TDT gọi mình là chuyên viên nghiên cứu và trong hợp đồng ghi rõ ít nhất một năm phải xuất bản một bài báo Q1. Hiểu nôm na là mình phải viết ra một ca khúc tàm tạm, kiểu như *Trống Vắng* (do ca sỹ Phương Thanh hát hồi Làn Sóng Xanh). Lúc trước độc thân thì mình làm ngày làm đêm, giờ "hoa" đã có chủ, mà chủ không cho làm việc ban đêm, nên chỉ có thể làm ban ngày. Mà cuối tuần cũng không được làm việc. Trong điều kiện như thế mình ráng lắm rồi cũng đẻ ra một bài đứng tên với anh Hùng. Thôi, âu cũng là một kỉ niệm. Nếu TDT không "ép" bài có khi nhân lúc ngẫu hứng, mình có thể phóng keyboard cho ra tuyệt phẩm cỡ *Tôi Đưa Em Sang Sông* của cố nhạc sỹ Nhật Ngân, (mình đồng hương Huế với ông). Còn trong điều kiện gò bó thì chỉ có thể *Trống Vắng* mà thôi.

Mà TDT lại cho mình cái cơ hội đứng lớp đại học lần đầu trong đời. Số là anh Sơn (bạn học EMMC 9) phụ trách chương trình cao học ở TDT, và anh muốn giúp mình kiếm thêm tiền uống cà phê (dù mình không uống được). Thế là anh bảo mình dạy lớp "Cơ học rạn nứt" mà bằng tiếng Anh, vì như vậy tiền sẽ nhiều hơn. Vậy là mình đi dạy thôi. Sáng thứ 7, chạy xe xuống Ngô Tất

Tố, Bình Thạnh, dạy từ 8h đến 12h. Lúc đầu mình nói tiếng Anh (vì anh Sơn bảo thế), nhưng mà học viên nói "đừng làm khó nhau thầy ơi". Thế là mình cho họ thưởng thức tiếng ... Huế ☺

Sau buổi học cuối cùng thì học viên tặng mình một cái áo sơmi. Về hỏi vợ thì vợ bảo áo tốt, tầm 300k. Như vậy mình đã nhận quà từ học viên, và điều này gọi là "conflict of interest" (mâu thuẫn lợi ích) vì mình còn chấm bài thi của họ. Mình nghĩ, đã nhận áo sơmi thì nếu sau này có ai giao phong bì "bự hơn" chắc mình không từ chối! Rất may là mình không có cơ hội như vậy nữa để thử xem bản lĩnh.

Dĩ nhiên làm việc ở TDT chỉ là một bước dừng chân trong lúc chờ visa đi UK. Đầu năm 2013 thì mình đi Anh làm việc với Stéphane, người mà đã thành Giáo sư trường Cardiff (Xứ Gan). Nhóm của Stéphane rất là quốc tế: Việt Nam có hai (mình và Hoàng Khắc Chí), Trung Quốc có hai (Haojie Lian và Peng Xuan), một Tây Ban Nha (Daniel Alves), một Columbia (Octavio Gonzalez), một Hàn Quốc (Chang-Kye Lee), hai Iran, một người Anh (Claire Heaney), một Romania (Iulia Mihai), một Albani (Danas Sutula), một người Pháp (Olivier). Lúc này đã có gia đình nên mình không đi mô cả. Thậm chí còn không đến Old Traford xem MU đá. Nhưng mà dĩ nhiên là có đi đá banh. Trong nhóm làm việc có CK người Hàn (đeo mắt kính đứng cạnh mình, hình trái Hình 15.2). Và hắn có nhiều bạn Hàn Quốc nên đi đá với tụi đó. Thuê sân 7 người đá tùm lum: Hàn có, Anh dĩ nhiên có, có cả Ý, đó là Marco Brino từ Juventus... Hôm đá banh thì có người gửi link để mọi người thông báo xem ai tham gia/ai không, và ai có xe chở mọi người. Nếu đủ người thì đá. Hôm có đủ người, làm việc xong là có hai chiếc xe tới chở mọi người đi. Đá xong lại chở về trường, rồi ai về nhà nấy. Mình thuê phòng gần trường nên lại đi bộ thôi. Hồi đó mình hay chơi với Marco vì hắn qua Cardiff làm với Stéphane và Stéphane bán cái giao Marco lại cho mình.

Công việc thì không có gì đặc biệt vì Stéphane có funding từ chính phủ Châu Âu nhưng mà không có bài toán hay ý tưởng gì cho mình cả. Sang gặp ổng thì Stéphane nói, thích làm gì thì làm! May mà ông giao Marco cho mình nên có người làm chung. Thì làm hoài cũng viết được vài bài báo, nhưng tình cờ mình chú ý đến phương pháp B và sau này nhờ nó rất nhiều (nguyên nhân cho cuộc gặp gỡ Alban bàn ở Chương 16).

Mình làm ở đó cho đến khi Stéphane thông báo ổng sẽ chuyển sang Luxembourg làm việc. Hình như là tháng 4 năm 2014. Mặc dù ổng hứa cho mình một vị trí ở Luxembourg nhưng mình không muốn phải học thêm một ngôn ngữ nào nữa. Oải lắm rồi. Rồi số phận đưa đẩy mình quyết định đi Úc. Một lí do quan trọng cho quyết định của mình là, lúc đó tiền Úc cao hơn đô la Mỹ mà lương hậu tiến sỹ ở Úc thì cao lắm (gấp đôi lương của mình ở Mỹ). Thế là đi Úc thôi. Một nơi không có trong đầu mình thì giờ mình lại đến.

Hình 15.2: Hình với đồng nghiệp ở đại học Cardiff.

Vậy là mình về VN rồi cả nhà (Hằng, Tin–lúc đó khoảng 16 tháng–và mình) đi qua Úc, thành phố Adelaide, tháng 8 năm 2014. Và gia đình mình ở Úc từ đó cho đến nay. Có gia đình rồi, không thích đi lông bông nữa. Mình làm ở đó gần một năm thì xin được việc ở Monash, thành phố Melbourne. Nhớ hôm đi phỏng vấn được các bạn trẻ ở Monash (Như, Hiếu, Thắng, Khoa, và Chí) đi cổ vũ, cảm ơn mấy đứa rất nhiều. Tháng 3 năm 2016 thì mình chính thức làm việc ở Monash. Lúc đầu mới lên thì mình ở nhà Chí. Cách đây 7 năm mình cũng ở nhà Chí tại Hà Lan, và giờ thì cũng trú ngụ tại nhà cậu này.

Trước khi sang Úc thì mình đã kịp lấy cái bằng lái xe ở VN, và ở Adelaide cũng đã học lái xe được một tuần. Bây giờ Chí cho mình thực tập. Chí ở trong khu trung tâm thành phố Melbourne, còn trường Monash thì ở Clayton cách trung tâm Melbourne 20 cây số. Hai anh em lái xe Chí đi làm. Lúc nào thấy đường xá dễ lái thì Chí cho mình cầm vô lăng. Rồi thì mình phải chuyển ra, không thể làm phiền Chí mãi vì Chí lúc đó không sống một mình. (Cảm ơn người ấy của Chí nhé). Lúc này thì phải tìm một chiếc xe. Có biết mô tê chi mô nên tất cả nhờ Chí. Hai anh em đi xem xe rồi hôm sau mình đi lấy xe. Mà đi một mình vì Chí bận việc. Lúc đi tới chỗ lấy xe thì đi bus, nhưng lúc đi về thì phải đi với chiếc xe (Honda CRV, giá tầm 6000 đô Úc)! Chưa bao giờ lái xe một mình cả. Và có biết đường chi mô. May có Google map. Ngồi lên xe lái mà hồi hộp không thua tân lang động phòng hoa chúc với tân nương. Chạy lòng vòng một hồi trong trung tâm thành phố Melbourne rồi cũng về được nhà. Mừng lắm luôn. Hôm sau người ấy của Chí dẫn mình đi mua cái Tomtom, với cái này thì mình có thể đi khắp nước Úc (nếu muốn). Trước đó cứ dùng dằng chuyện mua xe là vì sợ không biết đường!

Rồi mình thuê một cái phòng ở Clayton cho gần trường. Trong nhà này có chú da đen, nhưng lúc này mình đã quên khuấy mấy lời khuyên của anh em Delft hôm xưa. Mình đi đá banh với chú này, rồi còn đi ăn tối với nó và cô bạn gái Úc rất xinh của nó. Chú này rất vui tính. Rồi mình dọn ra để thuê một cái nhà vì sắp đón sếp bự và 2 con chó con sang. Về nhà mới thì nó trống trơn. Vậy là phải đi mua sắm tủ lạnh, máy giặt, tủ, chén bát, ... May có Chí và người ấy giúp đỡ. Còn Khoa nữa chớ, đi mua gì cũng có Khoa giúp. Hồi đó vẫn không yên tâm đi xe một mình nên hay qua chở Khoa đi chợ. Có những lúc đi chơi xa, cũng chỉ khoảng 60 cây số thôi, mình chở thêm bốn người trong con ngựa chiến. Đi đường núi vòng vèo, tốc độ tối đa cho phép là 70 cây số giờ mà mình đi khoảng 50! Lúc đó vợ con chưa sang (Hằng về VN sanh Ben, con chó con thứ hai) nên đi chơi cũng nhiều (Hình 15.3).

Hình 15.3: Kỉ niệm với Chí, Như và Khoa.

Tháng 6 năm 2016 thì mình về Sài Gòn đón sếp bự và hai con chó sang.

Công việc ở trường thì không có gì đáng kể. Là giảng viên thì mình phải làm hai việc: thứ nhất là dạy (khoảng 20% thời gian, một năm dạy 2 môn) và thứ hai là làm nghiên cứu. Mình không thấy làm việc ở đây vui vì mọi người làm việc nghiêm túc quá, ai cũng chui vào phòng. Mình ít thấy chát chít. Lúc đầu đi dạy thì bị sốc. Sinh viên mình dạy mà thấy mình trong trường như là người dưng nước lã. Không chào hỏi, thậm chí cúi đầu. Sau một hồi thì cũng quen.

Có một kỷ niệm về lần đầu đi dạy. Ở bên này sau khi một môn học kết thúc thì sinh viên sẽ đánh giá giảng viên. Hôm xem những comment của tụi nó, mình choáng luôn. Kiểu như “thay ông này bằng người khác đi”, hay “về học thêm tiếng Anh đi cha nội ”, ... Có lẽ tụi nó chưa được thưởng thức tiếng Anh giọng Huế bao giờ. Cũng may, nhà trường đứng bên phía giảng viên nên sau này mình cũng không cần đổi giọng, và tiếng Anh vẫn bèo như xưa. Nhưng nếu nhìn sang giảng viên Trung Quốc thì tiếng Anh còn có phần tệ hơn.

Sinh viên Việt làm NCS ở khoa Xây dựng ở Monash không có nhiều, nhưng mà ghiền đá banh quá nên mình rủ mọi người đá. Nhưng mà đá trong giờ làm việc. Ok, chơi luôn. Cuối cùng cũng tụ tập được một nhóm. Tiếc là không duy trì được vì không đủ người. Không bằng tinh thần đá bóng ở Delft. Sau đó mình không còn đá bóng luôn. Lại một đáng tiếc nữa trong đời. Bây giờ thì thỉnh thoảng đá với 2 con chó nhỏ, nhưng mà tụi nó yếu quá, không đã.

Một nhiệm vụ của giảng viên là đào tạo tiến sỹ. Năm 2012 mình khốn khổ với ông GS người Ấn Độ, vậy mà người sinh viên làm NCS đầu tiên của mình là người Ấn. Mà mình không có chọn chú ấy. Có lẽ trời chọn. Cậu ta email cho mình ý là muốn làm NCS với mình (giảng viên ở Úc thì nhận email như vậy rất nhiều, phần lớn là từ sinh viên từ Iran, Trung quốc, Việt Nam cũng có). Rồi mình thấy trong CV có ghi biết C++, mình trả lời ngay ok. Ai biết môn võ này là chơi được. Không phỏng vấn luôn (mà nếu có thì mình cũng chẳng biết làm sao nhận ra sinh viên tốt/không tốt). Cậu ta sau đó xin học bổng của Monash với mình là người hướng dẫn, và được học bổng. Cậu này tên Tushar Mandall (Hình 15.4).

Rồi thì Tushar đến Monash tháng 2 năm 2018 và nói là "thật ra tau biết C++ nhưng nó chưa biết tau"! Năm xưa mình cũng trả lời Stéphane tương tự! Ấy vậy mà Tushar tốt nghiệp năm 2021, tức là đúng thời hạn. Và cậu ta viết được tám bài ... hát, tức là hơn thằng thầy năm xưa. Chỉ trừ năm đầu thì mình giúp, còn lại Tushar làm tất cả, năm 2020 và 2021 mình thậm chí không gặp mặt Tushar lần nào! Chỉ bàn công việc qua Zoom. Mình không thể đòi hỏi gì hơn. Sau nay mình trông ngóng email từ Ấn độ nhưng duyên chưa đến.

Lúc cậu ta đi về Ấn Độ, cậu ấy hẹn gặp mình chia tay. Tushar dẫn theo vợ hình như tên Masha. Masha cũng có học bổng làm NCS ở khoa Điện cùng trường. Cô này lúc xong NCS thì chỉ viết hai bài thôi, nhưng mà hai bài thứ dữ vì về cơ học lượng tử, mà như trong luận văn Tushar viết là Masha đã hi sinh cho chồng. (Không hiểu Tushar làm sao cua nổi cô này, vài bữa sẽ hỏi). Tushar tặng mình một cây bút, một cái cà vạt (chắc hắn chưa bao giờ thấy mình mang cà vạt và muốn văn minh hóa mình, nhưng cái này thì không ai làm được mô) và một tấm thiệp. Cây bút và cà vạt thì cho Tin/Ben, mình quan tâm tới cái card thôi, và nó rất cảm động. Cảm ơn Tushar, cảm ơn vì cho mình biết là không phải người Ấn nào cũng "xấu tính" như ông GS ở Mẽo.

Hình 15.4: Tấm hình kỉ niệm với Tushar (tháng 6 2022) và tấm thiệp Tushar tặng.

Mình là sinh viên (cao học) đầu tiên của Stéphane, rồi Stéphane có sinh viên tiến sỹ đầu tiên là một người Ấn (Sundararajan Natarajan). Tới phiên mình, mình cũng có sinh viên đầu tiên là một người Ấn độ. Chuyện đời thật có nhiều trùng hợp thú vị.

Ở Úc được một thời gian thì nộp đơn xin làm thường trú nhân (để hưởng một số phúc lợi xã hội). Một điều bất tiện khi đã có thường trú nhân là bằng lái xe VN không dùng được nữa. Vậy là mình phải đi thi lái xe thôi. Tự tin lắm, đi thi một mình. Lý thuyết thì ok, thi thực hành xong thì người ta bảo: “you rớt rồi”. Mình hỏi “vì răng?”. Họ trả lời: “you vượt quá tốc độ”. U cha mạ ơi, mình mà vượt quá tốc độ. Về nhà bị vợ cười cho một trận vì Hằng thi là được ngay. Rút kinh nghiệm lần 1, lần 2 mình thuê người dạy lái xe đi theo. Mình học một buổi với bà này, rồi bà nói mày thi được rồi đó. Rồi hai người cùng đi tới chỗ thi lái xe. Có bà ngồi trong xe mình tự tin hay vì nể bà mà lần này mọi chuyện suông sẻ.

Làm việc ở trường đại học thì ai cũng phải leo một cái thang. Không biết gọi nó là gì cho hay. Ở Úc thì cái thang này có những cấp sau: giảng viên (lecturer), giảng viên cao cấp (senior lecturer), phó giáo sư (associate professor) và giáo sư (full prof or prof). Mình vào làm năm 2016 và họ cho mình ở cấp đầu tiên. Và sau 6 năm mình ... vẫn ở đó. Một phần vì võ công yếu và một phần vì không có động lực như xưa. Và một phần là muốn cân bằng giữa công việc và gia đình. Bên ni chỉ có 2 vợ chồng và 2 con chó con thôi.

Nghèo và khó khăn lại có cái hay. Mình nhớ có một người từng nói: cảm ơn cha mẹ vì sinh ra tui nghèo!

Ngày 6 tháng 11 năm 2022

# Chương 16

# Những tao ngộ trong cuộc đời (2)

MỘT hôm vào cuối tháng ba năm 2019 mình nhận được một email như sau (mình đã chỉnh sửa email một chút để tránh các vấn đề chuyên môn nhàm chán):

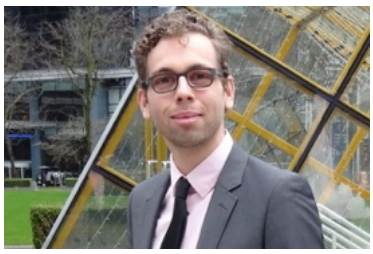
*P thân mến,*

*Tên tôi là Alban, tôi là một nhà nghiên cứu tại Khoa Khoa học và Kỹ thuật Vật liệu tại Monash làm việc về mô phỏng sự mài mòn của các vật liệu dẻo.*

*Bởi vì mài mòn liên quan đến biến dạng và hư hỏng lớn, chúng tôi đã xem xét sử dụng phương pháp A để mô phỏng các quá trình mài mòn. Chúng tôi gặp một số vấn đề với phương pháp này. Đối với tôi, có vẻ như phương pháp B có thể phù hợp với nhu cầu của chúng tôi hơn. Tôi đã đọc một số bài báo của bạn về phương pháp B, và tôi muốn gặp bạn để trao đổi về một số công việc ban đầu mà tôi đã làm với B và những vấn đề mà tôi đang gặp phải.*

*Tôi sẽ cảm kích nếu bạn dành chút thời gian để gặp tôi và thảo luận về dự án của tôi. Vui lòng cho tôi biết khi nào là thời điểm tốt để gặp nhau.*

*Trân trọng, Alban*



Ôi, đang rảnh và chán không có ai chém gió, mình trả lời ngay: Ok, gặp thứ ba nhé, 1h trưa ở phòng tau (...). Alban là người Pháp, mang kính cận, tóc xoăn, nói tiếng Anh không bị accent như phần lớn người Pháp. Sau một hồi thì mới biết cậu ta làm NCS ở Mỹ (trường Northwestern) và Canada (Đại học British Columbia). Sau NCS thì sang Columbia làm việc và kết hôn với một cô nương bản xứ. Rồi thì Alban sang Úc làm hậu tiến sỹ ở khoa Khoa học và Kỹ thuật Vật liệu trường Monash năm 2018. Alban làm với GS CH, một GS có tiếng người Úc (và lấy vợ Việt Nam).

Sau lần đầu lưu luyến đó thì mình biết là mình kết chú này rồi. Không kết sao được, các bạn? Alban thích và giỏi các món võ công yêu thích của mình, như Giáng Long Thập Bát Chưởng (C++), Lăng Ba Vi Bộ bỏ của chạy lấy người (LaTeX), Độc Cô Cửu Kiếm (Hệ điều hành Linux). Từ đó chúng tôi một tuần gặp một lần bàn công việc. Chủ yếu Alban làm hết, mình chỉ 'chém gió như lãnh đạo thôi'. Từ đó tới nay đã hơn ba năm và tụi mình đã có dăm ba bài báo khá tốt.

Mối quan hệ GS CH-Alban-mình cũng khá thú vị. GS CH là người bỏ tiền (không phải từ túi của ổng mà từ túi của người dân Úc) để thuê Alban thực hiện một công việc. Alban gặp một số khó khăn mà GS CH không giải quyết được (vì không phải chuyên môn của ổng). Thế là Alban liên lạc mình. Ở đây mình phải cảm ơn GS CH vì sự cởi mở của ông.

Mình ấn tượng chú này là lúc mình viết bài báo chung đầu tiên với nó. Dù gì thì tới thời điểm đó mình cũng đã viết được khoảng hai chục bài, tuy không phải dạng top hit như Lầm, Kiếp Nghèo, hay Em Đi Rồi của cố nhạc sỹ Lam Phương, nhưng cũng có vài ca sỹ hát karaoke bài của mình. Ấy vậy mà, hắn sửa tất cả các câu mình viết! Và ngay trước mặt mình. May mà lúc đó đã 39 tuổi nên không nổi đóa. Sau khi hắn về, mình ngồi suy nghĩ lại thì thấy Alban đúng.

Hồi giờ mình cứ bắt chước các bài báo viết sao thì mình viết theo thôi. Mấy ông GS cũng không phản đối. Thế là mình chưa bao giờ đặt nghi vấn cách viết đó!

Và rồi mình quyết định học cách viết báo cho rành mạch để lần sau không bị Alban chỉnh nữa. Kết quả là mình viết bài báo *'How to effortlessly write a high quality scientific paper in the field of computational engineering and sciences'*, tập hợp lại những gì Alban, Stéphane và mình đã biết và học được từ những người khác. Bài này mình đứng tên với Stéphane và Alban. Xin mời xem Chương 27, ở đó mình trình bày viết như thế nào cho tốt và có link tới bài báo này. Cái hay của bài báo này là giờ có sinh viên mới thì mình chỉ đưa bí kíp cho nó, khỏi mất công giải thích hoài.

Sau này quả thật Alban ít có cơ hội để chỉnh kỹ năng viết của mình. Cảm ơn Alban đã dạy cho mình bài học quý giá. Sau này Alban còn dạy mình nhiều thứ, chẳng hạn `git`, `pythontex` và vài thứ khác (`tikz`). Đó là cái hay của việc làm việc với người trẻ tuổi.

Một điều đáng tiếc là Alban không còn làm việc ở Monash mà chuyển sang Đại học Deakin, cách Monash tầm 100 cây số. Vậy là hết người chém gió ở trường! Từ cuối năm 2019 đến giờ chưa gặp lại. Giờ thì nhà Alban đã có thêm thành viên mới: một cậu nhóc kháu khỉnh.

Phương pháp B là một sở thích của mình thôi. Hồi làm ở TU Delft thì biết nó nhưng mà lúc đó phải lo cặm cụi bò để gặp siêu mẫu nên bỏ qua hot girl B này. (Lúc đó siêu mẫu là số một). Sau này lúc làm hậu tiến sỹ ở Anh với Stéphane thì có thời gian nên mình tìm hiểu nó. Chuyện là Stéphane thuê mình qua mà lúc sang Anh ổng báo thích làm gì thì làm. Như mọi khi, mình ghi chú cẩn thận những gì học được vào một PDF. Sau này lúc qua Úc, một hôm đi trong công viên thì tự nhiên có một ý tưởng về B và thế là viết một bài về nó năm 2017. Không ngờ nhờ bài đó mà quen với Alban. Sau này, khi Tushar (học trò mình) xong NCS thì Alban có tiền cho Tushar làm hậu tiến sỹ trong vòng 3 tháng, trước khi Tushar sang Anh. (Mình vì mãi ca bài *Nghèo* của cố nhạc sỹ Lam Phương nên không có tiền cho học trò, phải nhờ Alban).

Phương pháp B này không gì xa lạ mà là chưởng pháp Ảm Nhiên Tiêu Hồn Chưởng do Độc Thủ Đại Hiệp Dương Quá sáng tạo ra trong khi tuyệt vọng chờ đời Cô Cô 16 năm ròng rã. Sau này Dương đại hiệp, sau khi vô địch thiên hạ rồi, xuất bản chưởng pháp này trên tạp chí Nature danh giá. Mình và Alban học từ đó và hiệu chỉnh nó cho thêm phần Ảm Nhiên, và thêm phần Tiêu hồn thôi. Điều này ngụ ý là thật khó khăn để tạo ra một phương pháp hoàn toàn mới, để người đời sau gắn tên mình với nó.

Năm 2004 mình tình cờ quen Stéphane người Pháp bằng cách chủ động liên lạc ổng, và 15 năm sau mình lại tình cờ quen một người Pháp khác. Lần này thì Alban liên lạc mình và mình thì như ăn mày gặp phải chiếu manh. Và để kỉ niệm hai sự gặp gỡ này Stéphane, Alban và mình đã viết một quyển sách về phương pháp B, chủ yếu từ PDF vô thưởng vô phạt kể trên. Sách đã được nhà xuất bản Springer in năm 2023 (Nguyen et al., 2023).

Mối tình trẻ-già này (Alban nhỏ hơn mình nhiều lắm, chắc khoảng tầm 10 t) đang gặp một trục trặc. Số là gần đây mình chỉ thích lên FB chém, còn Alban là ngựa non háu đá nên vẫn làm việc miệt mài. Mình nói thẳng với nó: anh mất động lực rồi cưng (thích người miền Nam cái từ này ghê). Tưởng nó sẽ nói "cưng nghỉ ngơi đi, em gánh team cho". Nào dè ... nó giao việc cho làm! Mà mình không làm nổi. Để lâu quá ... thành ra Alban làm luôn. Nếu tình trạng này kéo dài thì cuộc tình Pháp-Việt sẽ có nguy cơ đi Germany. Mình không muốn tí nào. Làm sao đây các chiến hữu FB?

Ngày 11 tháng 11 năm 2022

# Chương 17

# Truyện kiếm hiệp và đá banh

MÌNH thì chỉ có hai đam mê thôi. Đam mê là cái gì mà chúng ta sẽ làm ngay, bỏ tất cả cũng được. Mình mê đọc truyện kiếm hiệp và đá banh.

Vậy truyện kiếm hiệp (KH) đến với mình như thế nào? Như đã đề cập ở những phần trước, nhà mình những năm 80 và 90 không có TV, không có radio, không có tủ sách. May mắn là mẹ mình thích đọc truyện. Một hôm mình xuống bếp giúp mẹ coi nồi cơm (hồi đó nhà mình hay nấu bằng rơm hai mẹ con lên núi Ngự Bình cào đem về) và bên cạnh bếp mình thấy có quyển sách. Không có gì làm (buồn chán đôi lúc rất quan trọng), mình cầm quyển sách này lên, lật ra xem thử. Rồi mình bị hút vào thế giới này lúc nào không hay. Mình đã mê truyện chưởng và không thể nào thoát ra được từ đó. Thời gian đầu thì hai mẹ con đọc với nhau, rồi sau đó công lực mình cao quá nên đọc một mình. Có lẽ mẹ mình cho tiền thuê truyện chưởng. Tức là, mình đang đọc truyện kiếm hiệp một cách chính thống. Không nhớ là đọc gì vì lúc đó còn nhỏ, chắc là lớp 4/5. Mình mê truyện kiếm hiệp đến độ được đi Sài Gòn lúc hè lớp 5 mà còn không thèm. Sau khi bị ba mẹ thuyết phục, mình chịu đi SG, nhưng lúc đã vào Sài Gòn thì không chịu đi Thảo Cầm Viên, chỉ muốn ở nhà đọc truyện. Ghê thật, mình cũng không hiểu luôn.

Ngoài sở thích đọc truyện thì mẹ mình còn truyền cho mình đam mê xem phim. Ba mình thì chưa bao giờ xem phim!

Sau đó thì nhà mình chuyển lên ga Huế sống (gần nhà ôn Vui, chú Lễ, anh Bé). Lúc này thì mẹ mình, không biết nghe ai xúi dại, mà cấm mình đọc truyện chưởng! May mắn thay anh Bé có một người bạn là anh Vinh. Anh Vinh thì siêu kiếm hiệp luôn và anh ấy có tiền (thứ mà mình không có). Anh Vinh có thích dì Nghi của mình không thì mình không biết, nhưng anh sai mình đi thuê truyện rồi hai anh em đọc chung. Ngoài nhà ôn Vui là nơi đọc truyện lý tưởng thì mình còn hai nơi đặc biệt và hoàn toàn trái ngược nhau để đọc truyện. Một là trốn dưới bàn thờ đọc. Dì Nghi quét nhà rồi phát hiện. Phải tìm chỗ khác thôi, và đó là cái toilét. Chỗ này không ai phát hiện nhưng mà không thể ở đó lâu được!

Mình đi thuê truyện nhiều đến nỗi mà trở thành khách quen. Mà khách quen thì được đặc ân đọc truyện mới tinh: tức là người đầu tiên đọc truyện mà tiệm cho thuê truyện mới mua về. Mình cứ cầm quyển truyện mân mê, uốn nắn, có khi ngửi mùi giấy mới thơm lừng. Mình không nhớ là đã từng đắm đuối như vậy với bất cứ quyển sách giáo khoa nào! Sau khi đọc xong thì phải cho chủ quán ý kiến là truyện có hay không.

Đó là đọc truyện ở nhà, còn trên lớp học thì sao? Trong giờ học thì luồn quyển truyện vào trong quyển sách giáo khoa. Tưởng OK mà không. Có cô dạy thể dục mà đóng vai ác (sau này mới biết là mẹ của bạn Phương học Nguyễn Huệ). Cô tịch thu đem về nhà! Thế là mình và các bạn phải về nhà cô để xin lại. Hú hồn.

Đọc nhiều nhưng vì phải đọc nhanh nên chẳng nhớ gì cả. Nhớ có tác giả Nhất Giang, Trần Thanh Vân ... Không thấy Kim Dung hay Cổ Long. Cũng không biết vì sao mà thích truyện kiếm hiệp nữa. Hèn chi bạn Hải Vân (đúng rồi, là bạn cho mình đau đớn thể xát đó) cứ nói: "đọc chi cái đồ vô bổ"!

Mê truyện là thế mà từ lớp 9 đến 12 mình không đọc. Lúc đó mình đã xác định mục tiêu cần làm gì rồi. Đó là một ưu điểm trời cho.

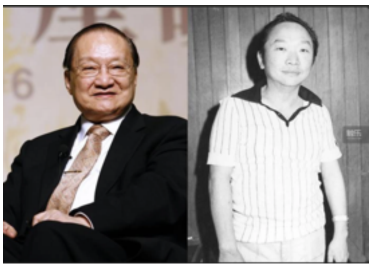
Rồi sau khi vào đại học, ở Sài Gòn, có ma mới cấm mình đọc truyện. Nhớ là có một hè, có một số bạn đi mùa hè xanh, có một số bạn về quê. Mình ở lại đọc truyện! Nói cho hay vậy thôi, có lẽ mình ở lại học trả nợ (Nói tới đây mới thấy BK nó ác, học rớt không được thi lại mà phải học lại. Có lẽ thấy rứa thì vô nhân đạo quá, trường tổ chức học hè cho các môn rớt). Lí do gì thì không biết nhưng mà lúc này mới biết đến Cô Gái Đồ Long, Tiếu Ngạo Giang Hồ, Thiên Long Bát Bộ, Anh Hùng Xạ Điêu, Tiểu Lý Phi Đao. Ôi, đây mới là đỉnh cao của truyện kiếm hiệp. Rồi từ đó đến tận bây giờ mình không đọc lại truyện kiếm hiệp. Có thử nhiều lần mà không đủ kiên nhẫn. Có nhiều khi nghe audio truyện trước lúc đi ngủ. Giờ thì chuyển sang xem phim. Mỗi năm đều gặp lại Lệnh Hồ Xung-Doanh Doanh, Trương Vô Kỵ-Triệu Mẫn, Sở Lưu Hương, Lục Tiểu Phụng ...

Kiếm hiệp với mình là vậy thôi, là kỷ niệm thơ ấu. Một thời không có gì để làm, không có gì để chơi. Thả mình vào thế giới kiếm hiệp mình bắt gặp rất nhiều đồ chơi: đao có, kiếm có, đại hiệp có, ác nhân có, tình yêu cũng có và hận thù cũng không thiếu. Một thế giới của Thiện và Ác, Chánh và Tà. Một thế giới rất khác với thế giới thật. Nơi đó chỉ có hai phái Hắc Bạch, không là đen thì trắng. Rất rõ ràng phân minh. Một thế giới mà chúng ta không phải lo nghĩ cơm áo gạo tiền, chỉ việc theo đuổi lý tưởng của mình thôi. Dù đó là thống nhất thiên hạ hay là mỗi ngày vẽ lông mày cho người mình yêu. Tự dưng đang lý tưởng như vậy ông Kim Dung lại cho xuất hiện một nhân vật không biết màu gì. Đó là Nhạc Bất Quần. Lúc đầu ông màu trắng, mà sau đó ông ăn cái gì mà ông chuyển qua màu đen. Nhưng nhân vật này mới phản ánh đúng con người thật: thật khó để biết ai là tốt ai là xấu.

Vậy Kim Dung và Cổ Long mình thích ai hơn? Để trả lời câu hỏi này thì chúng ta phải tìm hiểu xuất thân của hai vị cao thủ võ lâm này nhé. Tôi đọc truyện của họ, quan tâm gì đến họ xuất thân thế nào. Xin đừng xem thường cái chuyện này; nếu chỉ đọc cho quên ngày đoạn tháng thì không sao, chứ nếu đọc để hiểu nhân tình thế thái thì phải hiểu con người tác giả đã viết ra tác phẩm mình đang đọc.

Kim Dung tên thật là Tra Lương Dung sinh ra trong một gia tộc khoa bảng danh giá. Ông nội là Tra Văn Thanh làm tri huyện Đan Dương ở tỉnh Giang Tô. Tra Văn Thanh về sau từ chức, đến đời con là Tra Xu Khanh bắt đầu sa sút; Tra Xu Khanh theo nghề buôn, sau sinh 9 đứa con, Kim Dung là con thứ hai.

Cổ Long tên thật là Hùng Diệu Hoa. Năm 1952, Cổ Long theo cha mẹ di cư sang Đài Loan sinh sống. Do hoàn cảnh khó khăn, ông thường phải chứng kiến cảnh cha mẹ bất hòa, gây gổ với nhau. Sau đó, gia đình tan vỡ, cha mẹ chính thức ly dị. Bởi lý do đó mà ông bỏ nhà, sống một mình tại trấn Thụy Phương, ở ngoại ô quận Đài Bắc, tự lực tìm cách sinh nhai và học hành. Do đó, thời thơ ấu, Cổ Long luôn cảm thấy lẻ loi, cô độc. So với một Kim Dung xuất thân danh gia, học hành bài bản, vẻ ngoài ưa nhìn, Cổ Long tướng mạo tầm thường, cao chỉ 1,65 mét, đầu to như đấu, mắt nhỏ miệng rộng (Hình 17.1).



Hình 17.1: Kim Dung (trái) và Cổ Long.

Mình thích cả Kim và Cổ nhưng mà rất dễ hiểu mình thích Cổ Long hơn. Vì mình thấy bản thân có nhiều điểm tương đồng với Cổ Long: xuất thân bình thường, cô đơn trong gia đình, ngoại hình không nổi trội. Cổ Long là người cô đơn trong gia đình và ông bù đắp bằng tình bạn. Ông có nhiều bạn và kết bạn qua rượu chè. Vì vậy trong truyện của Cổ Long chúng ta thấy tình bạn rất đẹp. Sở Lưu Hương thì có Hồ Thiết Hoa và Trung Nguyên Nhất Điểm Hồng, Lý Tầm Hoan thì có Tiểu Phi, Lục Tiểu Phụng thì có Hoa Mãn Lâu và Tây Môn Xuy Tuyết. Họ là những người bạn sống chết có nhau. Bây giờ thử xem các nhân vật của Kim Dung nhé. Quách Tĩnh có ai là bạn không? Không có mống nào. Lệnh Hồ Xung có bạn không? Không có luôn. Lệnh Hồ công tử có Hướng Vấn Thiên, nhưng mà là anh em kết nghĩa. Dương Quá, dù là người giao du rộng rãi, cũng không có tri kỷ. Đoàn Dự, Tiêu Phong và Hư Trúc là anh em kết nghĩa như Lưu Bị, Quan Vân Trường và Trương Phi thời xưa. Các nhân vật này không có bạn vì Kim Dung không thiếu cái đó.

Hơn nữa truyện Cổ Long câu văn ngắn, chỉ nói điều cần nói. Cái này giống tính cách của mình. Ngoài ra các câu chuyện của Cổ Long chỉ xảy ra trong quán rượu, hay đỉnh núi. Rất dễ hiểu, không như tác phẩm của Kim tiên sinh, cứ phải dính vào hoàn cảnh lịch sử. Truyện Cổ Long rất hợp cho người xuất thân bần hàn như mình.

Hồi xưa đọc truyện KH nhiều là vậy mà mình chưa bao giờ hỏi câu hỏi: đọc truyện này thì học được cái gì? Thật là một thiếu sót! Giờ nghĩ lại mình thấy rằng truyện KH khuyến khích chúng ta theo đuổi cái thiện, theo đuổi cái gì mình nghĩ làm mình hạnh phúc. Trương Vô Kỵ là một ví dụ; anh này không thèm làm giáo chủ Minh giáo, mà thích đi vẽ lông mày cho Triệu Minh.

Nhưng mà truyện kiếm hiệp cũng có những điều cần suy nghĩ. Một điều dễ thấy ở truyện KH là mâu thuẫn giữa vai chính–thường đẹp trai và rất trẻ, tầm 18-20 tuổi–và vai ác, thường thì là một ông già, hoặc trung niên, tuổi tầm 50-60. Như vậy giữa 2 nhận vật này có một sự chênh lệch về nội công khoảng 30 năm. Mặc dù truyện KH hay dùng câu nói "Quân tử trả thù mười năm không muộn", nhưng mình thấy các vai chính của chúng ta giải quyết kẻ thù rất là nhanh. Khoảng vài năm là cùng. Như vậy thì lấy đâu ra công lực đủ để thắng vai ác? Tác giả truyện KH tìm ra một lời giải rất hay: nhân vật chính tình cờ lượm được bí kíp. Có nhiều dạng lắm: ăn nhân sâm Hàn Quốc nè, uống máu rắn nè (Quách Tĩnh trong Anh Hùng Xạ Điêu), hay là ăn nhãn lồng Hưng Yên nè (nếu tác giả là người Việt Nam), hoặc được người khác truyền công lực cả đời cho nè (như Hư Trúc trong Thiên Long Bát Bộ). Và thế là, trong một khoảng thời gian siêu ngắn, vai chính của chúng ta đã có võ công bằng (hoặc hơn) tất cả những người đã tu luyện cả đời! Đó là truyện mà, là hư cấu, ai quan tâm! Nhưng mà hình như mình thích như vậy! (Bạn tự hỏi bản thân có thích như vậy không?)

Mình nhớ không biết ai tiêm nhiễm vào đầu mà mình rất là khoái anh chàng nào đi học không mang cặp. Chỉ nhét một quyển vở sau đít quần, viết bi dắt vào bọc áo. Vào học thì toàn nói chuyện, không học thì đi đá banh, hay đánh bi da. Mà học siêu giỏi! Ôi, sao mà mình thích cái anh chàng này thế. (Hình như bên Quốc Học thời mình có mấy anh giống mình miêu tả). Các bạn trẻ, có thể có vài anh như vậy, nhưng mà việc học thì có thể chứ làm gì khác to tát thì mình không tin. Nhà Toán học cổ đại Euclid (nếu bạn đang học trung học và ghét hình học Euclid, thì bạn hãy trách ông này; cách nay lâu lắm rồi ông đã viết quyển sách "Elements" mà từ đó chúng ta có cái gọi là hình học Euclid mà bạn đang học đó; Chương 33 sẽ bàn về Euclid) từng nói, khi vua Ai Cập ngỏ ý xem có cách gì dễ để học Toán không:

> *"thưa bệ hạ, không có con đường hoàng gia để đến với hình học".*

Mình nghĩ ông nói quá đúng. Giáo viên Toán cũng thường nói: "Toán học không phải là môn thể thao có khán giả"; có nghĩa là trong Toán học chúng ta phải là diễn viên, nhân vật chính, chứ đừng làm khán giả. Phải có mồ hôi đổ ra thì mới có quả ngọt để mình lượm. Ai tin anh Phính? Mình xin dùng dữ liệu từ quyển *Originals: How Non-Conformists Move the World* của Adam Grant (Grant and Sandberg, 2016). Trong sách này, Grant viết "Hãy xem trường hợp của Shakespeare: chúng ta đã quá quen thuộc với một số ít tác phẩm kinh điển của ông, mà quên mất rằng trong vòng hai thập kỷ, ông đã viết 37 vở kịch và 154 bản sonnet. Nhưng không phải tất cả những gì ông viết là tuyệt tác. Trong cùng khoảng thời gian 5 năm mà Shakespeare đã cho ra đời 3 trong số 5 tác phẩm nổi tiếng nhất của ông—*Macbeth, King Lear* và *Othello*—ông cũng cho ra đời tác phẩm tương đối trung bình *Timon of Athens* và *All's Well That Ends Well*, cả hai đều được xếp vào hàng dở nhất trong các vở kịch của Shakespeare và liên tục bị chỉ trích vì văn xuôi không trau chuốt, cốt truyện và sự phát triển nhân vật không đầy đủ."

William Shakespeare, người được coi là nhà văn viết bằng tiếng Anh vĩ đại nhất và là nhà viết kịch nổi tiếng của thế giới, mà còn phải làm việc cật lực như vậy mới cho chúng ta vài tác phẩm kinh điển thì bạn nghĩ thế nào về các nhân vật của Kim Dung? Mà Shakespeare không phải là một trường hợp duy nhất. Xin xem thêm sách của Grant để biết rằng chưa ai là ngoại lệ cả!

Đọc truyện KH không giúp các bạn trẻ phát triển tư duy phản biện, không giúp bạn phát triển trí tò mò và rồi trí tưởng tượng. Có gì trong truyện KH của Kim và Cổ (mình không bàn đến truyện tiên hiệp vì mình chưa đọc loại truyện này) để chúng ta phát triển trí tưởng tượng? Câu chuyện của Cổ Long chỉ loanh quanh những con người bình thường, những chốn cũng rất đổi bình thường như quán rượu, đỉnh núi, hay màn đêm. Truyện của Kim tiên sinh có hoành tráng hơn, với bố cục lịch sử Trung quốc, với cảnh non hùng vĩ, nhưng cũng chỉ là những thứ đã có trong thế giới này. Vậy thôi.

Nếu được quay lại thời gian, mình chỉ đọc, chứ không say mê, Kim và Cổ và cố nhận ra được điểm yếu của chúng. Thay vào đó, hãy đọc những tác phẩm kinh điển của nhân loại để phát triển tư duy phản biện và trí tưởng tượng. Mà Phính ơi, tác phẩm nào mới được cơ chứ? Chương 24 sẽ trả lời câu hỏi này. Nếu có thể quay lại thời trẻ, mình sẽ đọc say mê, đọc lui đọc tới *Tam Quốc Diễn Nghĩa* của La Quán Trung–một trong tứ đại danh tác của văn học cổ điển Trung Hoa. Tại sao? Vì nó dạy cho chúng ta quá nhiều bài học. Chỉ riêng các cuộc nói chuyện giữa Tào Tháo và các mưu sỹ (Tuân Úc chẳng hạn) cũng dạy cho chúng ta tư duy phản biện, phân tích tình huống. Cách Tào Tháo vui vẻ chấp nhận thất bại còn Chu Du thì ói máu vì thua Gia Cát Lượng cũng là một bài học đáng giá ngàn vàng.

Thích kiếm hiệp là vậy nhưng mình lại không thích học võ, cũng không thích đánh nhau. Không hiểu vì sao mà ba mình quen một võ sư trẻ tuổi, và người này đồng ý dạy võ cho mình miễn phí. Mình đi học vì không muốn làm ba mình cụt hứng. Đi học vài buổi, toàn là đứng tấn mỏi chân thấy mồ, mình không học nữa. Và từ đó tới giờ chỉ có biết một môn thôi, đó là *Lăng Ba Vi Bộ*, bỏ của chạy lấy người. Không thích đánh nhau mà mình cũng đã có một vài trận nhớ đời. Mà toàn là đánh nhau với người quen, có khi quen thân. Lần đầu là năm lớp năm: đánh nhau với một thằng bạn ở nhà thờ Phú Cam (Huế), có nhiều bạn đứng xem. Không nhớ nguyên nhân và kết quả. Lần thứ hai, là đánh nhau với Thái Bình, như đã kể ở phần trước. Mất luôn một người bạn, mà cũng không hiểu lí do đánh nhau là gì. Lần thứ ba thì đánh nhau với chú Tiến, thật ra chú thì có muốn đánh nhưng mình *Lăng Ba Vi Bộ* nhanh quá. Số là, mình đang ngồi học, và Đô–con chú Tiến–chơi ồn ào ngoài cửa sổ. Mình nhắc nó nhiều lần nó không nghe, và có lẽ lúc đó đang làm bài tập mà không ra nên mình ra đẩy nó một cái. Ai dè, cái đầu nó va trúng cái tường xi măng, chảy máu. Nó chạy về gọi chú Tiến, mình thấy chú hùng hổ chạy lại là biết có chuyện không hay. Mình dọt lẹ. Biết là không chạy nhanh hơn mình, chú lấy cái ly nước ném về mình. Mình thụp người xuống (như Thiên Cân Trụy vậy), cái ly vọt qua đỉnh đầu. Hú hồn.

Lần đánh lộn gần cuối cùng là mình đánh người ta, còn người ta quân tử không chấp tiểu nhân nên đứng yên. Chuyện này, xấu hổ, xảy ra trên xứ người. Số là lúc học NCS ở Hà Lan, nhóm Việt Nam hay đi đá banh. Có một anh người Hà nội (giảng viên DH Kiến Trúc thì phải), cũng gần 40 rồi, anh này có cái tật là không đá banh mà cứ đá giò mình. Rồi thì mình tức khí song phi một phát.

Thôi chuyển qua đá banh nhé. Mình không nhớ lần đầu tiên mình tiếp xúc với trái banh. Nhưng mà được chia ra 2 bên đá banh thì phải là lúc nhà chuyển lên ga Huế. Trước mặt ga Huế có một cái sân xi măng rất to. Đó là nơi con nít ở ga Huế chiều chiều ra đá banh. Một hôm mình ra sân ga và thấy các bạn đang đá, rất vui. Mình xin vào đá. Lúc đó chắc là lớp 7. Mình gắn bó với cái sân xi măng này cho đến lớp 9. Mình không đá banh hay nhưng mà ít người (ít nhất là trong phạm vi xung quanh ga Huế) đam mê đá banh hơn mình. Mình nhớ là chiều nào trời mưa thì mình rất buồn, buồn thúi ruột. Buồn là vì nhiều người sẽ không ra sân và thế là mình không được đá. Cái môn này không chơi một mình được! Mình trừ có bão còn lại thì không thiếu buổi nào. Hồi đó chỉ có banh nhựa thôi, không có banh da. Mình nhớ một hôm có ông Tây có trái banh da, và ông đang chờ tàu nên ông đá banh chung, dĩ nhiên là dùng banh của ông. Gần giờ ông lên tàu, tụi mình cố tình đá trái banh lên trên mái nhà ga. Ông không leo lên được nên sau đó trái banh dĩ nhiên là của đội ga!

Lên cấp 3 thì ít đá banh vì mình phải tập trung hết sức cho việc thi đại học. Nhớ nhất là đi đá banh với Huy Sở và xóm hắn. Vô sân Quốc Học đá. Buổi tối có khi ra đường gì gần trường Vĩnh Ninh đá. Với lớp cấp 3 thì ít đi đá, lúc có giải trường thì cũng dự bị thôi. Nhỏ con và ốm yếu quá. Lên đại học thì cũng vậy. Lúc đó hay đá banh với Lựu, có khi còn đi đá banh với người làng của Lựu. Đông lắm!

(a) Đội tuyển Delft FC

(b) Delft FC vô địch giải HL

(c) Đá banh cuối tuần

(d) Đội VN sang Ba Lan thi đấu.

Hình 17.2: Sự nghiệp đá banh ở Hà Lan.

ngỏ ý Sự nghiệp đá banh của mình chỉ khởi sắc lúc qua Pháp và Hà Lan (Hình 17.2). Răng giống Quang Hải vậy ta? Vui nhất là đá banh giải trí cuối tuần. Có lúc đá với các bạn Trung Quốc. Phần lớn là thua, nhưng mình nhớ mãi mình có ghi một bàn vào đội này. Rất là tự hào! Rồi thì sự thù địch giữa Delft và đội Amsterdam. Mình cũng không biết nguyên do.

Có một năm Delft đứng ra tổ chức đăng cai giải vô địch bóng đá sinh viên Việt Nam ở Hà Lan. Và hình như đội Amsterdam, vì lí do nào đó, không tham dự. Và đó là điềm lành cho Delft FC. Và đội mình vô địch thật! Nhưng mà chuyện mình nhớ nhất là có đánh lộn trên sân. Mình thì thuộc loại công tử bột nên tôn chỉ là "người không đánh tui nghen, và tui cũng không đấm người". Lúc đó Hùng, người trong ảnh, (đá rất hay và hay lừa bóng nên bị nhiều hậu vệ ghét–bởi vậy, mình không bao giờ lừa, có bóng là mình đá sang bạn khác.) bị một số đứa tới đánh. Và lần đầu tiên trong đời, mình bay tới đạp tụi đó túi bụi. Nhưng sau đó thì mình đi trốn, vì tụi đó cầm dao hay vũ khí gì đó.

Cuối cùng thì phải kể lại chuyện đi thi đấu Euro. Số là lúc đó đại sứ quán VN tại Hà Lan là ở thành phố The Hague. Mà thành phố này thì rất gần Delft. (Thật ra ở cái nước bé như lỗ mũi này, đi đâu cũng gần). Người mà làm trùm ở đại sứ quán (gọi là gì thì mình quên hoặc không biết thật) thì mê đá banh, nghe nói lúc trẻ còn tham gia giải A3 cơ. Bác này hay dẫn đội xuống Delft đá banh. Rồi thình lình có giải bóng đá người Việt ở châu Âu ở Ba Lan. Thế là bác đại sứ quán kêu gọi mọi người ở HL tham gia.

Tham gia thì tham gia. Rồi mọi người đi sang Ba Lan. Gặp rất nhiều người Việt ở đó. Mà không phải sinh viên. Có cái chợ trời toàn người Việt. Có khi còn đông hơn quận 13 ở Paris. Ở Hà Lan thì ít người Việt lắm. Rồi vào thi đấu, và có người trong một đội nào đó bị gãy chân! Thì ra có nhiều đội thành phần không phải sinh viên mà toàn là Cafu, Maldini, Roberto Carlos. Họ là Việt kiều và thi đấu bán chuyên nghiệp! Mình không dám vào sân luôn. Lần đầu tiên trong đời có đá banh mà mình tránh.

Mình là người hiếu thắng trong khi chơi thể thao: chơi cờ tướng với thân phụ đã 77 tuổi mình cũng đánh hết sức, chơi đá bóng với em con cậu ruột nhỏ hơn cả chục tuổi mình cũng đá hết sức. Chỉ có chơi với hai đứa con thì mình 'thả' để dụ nó chơi thể thao thôi. Mục đích tối thượng của thể thao không phải là anh A thắng anh B hay nước C thắng nước D. Mục đích cao nhất của thể thao là xem con người có thể làm đến mức nào: chạy 100 m mất bao nhiêu giây chẳng hạn, hay bay quanh trái đất một vòng trong bao nhiêu ngày. Do đó, trong thể thao Phính cứ hết sức mà chiến, không quan tâm đối thủ là ông già hay đứa con nít.

Ngày 10 tháng 10 năm 2022

# Chương 18

# Tại sao một người thiếu tự tin?

NĂM 2004, mình liên hệ với tiến sĩ Stéphane Bordas. Sau khi ổng đồng ý hướng dẫn mình thì bắt tay làm việc. Ông hướng dẫn mình từ xa qua email. Nghe sao giống covid vậy ta. Sau một thời gian làm việc với ổng mình thấy rất ... sướng. Chỉ một việc nhỏ mình làm được là ổng email cho mình: "You're an ace, you've made my day". Tạm dịch là: "P, mày là một con xì dách, mày đã làm cho tau có một ngày tuyệt vời". Ông nói khéo hay ổng thật lòng mình không thể nào biết, nhưng mình không cần biết! Vì mình thích như vậy. Chưa ai nói với mình như vậy cả! Chưa bao giờ. Và nó khiến mình làm việc hăng say hơn. Ông ta có lợi, mình có lợi, cái mà người Anh có cụm từ *win-win situation*. Còn gì bằng.

Người Việt Nam, vì lí do gì không biết, mà rất kẹo lời khen, và rất hào phóng với lời chê!!! Hầu như mình không được ai khen vì thi đậu đại học. Vậy mà, nhiều người cứ đem câu đố đến thách. Thời gian chưa được 1 tiếng đồng hồ, thấy làm không được là "Chao ơi, bài dễ vậy mà làm không ra". Những người như vậy sau này có hỏi mình 2 + 2, mình cũng không dám nói là 4! Một vấn đề gì dễ hay khó có tính tương đối. Không biết những người như vậy sẽ nghĩ gì khi Newton[†] hiện hồn về nói với họ: tích phân và đạo hàm dễ vậy sao học hoài không được vậy???

Lúc mình làm tiến sỹ ở Hà Lan (ban đầu mình đi sang Pháp làm tiến sỹ nhưng mà, chuyện đời tôi, không suôn sẻ, bỏ và sang Hà Lan), mỗi tháng là họp với giáo sư một lần. Mà một hai năm đầu có kết quả gì đâu. Mình lo lắm! Vào họp, ông giáo biết mình chẳng có mẹ gì nên ông nói: "thời gian dạo này sao trôi qua nhanh vậy P". Rồi ông vòng vo tam quốc một hồi cho mình đỡ áp lực. Chưa bao giờ, chưa bao giờ ông nói: "P, sao mà ngu vậy em"?

Một điều nữa mình thấy khác biệt giữa Ta và Tây là vậy. Một hôm Stéphane Bordas tổ chức đi dã ngoại cho nhóm nghiên cứu của ổng ở một công viên rất đẹp. Và ông dẫn gia đình theo, trong đó có 2 hay 3 con của ổng tầm 6, 7 tuổi. Lúc tiệc tàn mọi người ra về, nhưng một đứa con của ông đang leo trên cây và nhất định không chịu xuống. Mình ngồi và thích thú quan sát, xem ổng sẽ làm gì. Ngạc nhiên (cho mình), ông ta không nổi nóng, mà ngồi chờ cho thằng bé leo xuống. Cũng phải dăm ba phút nó mới chịu xuống. Và không chỉ Stéphane làm vậy. Sao này khi có con, dắt con đi chơi công viên mình hay gặp tình huống tương tự. Răng không hét lên: "xuống không? Đánh cho tét mông giờ" như cha mẹ VN ta? Vấn đề được giải quyết một cách nhanh chóng!

Cha mẹ VN thì suy nghĩ khác. Họ chặn đứng ngay từ đầu mọi rắc rối: "không được làm cái này, không được làm cái nọ". Đúng, các bậc cha mẹ VN rất thông minh: hành động của họ cứu họ rất nhiều thời gian, khỏi phải xử lý những rắc rối do con họ tạo ra. Trớ trêu thay, khéo quá hoá vụng (sao ông cha ta giỏi thế), họ triệt tiêu luôn sự sáng tạo của trẻ nhỏ!

[†]Isaac Newton, tên đầy đủ là Ngài Isaac Newton, (1643–1727), nhà vật lý và toán học người Anh, người là nhân vật đỉnh cao của cuộc Cách mạng Khoa học thế kỷ 17. Trong quang học, khám phá của ông về thành phần của ánh sáng trắng đã tích hợp hiện tượng màu sắc vào khoa học ánh sáng và đặt nền móng cho quang học vật lý hiện đại. Trong cơ học, ba định luật chuyển động của ông, những nguyên tắc cơ bản của vật lý hiện đại, dẫn đến việc hình thành định luật vạn vật hấp dẫn. Trong toán học, ông là người đầu tiên khám phá ra phép tính vi tích phân. Newton's Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Các nguyên tắc toán học của triết học tự nhiên, 1687) là một trong những tác phẩm đơn lẻ quan trọng nhất trong lịch sử khoa học hiện đại.

Mình là người tay chân cực vụng về. Trong đời mình hiếm khi sửa được cái thứ gì trong nhà lúc chúng bị hư cả. Dĩ nhiên là di truyền nhưng mà thành thật thì ba mình cũng chịu một phần trách nhiệm trong chuyện này. Thay vì cho mình cơ hội cải thiện, ông nói: "để ba làm cho". Mình hiểu vì sao ông làm vậy. Một là ông thiếu kiên nhẫn, hai là ông đi làm rất vất vả rồi, giờ còn phải dọn dẹp cái mớ hỗn đốn do mình tạo ra nữa thì quá sức. Cũng có thể ba mẹ mình nghĩ rằng học là tất cả, cần chi mấy thứ tay chân kia. Mình không phải đang phàn nàn gì cả; ở hoàn cảnh đó có lẽ mình cũng làm tương tự. Phần còn lại là do mình. Mình đam mê truyện kiếm hiệp mà trong cái thế giới–tuyệt đẹp nhưng ảo tưởng–đó, các nhân vật chỉ làm chuyện kinh thiên động địa, có thấy Sở Lưu Hương đi quét nhà, hay đi sửa cái bàn bị gãy đâu. Mình thích cái thế giới lắm. Và như thế, mình trở nên một công tử bột đúng nghĩa!

Ấy vậy mà, lúc xuống chơi nhà Phùng, mình sửa được cái quạt máy! Không có chi to tát với các bạn nhưng với mình là cả một thành công to lớn. Sao mình làm được? Nhà Phùng chỉ có ba chị em gái nên việc này họ trông chờ vào đấng mày râu là mình. Họ không chỉ trích mình, và hơn nữa có ba cô nương cùng nhìn vào mình thì dù bắt mình lên núi Ngự Bình hái Tuyết Liên ngàn năm về cho các cô làm đẹp mình cũng làm, xá chi là sửa cái quạt máy. Giờ mình hiểu sao mình thích về nhà Phùng chơi; ở đó mình cảm giác mình có giá trị. Nhưng rõ ràng mình không hứng thú với mấy việc đụng tay chân này. Nếu ba cô nương PPP này không yêu cầu thì mình cũng kệ cha cái quạt.

Vì là một người vụng về tay chân và cả miệng lưỡi nên mình lo lắm khi lúc lập gia đình phải ở nhà vợ (dù chỉ là ở tạm trước khi đi nước ngoài). Mình sợ rơi vào cái cảnh mình phải chứng tỏ ta là đàn ông đích thực nhé. Rồi cái gì đến thì sẽ đến, một hôm bóng đèn điện nhà vợ bị hư. Thấy mẹ vợ bắt ghế sửa thì mình không thể ngồi yên, mình nói 'mẹ để cho con'. Nói mà lo lắm, rồi thì mình sửa cái bóng đèn. Kết quả sao, các bạn đoán được không? Cái bóng đèn từ chổ còn thoi thóp thì giờ chết ngắt luôn! Sau đó, mẹ vợ không bao giờ cho mình đụng vào cái gì trong nhà nữa.

Cái gì phát triển từ nhỏ thì rất khó mà sửa đổi. Tới giờ trong sâu thẳm mình vẫn là một người thiếu tự tin. Và vì vậy mình không dám làm cái chi quá mới mẻ trong nghiên cứu! Đơn giản mình ngay từ lúc chưa bắt đầu đã có suy nghĩ là làm không được! Bây giờ mình làm việc với Alban, và mình thấy một sự khác biệt rõ rệt trong cách tiếp cận vấn đề. Khi gặp một vấn đề (mà chưa biết cách giải quyết) Alban tự tìm lời giải. Còn mình thì trước hết google xem có lời giải chưa. Mình nghĩ các bạn nên như Alban, sẽ làm được chuyện lớn.

Suy nghĩ kỹ lại thì còn một lí do nữa (ngoài chuyện mình không tự tin): lúc học đại học làm đồ án môn học, hay cả làm luận văn thì đều có đồ án/luận văn của sinh viên khóa trước, mình chỉ làm theo thôi. Đó là nguyên nhân chính mà sau này lúc làm nghiên cứu mình khó làm ra cái gì mới mẻ. Do đó, khi phải làm một vấn đề gì thì các bạn nên tự mình làm trước. Sai cũng được, miễn là bạn tự làm. Sau khi đã làm xong, có thể tham khảo lời giải của người khác, phân tích lời giải mình thua/hơn chổ nào.

Một điều mà các bạn nhỏ phải chịu là bị so sánh với một ai đó. May mắn cho mình là mình chưa bị so sánh với ai cả. Và do đó mình không có kinh nghiệm để chém gió về đề tài này. Vậy sao Phính lại đề cập nó? Bởi vì ai bị so sánh nhiều thì sẽ dẫn đến mất tự tin. Mà mình thì không muốn ai bị 'bệnh này' như mình cả!

Mình nghĩ tại sao tất cả chúng ta cảm thấy bình thường khi học khoa học do người Tây phát triển (Toán, Lý, Hoá, mọi thứ đều do họ tạo ra cả). Tại sao học tiếng Anh? Và nhất là tại sao làm mọi cách cho con cái đi học nước ngoài. Vậy sao không chấp nhận học về văn hoá, nếu nó là đúng đắn?

Các bạn ơi, làm ơn, bắt chước người Tây: **hào phóng lời khen, tiết kiệm lời chê, và không so sánh**. Làm như vậy con bạn sẽ không phải rơi vào hoàn cảnh như mình.

Ngày 30 tháng 8 năm 2022

# Chương 19

# Bài báo đầu tiên ở Hà Lan

MÌNH luôn mãi day dứt về bài báo đầu tiên ở Hà Lan. Bởi vì cái ý tưởng chính không phải do mình nghĩ ra! Giờ nghĩ lại thì thấy lời giải nó sờ sờ đó sao mình không thấy? Để giải thích chuyện này thì phải quay lại thời đi học.

Thôi hãy bỏ qua cấp 1 và 2 và lấy môn Toán làm ví dụ. Học Toán ở cấp ba thì hầu như mọi người được Thầy Cô giáo ra bài tập, rồi làm. Vấn đề là các bài tập này luôn có lời giải. Nếu là trong lớp thì cô cho suy nghĩ một lúc, khoảng 15 phút là cùng. Không tìm được lời giải thì cô giải luôn. Bài tập trong sách cũng có lời giải. Ở nhà, khi gặp phải một bài toán khó thì mình suy nghĩ một hồi, rồi không cưỡng lại được, giở sách ra xem bước đầu tiên là gì. Xong thì qua bài khác, rồi cứ lặp lại như vậy cho các bài khác. Mình không biết là đang mắc phải một sai lầm nghiêm trọng, nhất là cho người sau này phải làm nghiên cứu sinh.

Lên đại học tình trạng cũng vậy. Hầu như bài tập đều có lời giải sẵn. Không trong sách thì ở tiệm photocopy: lời giải từ người khoá trước. Thành ra mình không bao giờ bị rơi vào tình huống "bí" quá lâu. Hơi lâu một tí là mình xem lời giải! Mặc dù mình hiểu lời giải này, và gặp bài tương tự mình sẽ làm được. Nhưng nếu gặp bài khác một tí thì bó tay ngay! Tại sao? Vì mình không tự tìm ra lời giải. Nếu các bạn trẻ nghe thầy cô giải toán và nghĩ là mình hiểu. Không đâu. Đó gọi là illusion of competence, mình tạm dịch là *ảo tưởng sức mạnh*. Cái này tương tự việc bạn xem các cao thủ cờ tướng (như Nam Phương Công tử Lại Lý Huynh hay Tây Độc Nguyễn Thành Bảo) đánh trong một khoảng thời gian dài, nhưng kĩ năng cờ tướng của bạn không tiến triển bao nhiêu. Vì bạn có vắt óc suy nghĩ các nước cờ mô! Rất nguy hiểm! Chỉ khi nào, ngồi trên núi với cái đề bài thôi, và giấy trắng, mà bạn giải được thì đó là lời giải của bạn. Chưa giải được thì đừng xuống núi.

Bây giờ làm NCS mình gặp phải một bài toán mà không (chưa) có lời giải. Làm sao đây? Bó tay chứ làm sao. Mình không có kinh nghiệm tương tự trong quá khứ! Hai năm trời mà mình bó tay.

Hồi đó ngồi cùng phòng với mình có Oriol Lloberas Vall. Oriol là người Tây Ban Nha, và là dân Barcelona. Không biết sao nó chơi với mình. Và điều này có lợi cho mình rất nhiều. Như đã kể phần trước mình toàn chơi với người Việt, cho nên có Oriol thì mình cải thiện được tiếng Anh nói và nghe. (Học ở VN hồi đó, nói là giỏi Anh Văn nhưng chỉ là văn phạm thôi). Nhớ có lần mình mời Oriol đi lên The Hague vào ăn một quán Việt Nam. Mình gọi nhiều món trong đó có bánh khoái, ăn với rất nhiều rau. Oriol nói tụi bây ăn cả khu rừng luôn à. Sau khi trả tiền (tầm 100 euros cho cả hai) thì nó lại bảo mình ăn cả một gia tài. Mình rất thích Oriol hay người Tây là họ có những liên tưởng nhanh cho các sự việc khác nhau. Oriol thì dẫn mình tới một quán Thái ở trung tâm Delft. Và mình mê nhà hàng Thái từ đó. Bắt đầu là món khai vị, một chén súp tôm rất ngon, sau đó là món chính (giờ cũng không nhớ là món gì), vừa ăn vừa uống một chai bia (Heineken thì phải). Đang ăn thì bà chủ quán đi ra hỏi thăm xem mọi chuyện có ok không. Hay đi ăn trưa với Oriol thì mình mới thấy sự khác biệt giữa Hà Lan và Tây Ban Nha. Oriol ăn trưa hơn cả tiếng đồng hồ, còn người Hà Lan thì ăn nhanh.

Quay lại công việc nhé. Thật ra thì đề tài của mình ông GS giao cho Oriol làm rồi lúc Oriol làm thạc sỹ, nhưng hắn cũng bó tay! Nó chuyển sang làm một đề tài tương tự cho cái NCS của nó, nhưng cái bài toán (giờ là của mình) cứ ám ảnh Oriol. (Sau này mình nhận ra không phải vô cớ mà ông GS cho mình cùng phòng với Oriol. Ông không nói gì cả, giờ mình mới thấy ông cao tay ấn). Gần cuối năm 2019 ông GS, Oriol và mình đi xem buổi bảo vệ của Clemens Verhoosel, học trò của sư tổ của mình. Sư tổ của mình và GS mình, tuy từng là thầy trò, nhưng giờ không nhìn mặc nhau. Không đến nỗi như Nhạc Bất Quần và Lệnh Hồ Xung, nhưng đại khái là thế. Sư tổ vì vậy chuyển sang khoa Hàng Không (của TU Delft). Trong buổi bảo vệ này thì Clemens giải được một bài toán rất giống bài của mình.

Vậy mà mình vẫn không kết nối được: lời giải nó sờ sờ ra đó, ngay trong trình bày của Clemens. May cho mình, là Oriol thấy được sự liên quan. Hôm sau nó bảo với GS và mình là làm thế này nè. Ý tưởng rất đơn giản, dễ hơn cả đại số cấp 2. Vấn đề là mình không nhìn ra được! Mình làm theo Oriol, và khoảng vài ngày là mình làm xong (may mà được cái nhanh như khỉ, kì lạ thay Oriol thì chậm lắm luôn) và thế là có bài báo đầu tiên. Rồi bài thứ hai, ba, ... Những bài sau, vì để cảm ơn Oriol, Oriol luôn có trong bài báo, nhưng những bài này thì là công sức mình.


Mình không tự hào gì về chuyện này, nhưng nếu mình giấu nó thì có bạn trẻ sẽ rơi vào tình huống tương tự. Nếu có một lời khuyên từ chính câu chuyện của bản thân, thì nó là: *Hãy tìm và làm những bài tập mà không có lời giải*. Hoặc là phải chống lại cám dỗ nhìn vào lời giải trong sách, trên mạng. Cố gắng giải nó ít nhất là một tháng, mới tham khảo lời giải. Dĩ nhiên không phải làm liên tục, phải có nghỉ ngơi, và thậm chí là làm bài toán khác. Tạm quên bài bạn đang bí, nhưng yên tâm, trong tiềm thức bạn vẫn đang suy nghĩ về nó. Nếu phải nhìn lời giải, thì không học thuộc lời giải, mà phải tìm hiểu tại sao làm như vậy, mà không làm khác. Làm như vậy vài lần, các bạn sẽ như được đả thông nhâm đốc nhị mạch, công lực sẽ tăng vọt. Một tài liệu tham khảo là sách *How to solve it* của George Pólya[†] (Polya, 1971), có bản dịch tiếng Việt (xem hình bên cạnh).

Sau này lúc làm hậu tiến sỹ mình cũng rơi vào một bài toán chưa có lời giải (nhưng mức độ khó thì thấp hơn bài lúc làm NCS). Vì bài này mình làm thêm thôi (như một sở thích), nên mình không bị sức ép phải giải nó ngay. Mình chìm đắm trong bài này khoảng 3, hay 4 tháng. Một hôm mình đi chơi với con trong công viên, nhưng mà trong đầu thì cứ nghĩ về bài đó. Rồi bỗng dưng mình nghĩ ra lời giải. Nó cũng dễ thôi.

Cảm ơn Oriol. Cảm ơn rất nhiều. Vậy mà lúc sau nó thấy mình có nhiều báo thì nó có ý ganh ty và cuối cùng không chơi với nhau nữa. Đó là đời mình. Ân nhân đến giúp rồi lặng lẽ đi. Anh Bé cũng không còn liên lạc, Phương BK cũng không, Thảo QH cũng ít. Những người đã từng rất tốt với mình.

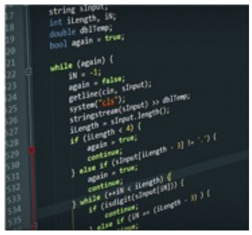
Đó là về ý tưởng, về mặt kỹ thuật mình cũng cần có sự giúp đỡ. Câu chuyện thế này. Nghiên cứu sinh trong ngành mình thì phải lập trình để giải quyết vấn đề. Không thể giải bằng tay được vì bài toán quá lớn. Và NCS có thể chọn một ngôn ngữ lập trình nào mình quen thuộc. Những ngôn ngữ thông dụng gồm có `Matlab` và `Fortran`. Và điều này làm nảy sinh một vấn đề: không có sự chia sẻ công việc giữa các NCS. Ví dụ, NCS A dùng `Matlab`, và NCS B dùng `Fortran` thì họ sẽ không chia sẻ được chương trình của mình. Erik Jan Lingen, học trò của sư tổ của mình quan sát và nhận ra vấn đề này. Rứa là Erik quyết định sẽ viết một thư viện bằng `C++`. Ý tưởng của Erik là các NCS dùng thư viện của Erik sẽ có thể chia sẻ công việc và nhờ đó sẽ tăng hiệu quả của tất cả mọi người. Luận văn tiến sỹ của Erik là phát triển một thư viện như vậy; Erik gọi nó là `jive`. Và sau khi tốt nghiệp thì TU Delft hỗ trợ cho Erik mở công ty bán thư viện này. Martin (Stroeven, người hướng dẫn 2 của mình) là bạn của Erik, và là đồng sáng lập của công ty.

[†]George Pólya (1887 – 1985) là một nhà toán học người Hungary. Ông là giáo sư toán học từ 1914 đến 1940 tại ETH Zürich và từ 1940 đến 1953 tại Đại học Stanford.

Martin giới thiệu thư viện `jive` cho ông Bert. Và Bert muốn dùng nó. Và vì mình là người mới bắt đầu và biết `C++` nên ông chọn mình làm con chuột bạch. Bây giờ nghĩ lại, thì thấy ông phỏng vấn rồi chọn mình cũng có thể vì mình biết `C++`. Dân xây dựng ít ai đi học `C++` làm gì. Các bạn thấy đó, Lệnh Hồ Xung nhờ biết thêm Hấp Tinh Đại Pháp mà chuyển nguy thành an mấy lần. Mình cũng nhờ `C++` vậy. Và giờ nhìn lại thì mình thấy Louis Pasteur[†] nói quá đúng:

> *"May mắn ủng hộ những ai chuẩn bị sẵn sàng."*

Vì tình cờ mình đã chuẩn bị vũ khí hạng nặng `C++` và vì vậy mình got the job. Giờ xin quay lại câu chuyện. Như vậy Bert phải bỏ tiền mua `jive`, rồi cho mình dùng. Mặc dù mình đã dùng `C++` cho thạc sỹ nhưng mà nội công còn yếu lắm. Lúc thạc sỹ thì mối quan tâm chính là giải được vấn đề, còn chương trình chạy nhanh hay chậm như con rùa thì không quan tâm. Bây giờ thì khác, ngay từ đầu Erik nhấn mạnh về tốc độ, nên `jive` sử dụng rất nhiều tính năng cao cấp của `C++`, mà mình chưa biết tới. Nhưng mà Erik thì rất giỏi trong việc hướng dẫn. Sau một thời gian được Erik tận tình chỉ bảo mình dùng `jive` rất hiệu quả. Thấy vậy, Bert cho Frans van der Meer dùng, rồi sau đó có thêm nhiều người trong nhóm của Bert nữa.



Sau khi mình rời TU Delft thì, đúng lý, mình không còn được dùng `jive` nữa. Nhưng mà Erik vẫn cho mình dùng miễn phí! Mình dùng `jive` từ 2007 cho đến nay. Từ năm 2014 thì `jive` đã thành open source nghĩa là mã nguồn mở, và dĩ nhiên là miễn phí. Có lần mình hỏi tại sao cho mình dùng thư viện miễn phí, Erik trả lời: "tao thích làm việc với mày". Cảm ơn Erik vì sự rộng rãi của mày, và cảm ơn vì đã dạy cho tao bao nhiều điều về `C++`. Nó không chỉ là một công cụ, mà còn là nghệ thuật.

Thật khó để mà tin rằng, một hành động cầm một quyển sách (về `C++`) chỉ vì nó gây tò mò cách đây 7, 8 năm mà có quyết định đến cuộc đời mình sau này. Connecting the dots... Steve Jobs nói thật không ngoa.

Nếu các bạn quan tâm mình học lập trình như thế nào, xin xem Chương 38.

Ngày 11 tháng 11 năm 2022

[†]Louis Pasteur (1822 - 1895) là một nhà hóa học và vi sinh vật học người Pháp nổi tiếng vì các phát hiện về nguyên lý tiêm chủng.

# Chương 20

# Câu chuyện Toán học: GS Ngô Bảo Châu và IMO 1998

Có một chàng trai là người thôn Vỹ Dạ, Huế. Thôn Vỹ là nơi anh trải qua không biết bao nhiêu kỷ niệm. Nào là mối tình đầu, mối tình sau, cho tới mối tình thứ $n$. Nào là bún hến, cơm hến, nào là chè cồn. Với anh, thôn Vỹ đẹp vô cùng. Thế mà, khi một người bạn Sài Gòn ra Huế chơi, dù được chăm sóc tận tình, anh này vẫn không thấy nó đẹp chỗ nào cả. Bực quá, anh mới đi uống cà phê với một người bạn tên là Nguyễn Trọng Trí và kể nỗi bực dọc của mình. Anh Trí nói, chuyện này chú để anh lo. Nói xong, anh lấy bút và ghi vội trên tờ giấy mấy dòng thơ:

Sao anh không về chơi thôn Vĩ?
Nhìn nắng hàng cau nắng mới lên.
Vườn ai mướt quá, xanh như ngọc
Lá trúc che ngang mặt chữ điền.
Gió theo lối gió, mây đường mây,
Dòng nước buồn thiu, hoa bắp lay...
Thuyền ai đậu bến sông trăng đó,
Có chở trăng về kịp tối nay?
Mơ khách đường xa, khách đường xa,
Áo em trắng quá nhìn không ra...
Ở đây sương khói mờ nhân ảnh,
Ai biết tình ai có đậm đà?

Rồi, anh Trí bảo: chú về quăng cho bạn chú mấy câu thơ anh mới viết, chú sẽ thấy, cậu ta sẽ chết mê thôn Vỹ. Và đúng như thế thật, người bạn Xì gòn cứ thấy cô gái Huế là nghĩ ngay 'áo em trắng quá nhìn không ra...' Đẹp quá xá luôn.

Mình là người chưa bao giờ biết làm vườn là gì. Tuy nhiên, mình cũng 'rung động' khi đi vào một khu vườn với những bông hoa nhiều màu sắc. Và khi đang ở trong đó, mình cũng thích thú lắng nghe người chủ khu vườn 'kể chuyện' làm vườn thế nào, bón phân làm sao, ... Dù ra khỏi khu vườn thì mình quên sạch. Tương tự, không phải ai học Toán cũng sẽ trở thành nhà Toán học. Thế nhưng, ai cũng có thể 'rung động' trước vẻ đẹp của Toán học, nếu có một người thầy biết kể chuyện. Sau khi ra lớp, bạn có thể quên sạch, nhưng ít ra lúc trong lớp bạn cũng không nhàm chán.

Là còn người thì ai cũng thích cái gì Fantasy. Ví dụ, có bạn nữ nào mà không thích Sở Lưu Hương một tay cầm kiếm, một tay phe phẩy cái quạt giấy, nhất là qua diễn xuất của tài tử Hồng Kông Trịnh Thiếu Thu hay Miêu Kiều Vỹ? Cũng cùng một lí do, để thu hút và khơi dậy đam mê học Toán của các em học sinh, sách giáo khoa nên thêm vào các câu chuyện Toán học. Đây là các mẫu chuyện về các nhà Toán học, chúng có thể không phải 100% sự thật mà được hư cấu thêm. Thì không phải chúng ta muốn Fantasy sao?

Dĩ nhiên chúng ta phải chọn lọc, không phải cái nào cũng kể. Ví dụ, câu chuyện nhà Toán học Hy Lạp cổ đại Archimedes vì quá chú tâm làm toán trên bãi biển đến nỗi bỏ qua lời nói của một người lính La Mã dẫn đến bị đâm chết thì không nên kể. Nói mới thấy, đó mới là đam mê! Chúng ta có thể kể câu chuyện này nè. Nghe xong chắc sẽ có không ít em sẽ nói: "lớn lên tao sẽ làm được như vậy". Nào chúng ta cùng vào câu chuyện nhé. Tại sao không bắt đầu về một nhà Toán học Việt Nam? Mình sẽ kể về GS Ngô Bảo Châu. GS này quá nổi tiếng rồi, cái gì cũng biết. Không hẳng.

Năm 1988 GS Ngô tham dự cuộc thi Olympic Toán quốc tế (IMO) ở thành phố Canbera–thủ đô nước Úc, lúc 16 tuổi. IMO là một cuộc thi toán dành cho học sinh trung học cho tất cả các quốc gia trên thế giới tham dự. Mỗi năm tổ chức một lần ở một nước khác nhau. Mỗi quốc gia sẽ cử một đội tuyển gồm có khoảng 6 thành viên. Đề bài có 6 câu hỏi và mỗi câu 7 điểm; vị chi là 42 điểm. Sau khi thi thì sẽ xếp hạng các thí sinh từ cao xuống thấp. Rồi từ đó ban tổ chức sẽ trao huy chương vàng, bạc và đồng. Cùng năm đó đội chủ nhà Úc tham dự với đầu tàu là thiên tài Terence Tao người mà đã làm Toán từ lúc 4 tuổi (có phải là sự thật? Ai quan tâm? Chúng ta thích Fantasy mà. Nếu kể Tao thích làm Toán từ 15 tuổi thì câu chuyên nó dở ẹt, đúng không nào?). Terence Tao lúc đó mới chỉ có 13 tuổi, nhưng mà dĩ nhiên là rất tự tin. (Ai biết ông ta tự tin hay không, mình thêm cho nó hay).

Hình 20.1: Giáo sư Ngô và Terence Tao.


Vậy kết quả cuộc đối đầu giữa GS Ngô và thiên tài Tao như thế nào? GS Ngô của chúng ta đạt điểm tuyệt đối (42/42) còn Tao "chỉ" được 34/42. Mình muốn nhắc các bạn là Terence Tao sau này đạt giải Fields[†] (gọi là giải Nobel cho Toán, xem hình) năm 2006. Trong khi GS Ngô phải đợi 4 năm sau (năm 2010) mới đem về giải Fields, trong khi trẻ hơn Tao 3 tuổi. Trong kỳ thi IMO 1998 này có câu hỏi số 6 cực kỳ nổi tiếng vì độ khó của nó. Câu hỏi số 6 được gửi đến ban tổ chức bởi một nhà Toán học người Tây Đức, và ban tổ chức (toàn là nhà toán học cả) dành ra sáu giờ để giải thử xem có đáng được để vào đề thi không. Không một ai trong ban tổ chức giải được bài này trong vòng 6 giờ đồng hồ! Và trong số họ chỉ là ... vài nhà Toán học siêu nhất của thế giới lúc đó!

Vậy mà họ vẫn quyết định dùng nó, và các thí sinh học sinh của chúng ta chỉ có 90 phút để làm (vì còn 5 bài khác)! Nói không sai, nhà toán học đúng là điên!

Ấy vậy mà GS Ngô giải bài này 7/7, và Tao chỉ được 1/7. Hình như Tao sau này không thích khi người ta nhắc lại bài số 6 này. Không những GS Ngô mang vinh quang về cho cha mẹ, tổ tiên, và lấy le với người yêu xinh đẹp (mình không biết nha, Fantasy mà lị) mà ông còn đem vinh quang cho toàn đất nước Việt Nam. Ông đã đi vào lịch sử! Tên ông trở nên bất tử!

[†]Huy chương Fields là giải thưởng được trao cho hai, ba hoặc bốn nhà toán học dưới 40 tuổi tại Đại hội Quốc tế của Liên đoàn Toán học Quốc tế (IMU), cuộc họp diễn ra bốn năm một lần. Tên của giải thưởng vinh danh nhà toán học Canada John Charles Fields (1863–1932). Fields qua đời vào tháng 8 năm 1932, trong di chúc, ông để lại 47.000 USD cho quỹ Huy chương Fields.

Thử hình dung trong một lớp học Toán, thay vì cứ làm bài tập
mà không hiểu vì sao phải làm chúng, thì một đám cô bé, cậu bé khoảng $9, 10$ tuổi ngồi chống cằm nghe cô giáo kể câu chuyện này. Và cô có giọng kể ngọt ngào nữa cơ. Mình không tin là sau đó mà không có ít nhất vài cô cậu muốn làm GS Ngô. Chúng ta đã tạo ra động lực cho học sinh! Và khi đã có động lực thì không cần ai nhắc "con nhớ làm bài tập nghe con"; bạn sẽ tự học. Có ai nhắc mình mà mình vẫn đá banh, vẫn đọc truyện, vẫn cứ yêu dù người ta không thèm???

Mình viết về Toán vì mình thích nó. Toán dĩ nhiên không phải là tất cả. Thomas Edison[††] từng nói:

> *“tôi có thể thuê mấy nhà toán học làm việc cho tôi, nhưng tụi nó không thuê tôi được!“*

Nhưng dù thích hay không thích, thừa nhận hay không thừa nhận thì các bạn trẻ vẫn phải học Toán (trừ phi không đi học!), vì nó là môn chính. Thay vì học một cách khổ sở, các bạn có thể học thú vị hơn, và không gì bằng bắt đầu với các câu chuyện.

Giáo sư Ngô giỏi Toán như vậy thì lớn lên ông sống bằng nghề gì? Ông làm nhà Toán học chuyên nghiệp, tức là ông được trả tiền để làm Toán; như Messi được trả tiền để đá bóng vậy. Được trả tiền để làm điều mình yêu thích! Còn chi bằng. Cụ thể, lúc mình viết mấy dòng này thì ông làm ở trường Đại học Chicago, Mỹ, chức danh của ông là Francis and Rose Yuen Distinguished Service Professor. (Mình không biết nên dịch thế nào nên để vậy; nhưng các bạn chú ý giáo sư mà có chữ distinguished là giáo sư cao cấp nhất rồi.)

Nếu không giỏi Toán như GS Ngô nhưng thích Toán thì các bạn nên nhớ là kiến thức Toán là rất quan trọng cho nhiều ngành, ví dụ khoa học máy tính, kỹ sư (xây dựng, hàng không, cơ khí, ...), khoa học (vật lý, hóa học, ...), tài chính (dùng Toán phân tích tài chính). Những ngành này đa phần đều lương cao so với mặt bằng chung.

Có một điểm thú vị là nhà Toán học chỉ cần giấy, bút, và máy tính là có thể làm việc. Paul Erdős (1913–1996), nhà Toán học lừng danh người Hungary, chỉ sống với hai vali xách tay, không vợ con, không nhà cửa. Ông đã sống như thế này: 'Trong hành trình không bao giờ ngừng tìm kiếm những bài toán toán học thú vị và những tài năng toán học mới, Erdős đã đi qua bốn châu lục với tốc độ đầy cuồng nhiệt, di chuyển từ trường đại học này đến trường khác. Phương pháp làm việc của ông là xuất hiện trước cửa nhà một nhà toán học đồng nghiệp, tuyên bố "Não của tôi đã sẵn sàng", làm việc với chủ nhà trong một hoặc hai ngày, cho đến khi ông cảm thấy buồn chán hoặc chủ nhà mệt mỏi, sau đó tiếp tục di chuyển đến một nơi khác.' (Hoffman, 1998).

Không phải ai có giải IMO đều trở thành nhà Toán học lúc lớn lên. Có một điểm mà chúng ta phải nhận thức là người có giải IMO là những người giỏi giải những bài toán đã có lời giải. Làm Toán chuyên nghiệp là giải những bài toán chưa có lời giải. Đó là một sự khác biệt lớn. Trong cuốn tiểu thuyết *The Housekeeper and the Professor*, nhà văn nữ người Nhật Yoko Ogawa viết rất hay về sự khác biệt này: *"Giải quyết một vấn đề mà bạn biết có câu trả lời giống như leo núi với một người hướng dẫn, dọc theo một con đường mà người khác đã vẽ sẵn. Trong toán học, sự thật ẩn chứa ở một nơi không ai biết, nằm ngoài những con đường đã đi. Và nó không luôn nằm ở đỉnh núi. Nó có thể ẩn trong một khe nứt trên tảng đá trơn nhất hoặc ở đâu đó sâu trong thung lũng."* (Ogawa, 2009). Các bậc phụ huynh hay thầy cô cũng nên nhận thức về hiện tượng 'đốt cháy', mà đã khiến nhiều bạn trẻ triển vọng - những người được hướng dẫn riêng và tham gia kỳ thi IMO bởi những bậc phụ huynh tham vọng và áp đặt - trở nên mất niềm tin vào toán học và bỏ nó như một sở thích ngay trước khi họ vào đại học. Tốt nhất là để cho các bạn trẻ theo đuổi sở thích của họ.

**The Housekeeper and the Professor.** Cuốn tiểu thuyết này tập trung vào một nhà toán học, gọi là "ông Giáo Sư," người đã bị thương não trong một tai nạn giao thông vào năm 1975 và từ đó

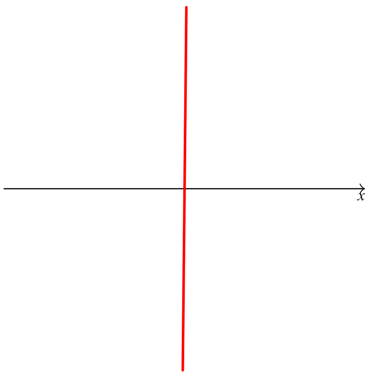
[††]Thomas Edison (1847–1931) là một nhà phát minh tài ba và một doanh nhân hiểu biết, người đã giành được số lượng kỷ lục 1 093 bằng sáng chế (đơn lẻ hoặc chung) và là động lực đằng sau những đổi mới như máy quay đĩa, bóng đèn sợi đốt, pin kiềm và một trong những máy ảnh chuyển động sớm nhất.

chỉ có thể ghi nhớ được 80 phút, cùng với cuộc tương tác của ông với một người quản gia (người kể chuyện) và con trai của cô, "Root" khi Giáo Sư chia sẻ vẻ đẹp của Toán học (lý thuyết số) với họ. Một cuốn sách hay các bạn trẻ nên đọc, nó có thể thay đổi thái độ của bạn đối với toán học. Sẽ thú vị cho các bạn nếu bạn tự đọc nó nhưng mình xin trích một đoạn trong sách như sau: *"Cỡ giày của cô là nhiêu?" Đây là câu hỏi đầu tiên của ông Giáo sư, ngay sau khi tôi đã tự giới thiệu mình là người quản gia mới. Không có sự chào đón, không có lời chào hỏi. Nếu có một quy tắc vững chắc trong ngành nghề của tôi, đó là bạn luôn phải đưa cho người sử dụng công việc những gì họ muốn; và vì vậy, tôi đã nói với ông: "Hai mươi bốn centimet." "Đó là một con số vững chắc," ông nói. "Nó là giai thừa của bốn." Ông gập tay lại, nhắm đôi mắt lại, và im lặng trong một khoảnh khắc.*

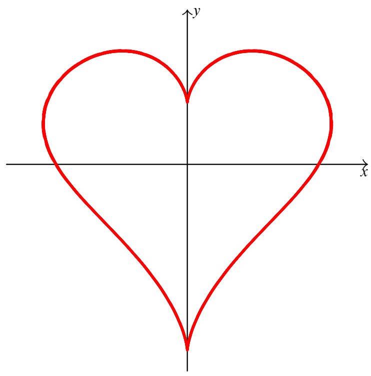
Hình như Ogawa đã dùng nhà Toán học Paul Erdos cho hình ảnh ông GS trong truyện của mình. Và vì vậy những gì mô tả về ông GS rất đúng thực tế. Không tin? Sau đây là câu chuyện thật 100%. Godfrey Hardy–nhà Toán học lừng danh người Anh–kể rằng: "Tôi nhớ một lần đi thăm Ramanujan khi anh đang nằm ốm tại Putney. Tôi đã đi xe taxi số 1729 và nhận xét rằng con số này có vẻ khá nhạt nhòa và hy vọng nó không phải là một điềm báo không may mắn. "Không," Ramanujan trả lời, "đó là một con số rất thú vị; đó là con số nhỏ nhất có thể biểu thị được bằng cách cộng hai lập phương theo hai cách khác nhau". Ramanujan ám chỉ là $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. (Không tin thì xin kiểm tra). Các nhà Toán học xem các con số như những sinh vật có tích cách riêng biệt. Họ gọi chúng bằng những cái tên rất con người: số nguyên tố song sinh, số thân thiện, số hoàn hảo... Và vì vậy các con số mới tiết lộ bí mật (mà ta gọi là các định lý) của chúng cho các nhà Toán học–những người duy nhất trên trái đất hiểu và trân trọng chúng.

Làm thế nào để trở thành một nhà Toán học chuyên nghiệp? Trước tiên bạn phải học đại học ngành Toán, sau đó học thạc sỹ, và cuối cùng là làm nghiên cứu sinh để lấy bằng tiến sĩ về Toán. Đó là con đường phổ biến nhất. Mình không phải là nhà Toán học, nhưng mình cũng đi qua con đường tương tự nên trong những chương sau mình sẽ chia sẻ một tí kinh nghiệm. Riêng ở Chương 31, mình sẽ giới thiệu cho các bạn một cuốn sách viết bởi một nhà Toán học nổi tiếng, ông viết riêng cho các các bạn–những người muốn làm nhà Toán học tương lai.

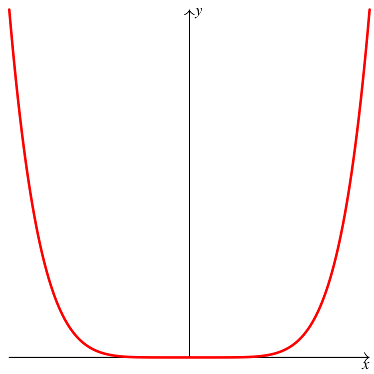
(Cuối cùng, ai cũng có thể thưởng thức toán, làm toán, khôg cần thiết phải là một nhà Toán học chuyên nghiệp. Mình chỉ là một kỹ sư, nhưng giờ, nhờ nỗ lực và đam mê, cũng có thể hiểu và thấy cái hay của Toán.)




(a) $y = 1000x$



(b) $(x(t), y(t))$



(c) $y = x^6/16$

Hình 20.2: 'I love you' theo phong cách các nhà Toán học. Phương trình tham số của hình trái tim: $x(t) = 16\sin^3(t)$, $y(t) = 13\cos(t) - 5\cos(2t) - \cos(3t) - \cos(4t)$.

Nhiều người cho rằng Toán học là nhàm chán, trong khi đó các nhà Toán học thì sống không thể thiếu nó. Minh chứng hùng hồn nhất có lẽ là Archimedes, thà chịu chết chứ không cho người lính La Mã phá các hình vẽ hình học ông đang nghiên cứu. Thật khó để diễn tả cái đẹp của Toán bằng lời, phải chơi với nó thì mới hiểu được, nhưng mình xin dùng hình Hình 20.2 để cho các bạn thấy không phải đồ thị hàm số cũng có thể nói 'anh yêu em' hay 'em yêu anh' đó sao.

Để minh họa cho việc ai trong các bạn cũng có thể làm toán (tức là tìm ra các định lý), hãy xét các con số tự nhiên từ 1 đến 9 như trong Hình 20.3. Rõ ràng là con số 5 có gì đó đặc biệt: nó ở chính giữa, hơn nữa đi từ 1 đến 5 cần 4 bước, và đi từ 9 đến 5 cũng cần 4 bước (dù hướng đi ngược chiều). Bây giờ ta gán tên $x_1$ cho 1, $x_2$ cho 2, và diễn đạt cái nhận xét về khoảng cách để xem ta sẽ được gì.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ |

Hình 20.3

Khoảng cách từ $x_i$ ($i = 1,2,3,4,5,6,7,8,9$) đến $x_5$ là như sau:

$$\begin{aligned}
x_1 - x_5 &= -4, & x_9 - x_5 &= 4\\
x_2 - x_5 &= -3, & x_8 - x_5 &= 3\\
x_3 - x_5 &= -2, & x_7 - x_5 &= 2\\
x_4 - x_5 &= -1, & x_6 - x_5 &= 1\\
x_5 - x_5 &= 0
\end{aligned}$$

Giờ chúng ta cọng các phương trình lại: những gì bên vế trái cọng lại, những gì ở vế phải cọng lại, ta sẽ có:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9) - 9x_5 = 0, \quad \text{hay} \quad \sum_{i=1}^{9} x_i - 9x_5 = 0$$

(Thay vì viết $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9$, rất là mỏi tay và tốn giấy, nhà Toán học viết ngắn gọn $\sum_{i=1}^{9} x_i$.) Và từ phương trình trên chúng ta có thể tính ra $x_5$ như sau:

$$\sum_{i=1}^{9} x_i - 9x_5 = 0 \Longrightarrow x_5 = \frac{\sum_{i=1}^{9} x_i}{9}$$

Không có lí do gì ta phải giới hạn ở 9 số. Ta có thể thay nó bằng 1 số tự nhiên bất kỳ nào (có tên là $n$). Và ta định nghĩa số trung bình $\bar{x}$ (như 5 trong ví dụ trên) như sau

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Và ta có ngay một định lý về $\bar{x}$ như sau:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0 \tag{20.1}$$

Dĩ nhiên ta phải chứng minh nữa, nhưng mình dành cho các bạn việc này. Ngoài ra ta không cần giới hạn với số tự nhiên, $x_i$ hoàn toàn có thể là số thực, và Eq. (20.1) vẫn đúng như thường.

**Ghi chú** Thay vì gói gọn với các con số cụ thể (như $1, 2, 3$), khi chúng ta dùng $x_1, x_2, x_3$, tức là dùng các ký tự thay cho các con số, chúng ta đang ở trong cái nhánh của toán học gọi là đại số (*algebra*). Đây là một khác biệt rất lớn khi chuyển từ số học sang đại số.

**Bài toán số 6**. Bạn trẻ nào muốn giải (chỉ cần kiến thức cấp 2 thôi) thì xin mời. Mình không biết chi mô nghe. Một nhà toán học nổi tiếng đã dùng một năm (lúc rảnh rỗi) để giải bài này (https://www.sciencealert.com/the-legend-of-question-six-one-of-the-hardest-maths-problems-ever). Và ông khuyên các bạn trẻ nên làm vậy. Bởi vì làm được vậy thì sẽ như đả thông được nhâm đốc nhị mạch, nội công sẽ tăng vọt. Mình viết mà cũng không biết nhâm đốc là ở đâu luôn! Mà ai quan tâm! Bài toán số 6 như thế này.

Cho $a$ $b$ là hai số nguyên dương (ví dụ $3, 4$) sao cho $ab + 1$ bị chia hết cho $a^2 + b^2$ (chẳng hạn $3$ chia hết cho $6$ mà $5$ thì không). Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} \tag{20.2}$$

là bình phương của một số nguyên. Ví dụ $25 = 5^2$ là bình phương của 5–một số nguyên.

Ngày 2 tháng 9 năm 2022

# Chương 21

# Câu chuyện về phương trình bậc ba: Cardano và Ars Magna

Có lẽ chúng ta ai cũng quen thuộc với phương trình bậc hai[†]:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0) \tag{21.1}$$

Người Babylon đã biết cách giải phương trình này cách nay mấy thiên niên kỷ; tức là họ biết tìm ra $x$ thỏa mãn phương trình trên. Ví dụ $x = 2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$ vì $2^2 - 5 \times 2 + 6 = 0$ mà $x = 4$ không là nghiệm (vì $4^2 - 5 \times 4 + 6 \neq 0$). Nghiệm của Eq. (21.1) là:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{21.2}$$

mà hầu như học sinh cấp hai ai cũng thuộc lòng: trừ $b$ cộng trừ căn delta chia $2a$; delta là định thức $\Delta = b^2 - 4ac$. Nhưng $\sqrt{a}$ là gì? Đơn giản thôi: nếu chúng ta có một hình vuông có diện tích là $a$ thì cạnh của nó là $x$ và $x^2 = a$. Thay vì viết $x^2 = a$, chúng ta viết $x = \sqrt{a}$. Vì tích của 2 số (bất kể âm hay dương) luôn dương, chúng ta không thể có căn bậc hai của một số âm: tức là nếu viết $\sqrt{-2}$ thì đó là một điều vô nghĩa. Ít nhất đó là suy nghĩ của các nhà Toán học trước khi $i^2 = -1$ xuất hiện.

Sau phương trình bậc hai thì có phương trình bậc 3 mà ví dụ đơn giản nhất là: một hình lập phương có thể tích là 2, tìm cạnh của nó. Gọi $x$ là chiều dài cạnh hình lập phương, ta có phương trình $x^3 = 2$. Việc giải $x^3 = 2$ thì đơn giản: $x = \sqrt[3]{2}$. Nhưng cho tới đầu thế kỷ 15, các nhà Toán học cho rằng phương trình bậc ba tổng quát–tức phương trình có dạng $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$–vượt quá khả năng con người.

Trong bối cảnh như vậy, Scipione del Ferro (1465 – 1526), giáo sư tại Đại học Bologna (Ý), là người đầu tiên đạt được tiến bộ đáng kể trong việc giải phương trình bậc ba. del Ferro có thể giải các phương trình bậc ba suy nhược–những phương trình có dạng $x^3 + px = q$, nhưng ông không công bố khám phá của mình. Thay vào đó, ông giữ nó cho đến khi qua đời. Lý do là ông phải có vũ khí bí mật để sử dụng trong các cuộc "đọ súng toán học"–thách thức từ các nhà toán học người Ý khác. Nếu thất bại trong chỉ một cuộc thách đố như vậy xem như sự nghiệp tiêu tùng. Chỉ khi thoi thóp trên giường bệnh, ông mới truyền lại bí kíp của mình cho học trò là Antonio Fior. Mặc dù Fior không phải là một nhà toán học giỏi như người sư phụ của mình, vào năm 1535, ông đã thách thức học giả người Brescia nổi tiếng Niccolo Fontana (1499-1557), người được biết đến nhiều hơn với cái tên Tartaglia. Sao Fior mạnh dạn như vậy? Vì được sư phụ cho Ỷ Thiên Kiếm mà lị. Chơi thôi.

Tartaglia là một người tự học và đã khám phá ra cách giải một dạng khác của phương trình bậc ba — đó là $x^3 + mx^2 = n$. Như vậy trong khi Fior có Ỷ Thiên Kiếm thì Tartaglia có Đồ Long

[†]Nếu $a = 0$ thì chúng ta chỉ có phương trình bậc nhất $bx + c = 0$, đó là lí do chúng ta chỉ quan tâm trường hợp $a \neq 0$. Ngoài ra $a, b, c$ được gọi là các hệ số của phương trình. Cuối cùng thay vì nói dài dòng rằng các hệ số $a, b, c$ là số thực, các nhà Toán học viết: $a, b, c \in \mathbb{R}$. Toán học là một ngôn ngữ, nên để hiểu nó các bạn phải làm quen với thứ ngôn ngữ này.

Đao. Đây là tiền đề cho cuộc đấu toán học giữa Fior và Tartaglia. Năm 1535, họ trao đổi 30 bài toán với thời hạn một tháng rưỡi. Tartaglia đã gửi cho Fior nhiều bài toán khác nhau, trong khi Fior, người yếu hơn về mặt toán học, đã gửi cho Tartaglia 30 bài chỉ có 1 dạng là $x^3 + cx = d$ (ông này sử dụng chiến lược "tất cả trứng trong một giỏ", rất nguy hiểm). Chỉ vài ngày trước thời hạn, trước sức ép của thời gian và áp lực phải thắng vì danh dự, Tartaglia đã khám phá ra cách giải $x^3 + px = q$ và nhanh chóng hoàn thành tất cả 30 bài toán. Trong khi đó, Fior không giải quyết được vấn đề nào của Tartaglia. Tin tức lan khắp nước Ý về thành tựu của Tartaglia, và Fior, bị sỉ nhục, biến mất khỏi câu chuyện.

Bây giờ thì nhân vật chính Gerolamo Cardano (1501– 1576) mới xuất hiện.


(a) Niccolo Fontana (b) Gerolamo Cardano

Hình 21.1

Cardano là một người đa tài; ông là nhà toán học, bác sĩ, nhà sinh vật học, nhà vật lý, nhà hóa học, nhà chiêm tinh, nhà thiên văn học, nhà triết học, nhà văn và người chơi cờ bạc lão luyện (mà nhờ đó ông trở thành cha đẻ của lý thuyết xác xuất sau này). Cardano đã cố gắng tìm ra cách giải phương trình bậc ba như Tartaglia nhưng thất bại. Vì vậy ông năn nỉ, xin xỏ và bắt đầu cả một chiến dịch gây áp lực để thuyết phục Tartaglia chia sẻ phương pháp của mình, thậm chí hứa hẹn một lời thề giữ bí mật:

> *Tôi thề với ông bằng Phúc âm thiêng liêng, và với đức tin của tôi với tư cách là một quý ông, không những không bao giờ công bố những khám phá của ông, nếu ông nói với tôi, mà tôi còn hứa và cam kết đức tin của mình với tư cách là một Cơ đốc nhân chân chính sẽ ghi chúng vào mật mã để sau khi tôi chết, không ai có thể hiểu được chúng.*

Cuối cùng, vào năm 1539, Tartaglia siêu lòng và chia sẻ kiến thức của mình về phương trình bậc ba với Cardano, mặc dù được viết dưới dạng một mật mã, dịch ra tiếng Anh[†]:

When the cube with the cose beside it
Equates itself to some other whole number,
Find two others, of which it is the difference.
Hereafter you will consider this customarily
That their product always will be equal
To the third of the cube of the cose net.
Its general remainder then
Of their cube sides, well subtracted,
Will be the value of your principal unknown.

[†]Bạn nào quan tâm làm sao bài thơ này liên quan tới cách giải phương trình $x^3 + px = q$ thì xem https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/how-tartaglia-solved-the-cubic-equation-tartaglias-poem và Nguyen (2023).

Tuy nhiên, đối với Cardano thông minh, chỉ cần biết kết quả là đủ để khám phá ra cách làm. Cardano còn thậm chí khám phá ra cách giải phương trình bậc ba đầy đủ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, điều chưa ai làm được. Bất chấp lời thề với Tartaglia, Cardano đã chia sẻ những kết quả này cho trợ lý tài năng Ludovico Ferrari của mình. Sau đó Ferrari tìm ra cách giải phương trình bậc bốn. Cardano đã nhận ra tầm quan trọng của những thành tựu này và rất muốn công bố kết quả. Nhưng ông không thể làm như vậy vì lời thề của mình với Tartaglia. Câu chuyện lại có một khúc quanh khác.

Sau đó, trong một chuyến đi tới Bologna vào năm 1543, Cardano đã thấy ghi chép trong sổ tay của del Ferro rằng chính del Ferro mới là người đầu tiên giải được $x^3 + px = q$ (chứ không phải Tartaglia). Trong suy nghĩ của Cardano, khám phá này đã giải phóng ông khỏi lời thề của mình đối với Tartaglia. Hai năm sau, Cardano xuất bản *Ars Magna* (hay *The Great art*–như vậy Cardano xem đại số là nghệ thuật vĩ đại), trong đó có công trình của ông và Ferrari về phương trình bậc ba và bậc bốn được công bố. Từ đó công thức giải phương trình bậc ba suy nhược $x^3 + px = q$ được biết đến là công thức Cardano:

$$\boxed{x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}} \tag{21.3}$$

Chính trong khi giải các phương trình bậc ba Cardano đã gặp trường hợp khó xử: căn bậc hai của số âm xuất hiện trong công thức của ông. Cụ thể, lúc giải phương trình sau (chú ý là phương trình này có nghiệm là 4)

$$x^3 - 15x = 4 \tag{21.4}$$

ông dùng công thức Eq. (21.3) với $p = -15$ và $q = 4$, và ông có

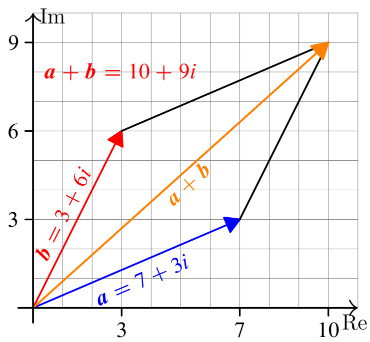
$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}} \tag{21.5}$$

Căn bậc hai của $-121$, cái quái gì thế này? Mãi mấy chục năm sau Rafael Bombelli (1526–1572), một nhà Toán học người Ý khác, mới mạnh dạn chấp nhận làm việc với căn bậc hai số âm (bất chấp ý nghĩa/tồn tại của chúng), và Bombeli thu được số thực từ căn bậc hai của số âm. Cụ thể, Bombeli tính $(2 + \sqrt{-1})^3$ và xem $\sqrt{-1}$ như một con số bình thường:

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{-1})^3 &= 8 + 3(2)^2\sqrt{-1} + 3(2)(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}\end{aligned} \tag{21.6}$$

Vì thế, ông biết $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$. Và tương tự, ông cũng có $\sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}} = -2 + \sqrt{-1}$. Thay chúng vào Eq. (21.5) và ông thu được số thực là 4. Như vậy,

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}} = 4 \tag{21.7}$$




Đó là tiền đề cho Wessel, Arnand và Gauss sau này tìm ra số phức $a + bi$ trong đó $i = \sqrt{-1}$, là một ký hiệu do nhà Toán học Thụy Sỹ vĩ đại Euler nghĩ ra[†]. Thì ra căn bậc hai không sống ở khu ổ chuột *number line* mà sống ở khu sang chảnh mặt phẳng phức (xem hình bên). Ý tưởng về số phức như một điểm trong mặt phẳng số phức được mô tả lần đầu bởi Caspar Wessel (1745-1818), nhà Toán học và người vẽ bản đồ người Na Uy vào năm 1799, mặc dù đã có sự tiên đoán về nó từ sớm nhất là vào năm 1685 trong cuốn *A Treatise of Algebra của Wallis*. Bài tiểu luận của Wessel xuất hiện trong Proceedings of the Copenhagen Academy nhưng ít được chú ý. Vào năm 1806, Jean-Robert Argand (1768 - 1822), một nhà toán học nghiệp dư

[†]Có thể do Rene Descartes gọi $\sqrt{-2}$ là *imaginary number*.

người Pháp. trong khi đang quản lý một hiệu sách ở Paris đã xuất bản một cuốn sách nhỏ về số phức và cung cấp một bằng chứng chặt chẽ cho định lý cơ bản về đại số. Carl Friedrich Gauss trước đây đã công bố một bằng chứng về định lý này dưới góc độ topology vào năm 1797, nhưng lúc đó, ông tỏ ra nghi ngại về "triết học thực sự của căn bậc hai của $-1$". Cho đến năm 1831, sau khi vượt qua những nghi ngại này, ông mới công bố một cuốn sách về số phức như các điểm trong mặt phẳng, thiết lập chủ yếu các ký hiệu và thuật ngữ hiện đại.

Phương trình bậc ba, cái mà Luca Pacioli–tiền bối của Cardano–từng cho là vượt quá tầm của đại số, đã được Cardano giải. Ông còn giải cả phương trình bậc bốn. Không khó hiểu khi Cardano kết thúc quyển *Ars Magna* bằng một phát biểu đầy cảm xúc:

*Viết trong năm năm, mong quyển sách này sẽ tồn tại ngàn thu.*

Cũng như Euclid (hay bất cứ nhà toán học nào) không bao giờ vẽ được đa diện đều 7 cạnh bằng thước kẻ và compa, các nhà đại số học không bao giờ tìm ra được công thức (tương tự như công thức Cardano) cho phương trình bậc 5 trở lên. Chú ý là không tìm ra được công thức cho nghiệm chứ không phải là không giải được. Ví dụ phương trình $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 0$ là bậc năm, nhưng ai cũng giải được.

Tại sao không thể?

Cái đó thì chúng ta phải chờ những nhân vật tiếp theo trong dòng chảy của lịch sử toán học: Descartes, Euler, Lagrange, Cauchy, Abel và cuối cùng là Évariste Galois, một thiên tài đoản mệnh. Galois ra đi quá sớm ở tuổi 20 sau một cuộc đấu súng vì một người đàn bà. Người còn sống sau màn đấu súng sinh tử, không ai biết đến. Người ra đi thì để lại cho đời một tài liệu dày vỏn vẹn có 60 trang, nhưng thay đổi Toán học và cả Vật Lý mãi mãi. (Nếu tinh ý các bạn sẽ thấy trong mấy cái tên Euler, Lagrange, Abel, Cauchy, Galois) không thấy có tên tuổi nào từ Ý nữa. Sau Cardano, Tartaglia, del Ferro, Ferrarri, chẳng lẽ nước Ý nhân tài điêu linh ư? Không hẳn vậy. Đó là vì câu chuyện của Giordano Bruno[‡].)

Chỉ từ việc tìm hiểu về các phương trình xem chừng như không có gì to tát: $x^2 + 2x - 5 = 0$, $x^3 - 3x + 7 = 0$, ... các nhà Toán học đã tìm ra khái niệm nhóm (group), để rồi cho ra đời đại số trừu tượng (abstract algebra). Sau này các nhà Vật lý đã dùng lý thuyết nhóm để dự đoán ra hạt quark trước khi thí nghiệm chứng minh sự tồn tại của chúng! Thật không thể tin nổi!

Các bạn trẻ nên nhớ rằng Cardano không có biết dùng symbols $(x, y, z, a, b, c)$ như chúng ta bây giờ. Thay vào đó, ông viết *cup p: 6 reb aequalis 20*, nghĩa là $x^3 + 6x = 20$. Vì chưa có symbols nên việc giải phương trình rất khó khăn. Phải tới thời của Viète[†] và nhất là Descartes[††] thì từ đó chúng ta thoải mái viết: $x^3 + 6x = 20$. Descartes chọn $x, y, z$ (nằm cuối bảng ký tự) cho cái gì chưa biết (đang tìm) và $a, b, c$ cho những gì đã biết.

[‡]Giordano Bruno là một nhà triết học, nhà toán học và nhà thiên văn người Ý sống vào thế kỷ 16. Ông nổi tiếng với những ý tưởng gây tranh cãi và cuối cùng là cái chết bởi tay Giáo hội Công giáo. Những ý tưởng của Bruno được coi là vi phạm tôn giáo bởi Giáo hội Công giáo vì ông ủng hộ một quan điểm thiên văn heliosentric (mặt Trái Đất xoay quanh Mặt Trời), đối lập với mô hình geocentric được Giáo hội tuyên truyền. Năm 1592, Bruno bị bắt giữ bởi Tòa thẩm phán Công giáo La Mã tại Venice và sau đó được chuyển đến Rome. Ông bị đưa ra xét xử, và mặc dù có nhiều cơ hội để rút lại những niềm tin của mình, ông từ chối làm như vậy. Vào năm 1600, Giordano Bruno bị thiêu sống tại quảng trường Campo de' Fiori ở Rome. Sự thiêu sống của ông đã là một sự kiện quan trọng trong lịch sử khoa học và sự xung đột giữa khoa học và tôn giáo. Ngày nay, Giordano Bruno được nhớ đến như một người hy sinh vì sự theo đuổi kiến thức khoa học và tự do tư duy, và ý tưởng của ông đã có ảnh hưởng lâu dài đến sự phát triển của khoa học và triết học hiện đại.

[†]François Viète (1540 – 1603), thường được biết đến với biệt danh Vieta, là một nhà toán học người Pháp có công trình nghiên cứu về đại số mới là một bước tiến quan trọng đối với đại số hiện đại, do cách sử dụng sáng tạo của nó của các chữ cái làm tham số trong phương trình. Ông là một luật sư thương mại, và từng là ủy viên hội đồng cơ mật của cả Henry III và Henry IV của Pháp.

[††]René Descartes (1596-1650) là một triết gia, nhà khoa học và nhà toán học người Pháp, được nhiều người coi là một nhân vật tiêu biểu trong sự xuất hiện của triết học và khoa học hiện đại. Toán học là trọng tâm trong phương pháp nghiên cứu của ông, và ông đã kết nối các lĩnh vực hình học và đại số riêng biệt trước đây thành hình học giải tích.

Tổ tiên loài người đầu tiên xuất hiện từ năm triệu đến bảy triệu năm trước, có lẽ là khi một số sinh vật giống vượn ở Châu Phi bắt đầu đi bằng hai chân theo thói quen. Theo Học viện Khoa học California, nơi lưu giữ Bộ sưu tập Công nghệ Thực phẩm Rietz, đũa đã được phát triển cách đây khoảng 5 000 năm ở Trung Quốc. Các phiên bản đầu tiên có lẽ là cành cây được sử dụng để lấy thức ăn từ nồi nấu ăn. Thật khó mà tin được, đôi đũa thôi mà, sao mà mới chỉ xuất hiện cách đây 5 thiên niên kỷ?

Các bạn phải hiểu rằng con người phải ở vào một hoàn cảnh không thuận lợi (như ăn cơm nóng bằng tay) thì mới bắt đầu tìm tòi và phát triển những thứ chưa từng có trước đó. Toán học cũng không ngoại lệ. Lúc học Toán không nên "taken for granted" tức là chấp nhận bất cứ thứ gì mà không nghi vấn cả.

Các nhà Toán học là những người rất lười. Họ không muốn mất thời gian giải vài phương trình lẻ tẻ, kiểu như $x^2 - 5x + 1 = 0, 2x^2 - 5x + 12 = 0$. Họ muốn giải 1 phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó $a, b, c$ có thể là bất cứ số gì. Tại sao? Vì nếu họ tìm ra được nghiệm cho phương trình tổng quát này, thì họ đã giải tất cả phương trình bậc hai! Họ cũng là những người cứng đầu. Bậc hai giải được, thì bậc ba phải giải được, rồi thì bậc bốn, bậc năm. Sau một hồi không có kết quả thì họ thay đổi cách suy nghĩ: hay là bậc năm không thể giải? Và từ đó tìm cách chứng minh giả thuyết này, và trong quá trình mày mò như vậy, họ phát triển nhiều thứ (nhóm, trường, vành ...), mà có ứng dụng vào các nhánh khác của Toán và khoa học khác. Đó là cách mà Toán học đã phát triển và đang phát triển.

Nguồn lịch sử: cuốn *Journey Through Genius* của William Dunham (Dunham, 1991).

Ngày 13 tháng 2 năm 2023

# Chương 22

# Câu chuyện về một nhà Toán học nữ: Sophie Germain

MARIE-Sophie Germain (1776–1831) là một nhà Toán học, Vật Lý học, và triết gia người Pháp. Sophie Germain sinh ra trong thời đại cách mạng. Trong năm bà ra đời, cuộc cách mạng Mỹ bắt đầu. Mười ba năm sau cuộc cách mạng Pháp bắt đầu trên đất nước của bà. Theo nhiều cách, Sophie đã thể hiện tinh thần cách mạng của giai đoạn lịch sử mà bà đã được sinh ra. Sophie bắt đầu quan tâm đến toán học trong cuộc Cách mạng Pháp khi bà 13 tuổi tuổi và bị giữ trong nhà của bà do cha mẹ bà lo sợ nguy hiểm do cuộc nổi dậy gây ra ở Paris.

Khi Germain 13 tuổi, ngục Bastille thất thủ và bầu không khí cách mạng của thành phố Paris buộc bà phải ở trong nhà. Bà đã dành rất nhiều thời gian trong thư viện của cha mình và một ngày bà tình cờ gặp cuốn sách *Lịch sử Toán học* của J. E. Montucla trong đó có truyền thuyết về cái chết của Archimedes. Truyền thuyết kể rằng "trong cuộc xâm lược thành phố của ông ta bởi người La Mã, Archimedes đang rất say mê nghiên cứu về một hình trên cát mà ông không trả lời được câu hỏi của một người lính La Mã. Kết quả là Archimedes bị đâm chết ". Câu chuyện của Archimedes này làm Sophie quan tâm. Nếu ai đó có thể mải mê giải quyết vấn đề đến mức bỏ qua một người lính và sau đó chết vì nó, môn học này hẳn rất thú vị! Và, Sophie Germain bắt đầu nghiên cứu toán học như thế đó. Nhưng mọi chuyện không dễ dàng, chỉ vì bà là phụ nữ!

Sophie theo đuổi việc học trong thư viện của cha mình. Bà thậm chí tự học tiếng Latinh và tiếng Hy Lạp, để có thể đọc các tác phẩm của Newton và Euler vào ban đêm trong khi quấn trong chăn khi cha mẹ đã ngủ - họ đã lấy đi ngọn lửa, ánh sáng và quần áo của bà để cố gắng buộc bà rời xa sách của mình. Cuối cùng cha mẹ bà cũng bớt phản đối việc học của Sohpie, sau khi thức dậy vào một buổi sáng, thấy Sophie không có trên giường và thấy bà ngủ trong thư viện lạnh đến nỗi mực đã đông cứng trong giếng mực.

Sophie Germain được mười tám tuổi khi trường Bách Khoa Paris mở cửa và đúng tuổi để bắt đầu học đại học. Tuy nhiên, không có cách nào để một cô gái có thể trở thành sinh viên. Điều này không ngăn cản được Germain, người đã nhận được các ghi chú bài giảng cho nhiều khóa học từ Bách Khoa Paris bao gồm khóa học giải tích của Joseph-Louis Lagrange[†]. Vào cuối khóa học thuyết trình của Lagrange, ông đã mời các sinh viên của mình gửi cho ông những quan sát bằng văn bản của họ. Sử dụng bút danh Monsieur (ông) LeBlanc, Germain đã gửi một bài báo có tính độc đáo và sâu sắc khiến Lagrange tìm kiếm tác giả của nó.

Mối quan tâm của Germain đối với lý thuyết số thực sự trổi dậy khi bà đọc tác phẩm đồ sộ của Carl Friedrich Gauss–người có mỹ danh là hoàng tử Toán học–là *Disquisitiones Arithmeticae*. Sau ba năm làm việc bà đã viết, một lần nữa, dưới bút danh M. Le Blanc, cho chính tác giả, người trẻ hơn bà một tuổi. Sau này Germain mới tiết lộ danh tính thực sự của mình cho Gauss. Sau đây là những lời Gauss viết cho Germain lúc biết bà là nữ:

[†]Hệ thống giáo dục Pháp cung cấp bài giảng cho tất cả những ai yêu cầu dù không phải là sinh viên.

> *Làm sao tôi có thể diễn tả được sự ngạc nhiên và ngưỡng mộ của mình khi biết được ông Le Blanc biến thành người nổi tiếng này ... khi một người phụ nữ, vì giới tính, phong tục và định kiến của chúng ta, đã gặp vô số trở ngại hơn đàn ông trong việc làm quen với các vấn đề của lý thuyết số, nhưng vượt qua được những gông cùm này và thấu hiểu sâu sắc về Toán, không nghi ngờ gì nữa, cô có lòng dũng cảm cao quý nhất, tài năng phi thường và thiên tài vượt trội.*

Với muôn màn khó khăn như vậy, Sophie Germain, bằng đam mê của mình và cả nổ lực đáng khâm phục, đã trở thành một trong những người tiên phong về lý thuyết đàn hồi. (Lý thuyết đàn hồi là nền tảng cho nhiều ngành kỹ thuật liên quan đến cơ học. Nói đơn giản khi chúng ta tác dụng lực lên một vật rắn–ví dụ cái dầm ở nhà của bạn dưới tải trọng của đồ vật trong nhà bạn–thì nó biến dạng. Và lý thuyết đàn hồi cho chúng ta một công cụ để tính toán độ biến dạng này). Bà đã giành được một giải thưởng lớn từ Viện Hàn lâm Khoa học Paris cho bài luận về chủ đề này. Công trình của bà về Định lý cuối cùng của Fermat đã tạo nền tảng cho các nhà toán học khám phá chủ đề này trong hàng trăm năm sau đó.

Trước khi bà qua đời, Gauss đã đề nghị bà được trao bằng danh dự, nhưng điều đó đã không bao giờ xảy ra! Ngày 27 tháng 6 năm 1831, bà qua đời vì bệnh ung thư vú ở tuổi 55.

Vậy thì mình rút ra được những bài học gì sau khi đọc tiểu sử của Sophie Germain?

- Không nên làm phụ nữ. Đùa thôi nhé, các sư muội, sư tỷ ... Phụ nữ có thể làm bất cứ cái gì họ muốn.
- Có khi muốn tụi nhỏ học cái gì, mình cấm nó mà lại hay, thay vì khuyến khích. Nhà Toán học người Pháp Blaise Pascal đến với Toán học y chang Sophie Germain. Ông cũng bị gia đình cấm học Toán!
- Nếu chú ý thì chúng ta sẽ nhận thấy hai điều thú vị sau về mấy vị tiền bối thuở xa xưa. Thứ nhất: họ chủ yếu tự học, hoặc ít nhất là tự học ở nhà cho đến 12-13 tuổi. Thứ hai: thời đó chưa có sách giáo khoa nên họ học từ các bí kíp võ công do toàn cao thủ viết (Newton, Euler, Gauss, Lagrange vv...). Phải thừa nhận sách giáo khoa cấp 2/3 thời này chất lượng QUÁ KÉM, ở Úc hay Mỹ cũng vậy. Mình có căn cứ chứ không nói bậy nhé. Nhà Toán học người Mỹ Paul Lockahrt đã nói trong cuốn sách nổi tiếng *Lời than thở của một nhà toán học*:

  > *Chắc chắn không có cách nào để giết đi niềm đam mê và sự hứng thú với một môn học hơn là biến nó trở thành một phần bắt buộc của chương trình giảng dạy ở trường. Ban giám hiệu không hiểu toán là gì; Các nhà giáo dục, các tác giả sách giáo khoa, các công ty xuất bản cũng vậy, và đáng buồn thay, hầu hết các giáo viên toán của chúng ta cũng vậy.*

  Mình sẽ dành Chương 30 để nói về quyển sách này.

  Tại sao sách giáo khoa Toán kém chất lượng? Đơn giản bởi vì chúng không phải do cao thủ hàng đầu (tức là các nhà Toán học–người sản sinh ra Toán học) viết! Mình đã kiểm tra xem thử sách GK Toán ở Úc do cao thủ nào viết, thì thấy chỉ có bằng Thạc sỹ. Eo ơi, thạc sỹ năm 2022 thì chẳng đáng một xu. Sách Toán thì phải do nhà Toán học viết! Nhưng phần lớn các nhà Toán học không hứng thú với công việc này, đơn giản vì họ thích làm Toán hơn! Một ví dụ là hiểu ngay: GS Ngô Bảo Châu sẽ dành thời gian để giải các bài Toán cao cấp. Ông sẽ không viết sách GK lớp 10, ít nhất là lúc này. Và điều này là chuyện bình thường. Không phải là lỗi của các nhà Toán học.

- Bài học là: chủ đề nào thì nên đọc sách người đẻ ra nó viết. Sách viết lại (nguồn thứ hai, ba...) là mất đi cái hồn rồi.

Blaise Pascal (1623–1662) là con thứ ba trong số các con của Étienne Pascal và là con trai duy nhất của ông. Mẹ của Blaise mất khi ông mới ba tuổi. Cha của Blaise Pascal có những quan điểm giáo dục không chính thống và quyết định tự mình dạy dỗ con trai mình. Étienne Pascal quyết định rằng Blaise không được học toán trước 15 tuổi (!) và tất cả các sách toán đã bị loại bỏ khỏi nhà của họ. Tuy nhiên, vì tò mò do sự cấm đoán này Blaise bắt đầu tự tìm hiểu về hình học ở tuổi 12. Pascal phát hiện ra rằng tổng các góc của một tam giác là 180 độ và khi cha ông phát hiện ra, ông đã hài lòng và cho phép Blaise một bản sao quyển hình học *Elements* của Euclid. Ông ít dành thời gian cho Toán và đôi khi làm Toán chỉ vì đau không ngủ được.

Pascal đặt nền móng cho lý thuyết xác suất hiện đại, xây dựng cái được gọi là nguyên lý áp suất của Pascal[†], và truyền bá một học thuyết tôn giáo dạy kinh nghiệm về Chúa qua trái tim hơn là qua lý trí.

Hãy giải một bài toán mà ở đó ta sẽ gặp một đẳng thức mang tên Germain. Bài toán là: tính toán biểu thức sau mà không cần máy tính:

$$A = \frac{(10^4 + 324)(22^4 + 324)\cdots(58^4 + 324)}{(4^4 + 324)(16^4 + 324)\cdots(52^4 + 324)}$$

Trước hết, các nhà Toán học là những người lười biếng nên họ dùng $\cdots$ để khỏi phải viết một vài số hạng. Tuy nhiên, ta phải đoán ra chúng, ví dụ số hạng trên tử số tiếp sau $22^4 + 324$ phải là $34^4 + 324$ (vì sao?). Chìa khóa để giải bài này là câu hỏi: *tại sao lại là 324? Nó liên quan gì tới* $\square^4$ *không?* Nhờ câu hỏi đó mà ta viết 324 như thế này: $324 = 4 \cdot 81 = 4 \cdot 3^4$. Sau đó, tất cả các số hạng trong $A$ đều có dạng này: $a^4 + 4b^4$ với $b = 3$ và $a = 10, 22, \ldots$ Vì vậy, chúng ta viết $a^4 + 4b^4$ dưới dạng $(\square)(\square)$ (với hi vọng sau đó ta có thể khử số hạng ở mẫu số và tử số của $A$). Làm thế nào để làm điều này? Trước hết, ta thấy $a^4 + 4b^4 = (a^2)^2 + (2b^2)^2$, gần có dạng $X^2 + Y^2 + 2XY$. Cho nên ta thêm và bớt một đại lượng sao cho có thể dùng $X^2 + Y^2 + 2XY = (X + Y)^2$:

$$\begin{aligned}(a^2)^2 + (2b^2)^2 &= \left[(a^2)^2 + 4a^2b^2 + (2b^2)^2\right] - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2, \quad \text{có dạng } (A)^2 - (B)^2 = (A+B)(A-B) \\ &= (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)\end{aligned} \tag{22.1}$$

Đây là đẳng thức Germain. Bằng cách dùng nó với $b = 3$, chúng ta có:

$$(a^2)^2 + 324 = (a^2 + 18 + 6a)(a^2 + 18 - 6a) = [a(a+6) + 18][a(a-6) + 18] \tag{22.2}$$

Bây giờ thì ta hiểu tại sao $A$ lại có dạng như trong đề bài: trong Eq. (22.2), chúng ta có $a - 6$ và $a + 6$, và lưu ý rằng các số trong tử số và mẫu số trong $A$ khác nhau 6 đơn vị: 10 và 4, 22 và 16 vv. Điều này có nghĩa rằng có nhiều số hạng giống nhau và chúng triệt tiêu lẫn nhau! Quả đúng như vậy, với Eq. (22.2), chúng ta có:

$$\begin{aligned}
&\frac{10^4 + 324}{4^4 + 324} = \frac{\cancel{(10 \cdot 16 + 18)}\cancel{(10 \cdot 4 + 18)}}{\cancel{(4 \cdot 10 + 18)}(4 \cdot (-2) + 18)}, \quad &&\frac{22^4 + 324}{16^4 + 324} = \frac{(22 \cdot 28 + 18)\cancel{(22 \cdot 16 + 18)}}{\cancel{(16 \cdot 22 + 18)}\cancel{(16 \cdot 10 + 18)}} \\
&\frac{34^4 + 324}{28^4 + 324} = \frac{(34 \cdot 40 + 18)\cancel{(34 \cdot 28 + 18)}}{\cancel{(28 \cdot 34 + 18)}(28 \cdot 22 + 18)}, \quad &&\frac{46^4 + 324}{40^4 + 324} = \frac{(46 \cdot 52 + 18)\cancel{(46 \cdot 40 + 18)}}{\cancel{(40 \cdot 46 + 18)}(40 \cdot 34 + 18)} \\
&\frac{58^4 + 324}{52^4 + 324} = \frac{(58 \cdot 64 + 18)\cancel{(58 \cdot 52 + 18)}}{\cancel{(52 \cdot 58 + 18)}(52 \cdot 46 + 18)}
\end{aligned}$$

Gần như tất cả các số hạng loại bỏ lẫn nhau và chỉ còn lại 2 số hạng màu đỏ thôi, và chúng ta có $A = {}^{(58 \cdot 64 + 18)}/_{10} = 373$.

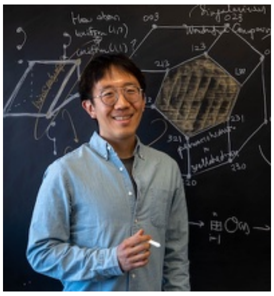
Ngày 27 tháng 11 năm 2022

[†] Vì vậy đơn vị của áp suất trong hệ SI là Pa.

# Chương 23

# Câu chuyện của June Huh

BA mẹ của June Huh là người Hàn Quốc và họ qua California, Mỹ để làm nghiên cứu sinh ở Đại học Stanford. Năm 1983 cậu bé June Huh ra đời. Sau khi ba mẹ Huh tốt nghiệp thì cả nhà June Huh về Seoul sinh sống. Lúc đó June 2 tuổi. Ở Seoul ba anh là giáo sư thống kê ở Đại học Hàn Quốc (Korea University) và mẹ thì là giáo sư văn chương Nga ở Đại học Quốc gia Seoul.



Tuy là con nhà nòi, ấy vậy mà trường học là điều cực kỳ đau khổ cho anh này. June Huh thích học nhưng không thể tập trung hoặc không thể tiếp thu bất cứ điều gì trong lớp học. Thay vào đó, anh thích tự đọc hơn - ở trường tiểu học, anh đã đọc ngấu nghiến tất cả 10 tập từ điển bách khoa về sinh vật - và khám phá một ngọn núi gần căn hộ của gia đình anh. Anh nhanh chóng làm quen với mọi ngóc ngách của nó, nhưng anh vẫn *cố gắng bị lạc*, thậm chí có lần anh ta lạc vào một khu vực cấm do sự hiện diện của mìn.

June đã cố gắng hết sức để tránh môn toán bất cứ khi nào có thể. Lí do rất đơn giản: anh đã có điểm kém trong một bài kiểm tra và do đó nghĩ rằng toán không dành cho mình. Cha anh từng cố gắng dạy anh từ sách bài tập, nhưng thay vì cố gắng giải quyết vấn đề, Huh sao chép lời giải từ bìa sau của quyển sách. Khi cha anh bắt gặp và xé những trang đó ra, Huh đã đến một tiệm sách gần nhà và sao chép câu trả lời ở đó. "Cha mình đã bỏ cuộc vào thời điểm đó," Huh nói sau này trong một cuộc phỏng vấn.

Khi anh 16 tuổi và đang học giữa năm đầu trung học (kéo dài ba năm ở Hàn Quốc), June Huh quyết định *bỏ học để làm thơ*. Anh này là một người lãng mạn. "Tôi thực sự có thể khóc sau khi nghe một bản nhạc hay," Huh nói. Anh đã viết về thiên nhiên và về những trải nghiệm của chính mình. Anh dự định hoàn thành kiệt tác của mình trong hai năm trước khi anh phải học đại học. "Tuy nhiên, điều đó đã không xảy ra," June cười nói.

Khi vào Đại học Quốc gia Seoul năm 2002, anh cảm thấy mình lạc lõng. Anh đã nảy sinh ý định trở thành một nhà báo viết về khoa học trong một thời gian ngắn, nhưng rồi quyết định học chuyên ngành thiên văn và vật lý. Nhưng Huh thường xuyên trốn học, và hệ quả tất yếu là anh ấy phải học lại một số khóa học. *"Nhìn chung tôi đã bị lạc"* anh nói, rồi tiếp *"Tôi không biết mình muốn làm gì. Tôi không biết mình giỏi cái gì. "*

Hóa ra dù sao thì anh ấy cũng giỏi toán - điều mà anh phát hiện ra hoàn toàn tình cờ.

Huh phải mất sáu năm để tốt nghiệp đại học. Vào năm thứ sáu định mệnh đó, anh đăng ký vào một lớp học do nhà toán học nổi tiếng người Nhật Heisuke Hironaka dạy. Hironaka, lúc này khoảng 75 tuổi, là người đã giành được giải Fields năm 1970. Hironaka rất lôi cuốn, và Huh nhanh chóng bị ảnh hưởng bởi Hironaka.

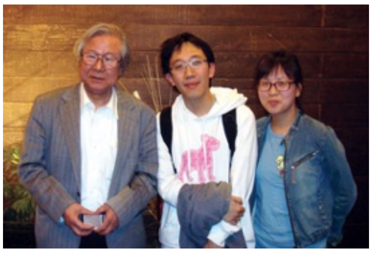
Nhưng không chỉ sự quyến rũ của giáo sư Hironaka đã thu hút Huh vào ngày đầu tiên đến lớp của Hironaka. Chính Toán học đã thu hút June Huh. Rõ ràng, lớp học đó là một giới thiệu về hình học đại số. Nhưng, thay vào đó, Hironaka đã dạy về món võ sở trường của ông: cái được gọi là lý thuyết điểm kỳ dị, tập trung vào một số loại không gian nhất định. "Về cơ bản, thầy Hironaka đã thuyết trình về những gì ông ấy suy nghĩ vào ngày hôm qua," Huh nói - một vấn đề rất cụ thể và những chứng minh còn sai sót. Lớp học bắt đầu với 200 sinh viên thì nay nhanh chóng bị thu hẹp lại; vài tuần sau, chỉ còn lại năm học sinh, Huh là một trong số đó.

Về chuyện này Huh giải thích

> *"Học sinh chuyên toán bỏ học vì không hiểu gì. Tất nhiên, tôi cũng không hiểu gì hết trơn hết trọi, nhưng những học sinh không chuyên có một định nghĩa hoàn toàn khác về việc hiểu biết điều gì đó, "Huh nói. "Tôi đã hiểu một số ví dụ đơn giản mà Hironaka thể hiện trong các lớp học, và điều đó là đủ tốt đối với tôi."*

Lần đầu tiên trong đời, June Huh được chứng kiến một nhà Toán học làm nghiên cứu Toán, ngay trước mắt anh. Các bài giảng của Hironaka không được trau chuốt như trong các khóa học đại học khác, nơi mọi thứ đều được sắp xếp hợp lý, câu trả lời đã có sẵn. Huh yêu thích sự hồi hộp của nó, hành động cố gắng làm điều gì đó mà không ai thực sự biết cách làm - và sự tự do đi kèm với việc không biết, những điều bất ngờ có thể xảy ra. Huh nói, thông thường giáo trình được giảng dạy ở trường đại học đã được tinh chế trong suốt nhiều thế kỷ. "Điều đó rất khác so với việc quan sát toán học thô sơ này trước mắt bạn."

Huh phát hiện ra rằng loại toán học này có thể mang lại cho anh điều mà thơ ca không thể có được: khả năng tìm kiếm vẻ đẹp bên ngoài bản thân, cố gắng nắm bắt một cái gì đó bên ngoài, khách quan và chân thực, theo cách mở ra cho anh nhiều thứ hơn là viết lách. "Bạn không nghĩ về cái tôi nhỏ bé của mình," anh nói. "Không có chỗ cho cái tôi." Anh nhận thấy rằng không giống như khi anh còn là một nhà thơ, anh không bao giờ bị thúc đẩy bởi mong muốn được công nhận. June giờ chỉ muốn làm toán.



Hironaka, có lẽ nhận ra điều này, đã quyết định truyền hết nội công cho June Huh. Sau khi tốt nghiệp, Huh bắt đầu chương trình thạc sĩ tại Đại học Quốc gia Seoul dưới sự hướng dẫn của Hironaka, và anh đã dành nhiều thời gian với Hironaka. Trong thời gian nghỉ hè, anh theo Hironaka trở về Nhật Bản, ở với ông ở Tokyo và Kyoto, xách cặp, ăn chung và tất nhiên là tiếp tục thảo luận về toán học. Một già (75) và một trẻ (26) rất giống cặp Phong Thanh Dương và Lệnh Hồ Xung trong tác phẩm *Tiếu Ngoại Giang Hồ* của Kim Dung Tiên sinh.

Sau khi học xong thạc sỹ, cộng với việc Hironaka hối thúc, năm 2009, ở tuổi 26 Huh đã nộp đơn cho khoảng một chục chương trình tiến sĩ ở Hoa Kỳ. Nhưng vì kinh nghiệm đại học không có gì nổi bật của mình, anh đã bị tất cả họ từ chối. Tuy nhiên, thế thượng vô nan sự, chỉ phạ hữu tâm nhân, đại học Illinois ở Urbana-Champaign dang tay đón nhận anh (người làm việc này có con mắt thần). Năm 2009, anh bắt đầu học tại Đại học Illinois, Urbana-Champaign, trước khi chuyển tiếp sang Đại học Michigan vào năm 2011 để hoàn thành bằng tiến sĩ.

Và phần còn lại là lịch sử. Ở tuổi 34, Huh đang ở đỉnh cao của thế giới toán học. Huh nổi tiếng với chứng minh của mình cùng với các nhà toán học Eric Katz và Karim Adiprasito về một bài toán lâu đời được gọi là phỏng đoán Rota. Vào năm 2022, anh đã được cộng đồng Toán học thừa nhận với giải thưởng cao quý: giải Fields. Câu chuyện của June Huh như thể anh ấy đã cầm vợt tennis lần đầu năm 18 tuổi và vô địch Wimbledon ở tuổi 20! (Nhưng đừng quên rằng ba mẹ của June là Steffi Graf và Andrei Agassi).

Hiện tại Huh đang làm giáo sư Toán ở đại học Princeton, Mỹ.

Sau đây là đôi điều mình cảm nhận được sau khi đọc về câu chuyện của June Huh:

- Dĩ nhiên là chúng ta đọc câu chuyện của June Huh không phải để tìm cách tạo ra một June Huh thứ hai. Đã có nhiều người tìm cách tạo ra Einstein thứ hai nhưng mãi tới giờ, 143 năm sau khi Einstein ra đời, chúng ta vẫn chưa tìm thấy một phiên bản thứ hai của ông.

- Nếu mà June không gặp Hironaka thì chuyện gì xảy ra? Đơn giản thì nước Hàn Quốc phải chờ thêm một thời gian nữa mới có công dân đầu tiên dành giải Fields. Và Hironaka thì không thể trở thành Hoàng đế Beckenbauer, người vừa vô địch World Cup trên tư cách cầu thủ và huấn luyện viên.

- Chỉ có cao thủ tầm cỡ như Hironaka mới dám dạy "phá cách" và chỉ cách dạy như vậy mới tạo ra một June Huh mà chúng ta thấy như ngày hôm nay.

Nếu bạn xem June nói chuyện trên Youtube bạn sẽ ngạc nhiên khi biết June chỉ làm việc từ 9 giờ sáng đến 3 giờ chiều, sau đó anh đi đón con, rồi thời gian còn lại June dành hoàn toàn cho gia đình. Nhà toán học người Anh Godfrey Harold Hardy thậm chí làm việc còn ít hơn, từ 9 giờ sáng đến 1 giờ chiều (Hoffman, 1998). Tại sao họ làm ít như vậy? Vì họ thông minh nên không cần làm nhiều? Không hẳn vậy, ở Chương 24 mình sẽ bàn về vấn đề quan trọng này. (Quan trọng vì làm ít mà hiệu quả thì còn thời gian làm nhiều thứ khác.)

Ngày 18 tháng 9 năm 2022

# Chương 24

# Chuyện dạy và học

THỬ tưởng tượng một lớp học Toán có khoảng 30 học sinh và giáo viên là một cô giáo dạy giỏi. Sao biết cô dạy giỏi? Vì cô được tỉnh hay thành phố trao cho bằng khen "Giáo viên dạy giỏi". Mặc dù cô dạy giỏi và rất tâm huyết với nghề, kết thúc năm học, câu chuyện nó luôn thế này, từ năm này sang năm khác. Một số ít bạn có điểm cao, một số khác có điểm khá, còn lại là điểm dạng tẹt bẹt.

Dù là điểm gì thì hầu như không bạn nào thật sự hiểu về cái mình đã học.

Lỗi của ai? Của cô giáo? Không! Cô giáo là người có tâm và đã tìm ra "cách dạy tốt nhất" (ít nhất là theo đánh giá của cô và của tổ Toán của trường). Thật ra không là lỗi của ai hết. Một phương pháp có thể là tốt nhất cho học sinh A nhưng không dùng cho học sinh B được.

Trong nỗ lực tìm cách giải quyết vấn đề (làm sao dạy Toán hiệu quả), giáo viên và các nhà giáo dục đã tổ chức không biết bao hội thảo, workshop ... Thậm chí có nhiều nơi (nơi nào thì bạn tự đoán) sách giáo khoa được xem là nguyên nhân nên người ta cứ thay sách thường xuyên.

Điều đáng buồn là trong lúc giáo viên tìm cách dạy tốt nhất, họ không cho học sinh nghỉ học. Kiểu như: "các em nghỉ học cho đến khi các cô thầy tìm được cách dạy tốt nhất rồi đi học lại". Lí do là không ai biết sẽ mất bao lâu để tìm ra lời giải. Do đó, học trò vẫn phải đến lớp và học với phương pháp truyền thống mà không hiệu quả.

Nếu giáo viên và các nhà giáo dục không biết câu trả lời, không lẽ các em học sinh ngồi yên không làm gì sao? Dạy và học là chuyện của giáo viên và học sinh. Thế nên, các em học sinh cũng phải có trách nhiệm (mình ám chỉ học sinh lớp 7 trở lên). Thay vì ngồi yên thì các bạn có thể suy nghĩ về ba vấn đề sau đây: động lực, tự học và dạy ngược.

- **Động lực**: không có động lực thì thật khó cho một học sinh chui ra khỏi cái giường ấm vào lúc sáng sớm để đến trường. Không có động lực thì thật khó để một học sinh chịu rời cái ghế sofa dễ chịu khi đang xem phim mà sang cái bàn học đáng ghét. Do đó, các em học sinh mà chưa tìm được đồng cảm với việc học thì phải tìm ra động lực. Làm sao tìm ra động lực thì mình sẽ bàn sau.

- **Tự học**: như đã bàn ở trên, không có một cách duy nhất cho việc học. Vì vậy nếu cách của giáo viên hợp với bạn, xin chúc mừng bạn. Ngược lại, nếu cách đó không hợp thì làm sao? Thì tự học chứ làm sao. Nhưng tuyệt đối đừng cho là mình dốt hay có suy nghĩ môn đó mình học không được. Maya Angelou (1928–2014) là một nhà viết hồi ký, nhà thơ nổi tiếng và nhà hoạt động dân quyền người Mỹ, đã nói một câu rất hay như sau

  > *"Nếu bạn không thích điều gì đó, hãy thay đổi nó. Nếu bạn không thể thay đổi nó, hãy thay đổi thái độ của bạn. Đừng phàn nàn."*

  Do đó, hãy hành động, đừng phàn nàn giáo viên dạy không hay, hoặc tui không có trí nhớ tốt. Phàn nàn như vậy không thay đổi được kết quả học tập trong quá khứ của bạn. Ashleigh Ellwood Brilliant (sinh ngày 9 tháng 12 năm 1933) là một tác giả và họa sĩ truyện tranh người Mỹ gốc Anh đã nói: "*Không có gì chúng ta có thể làm có thể thay đổi quá khứ, nhưng mọi thứ chúng ta làm đều thay đổi tương lai*".

- **Dạy ngược**: dù bạn có điểm cao một môn nào đó thì chưa chắc bạn đã hiểu thấu đáo về môn đó. Cách duy nhất để bảo đảm là bạn hiểu một vấn đề gì là bạn dạy nó cho một người chưa biết gì về môn đó. Nếu không có ai chịu ngồi nghe bạn dạy thì viết note, viết blog. Bạn có thể làm như sau. Giả sử bạn mới học xong đề tài về logarit. Để cho vài ngày trôi qua cho bạn quên những lời cô giảng, bạn ra công viên, với vài tờ giấy trắng (và một quyển vở trắng để nháp) và một cây bút. Rồi bạn viết, tại sao chúng ta phải có logarit? Có logarit rồi thì logarit ứng xử như thế nào? Tại sao chọn cơ số 10? Cơ số khác được không? Muốn chuyển cơ số thì làm sao? ... Sau đó đưa những gì bạn viết cho một người khác nhỏ hơn và chưa biết logarit. Nếu người này đọc xong mà hiểu đại ý của logarit thì bạn đã hiểu logarit vậy. Nếu không có ai đọc thì bạn đọc cũng được, để vài tuần rồi đọc lại những gì bạn viết.

**Động lực**. Mình nghĩ là giáo viên và phụ huynh nên giúp cho các em tìm ra động lực. Dĩ nhiên mỗi phụ huynh sẽ có cách riêng để chỉ ra cho con của họ cách tìm động lực. Ví như ba mình thì lấy "thoát nghèo" làm động lực cho mình học. Nghe có vẻ không hào nhoáng nhưng rất thực tế. Về giáo viên thì mình nghĩ *không nên dành toàn bộ thời gian để dạy chuyên môn* (nếu vậy cần chi sách giáo khoa?). Thay vào đó, họ nên chỉ cho học sinh cái hay, đẹp của môn học họ phụ trách. Chỉ cho học sinh học môn này để làm gì, chia sẻ với học sinh kinh nghiệm học tập, chia sẻ với học sinh những quyển sách hay mà họ đã đọc... Mình đi học 18 năm và chưa gặp được một thầy/cô nào làm được dù là một trong những điều này, mình thật là kém may mắn!

Nếu cha mẹ và thầy cô không làm được điều này vì một lí do nào đó thì các bạn trẻ có thể tự làm. Cuộc đời là của bạn mà. Phải chăng các bạn trẻ nên hỏi bản thân: học để làm gì? Sau khi trả lời được câu hỏi đó, thì hỏi tiếp: nhà trường nơi mình đang học có cho mình cái mình cần không? Nếu có thì tiếp tục học, còn không thì phải hành động ngay. Đừng có bị động. Các bạn có thể tự đọc sách (sách là túi khôn của nhân loại mà) và *đọc nhiều*: lịch sử, văn chương, kỹ thuật, khoa học, hội họa, vv bạn sẽ tìm ra cái mình thích. (Không phải sách giáo khoa nhé, những sách này viết dở ẹt à.) Các bạn nên cố gắng tìm cho mình câu chuyện của Nick Appleyard (Oakley, 2014), câu chuyện như sau:

> *Một ngày nọ, có điều gì đó bắt đầu thay đổi, mặc dù lúc đó tôi không nhận ra. Bố tôi mang về nhà một chiếc máy tính. Tôi đã nghe nói về những đứa trẻ ở tuổi thiếu niên viết các trò chơi máy tính tại nhà mà mọi người đều muốn chơi và trở thành triệu phú chỉ sau một đêm.* ***Tôi muốn trở thành một trong những đứa trẻ đó.*** *Tôi đã đọc, thực hành và viết các chương trình ngày càng khó hơn, tất cả đều liên quan đến một dạng toán nào đó. Cuối cùng, một tạp chí máy tính nổi tiếng của Vương quốc Anh đã chấp nhận xuất bản một trong những chương trình của tôi—một điều thực sự xúc động đối với tôi.*

Cái dòng **Tôi muốn trở thành một trong những đứa trẻ đó** là cái quan trọng. (Tiếc là mình chỉ tìm ra câu này lúc học cao học, quá muộn!) Nếu bạn có thể tìm ra nó sớm thì sẽ có nhiều thời gian để 'tu luyện nội công' và có thời gian tìm những đam mê khác. Đam mê thì có thể nhiều hơn một, nên dù đã tìm ra một đam mê thì cũng phải đọc nhiều để tìm xem thử mình còn đam mê khác không. Xin kể thêm một câu chuyện thật về đại văn hào người Pháp Honoré de Balzac (1799–1850). Trước khi trở thành một tiểu thuyết gia lừng danh ở thế kỷ 19, Balzac đã từng bày tỏ lý tưởng của mình trong bức thơ gửi em gái: "*Anh nhất định bắt đầu nghề cầm bút bằng một văn phẩm tuyệt tác, nếu không thì thà chết còn hơn*". Tại căn phòng làm việc, ông còn đặt một tượng bán thân hoàng đế Napoléon và ghi một hàng chữ thật đanh thép: "*Cái gì mà Napoléon đã làm được bằng lưỡi gươm, thì tôi cũng sẽ thực hiện bằng ngòi bút*". Có nuôi cái lý tưởng phi thường đó thì ông mới để lại cho đời một sự nghiệp văn chương phong phú. Nếu không nuôi lý tưởng đó, cái tên Balzac chắc không giờ được lưu trong văn học sử Pháp.

Nhà toán học người Anh John Adam trong cuốn *Mathematics in Nature* đã kể chính câu chuyện của ông như sau: "Khoảng mười một tuổi, tôi phát triển đam mê với thiên văn học. Tôi đọc tất cả mọi thứ về nó mà tôi có thể lấy được. Với sự hổ trợ từ cha mẹ, tôi đã mua một chiếc kính thiên văn tuyệt đẹp nhưng có một chút móp méo mà tôi vẫn sử dụng đến ngày nay. Tôi đã dành rất nhiều thời gian buổi tối bên ngoài với nó, quan sát bầu trời. Tôi vừa mới bắt đầu học trường trung học phổ thông ở Anh, kéo dài từ 11 đến 18 tuổi. Vào thời điểm đó, chúng tôi đã được chia thành các nhóm theo khả năng khác nhau; tại trường Henley-on-Thames, nơi tôi học, có ba nhóm. Do tôi hơi chậm nên tôi được đặt vào nhóm trung và tôi ở đó hầu hết thời gian học tại trường. Tôi nhớ rất rõ giáo viên toán học của tôi, thầy Archibald Chanter, đã hỏi tất cả chúng tôi muốn trở thành gì khi lớn lên. Khi đến lượt tôi, tôi tự hào nói,

"*con muốn trở thành một nhà thiên văn học, thưa thầy*.

Ngay lập tức, một nét lo lắng xuất hiện trên khuôn mặt thầy, khi ông nhăn mày và nói,

"*Nhưng Adam, nhà thiên văn học cần phải biết rất nhiều toán học, và con thì gần như nằm ở dưới cùng của lớp trong môn này.*"

Nhìn lại, đó là một thời điểm quyết định đối với tôi. Tôi có hai lựa chọn, mặc dù lúc đó tôi không hiểu rõ: nản chí và từ bỏ, hoặc sử dụng cơ hội này để đối mặt với thách thức và làm việc chăm chỉ để học và hiểu toán học để trở thành một nhà thiên văn học. Rồi, tôi chọn cái thứ hai. Nhưng, mọi thứ không thay đổi ngay tức thì. Tôi đã nỗ lực và kiên trì trong sáu hoặc bảy năm tiếp theo, đôi khi dành cả cuối tuần để làm bài tập toán. Tôi nhớ một giáo viên toán học khác viết trong bảng điểm vài năm sau đó rằng "bằng sự cố gắng cần mẫn, Adam đôi khi có thể đạt được nhiều hơn so với những người bạn thông minh xung quanh." Và đó chính là điều bí mật của tôi: cần cù, cần cù, cần cù và may mắn là có bố mẹ hỗ trợ rất nhiệt tình. Trong quá trình học Tiến sĩ về thiên văn học lý thuyết từ Đại học Luân Đôn, tôi đã trở nên mê mệt em toán ứng dụng đến mức tôi quyết định, nếu có thể, đi theo hướng trở thành một giáo sư trong lĩnh vực đó."

Nhờ phát hiện ra đam mê sớm, Adam đã có thời gian để luyện công trước khi quá muộn. Sau này ông không trở thành một nhà thiên văn học nhưng ông là giáo sư Toán ĐH Old Dominion University bang Virgina nước Mỹ.

Một so sánh đơn giản sẽ cho thấy việc học không bao giờ là vô ích. Thường thì chúng ta không phải chống đẩy hay kéo xà trong cuộc sống hàng ngày. Tuy nhiên, những bài thể dục đó rõ ràng không là vô ích—chúng giúp chúng ta khỏe mạnh. Tương tự như vậy, những gì chúng ta học có thể khác với những gì chúng ta làm trong cuộc sống hàng ngày—không ai cần công thức tính nghiệm phương trình bậc hai $x = {}^{-b\pm\sqrt{\Delta}}/_{2a}$ trong cuộc sống thường nhật cả. Nhưng việc học giúp chúng ta có một trí tuệ để không bị người khác lừa.

Khi có động lực, khi đã tìm ra đam mê thì làm gì nữa? Ca dao tục ngữ nước ta đã có câu trả lời rồi:

Thương em mấy núi cũng trèo,
Mấy sông cũng lội, mấy đèo cũng qua.
Thương em không quản chi xa,
Đá vàng cũng quyết, phong ba cũng liều.

Lúc đó, không cần ai nhắc cả, bạn sẽ tìm mọi cách để đạt được điều bạn muốn. Ví dụ thì nhiều lắm, nhưng xin nêu ra chỉ một. Demosthenes (384–322 trước Công nguyên) là một chính trị gia và diễn thuyết gia Hy Lạp tại Athens cổ đại. Demosthenes, một người cùng thời với Plato và Aristotle, là con trai của một thợ rèn kiếm giàu có. Cha ông qua đời khi ông mới bảy tuổi, để lại một gia sản lớn, nhưng những người giám hộ không trung thực đã lợi dụng tình hình của họ và khi Demosthenes đến độ tuổi, ông chỉ nhận được một ít tài sản. *Khao khát mạnh mẽ của ông muốn kiện người giám hộ của mình–Aphobus–trước toà án, kết hợp với thể trạng yếu đuối không cho phép ông nhận được việc rèn luyện thể dục kiểu Hy Lạp thông thường*, đã dẫn ông tự rèn luyện mình làm diễn thuyết gia. Ông cũng nghiên cứu nghệ thuật biện luận pháp lý. Trong cuốn *Cuộc sống song hành*, nhà sử học người Hy Lạp Plutarch kể rằng Demosthenes đã xây dựng một phòng học ngầm nơi ông tập luyện giọng điệu, cạo bớt một nửa đầu để không thể ra ngoài công cộng. Plutarch thêm rằng Demosthenes có khuyết điểm về phát âm, "một cách phát âm không rõ ràng và nói líu lo", mà ông đã vượt qua bằng cách đặt sỏi trong miệng và đọc thơ khi chạy. Ông cũng luyện tập nói trước một tấm gương lớn. Bây giờ ông được công nhận là nhà diễn thuyết Hy Lạp cổ đại vĩ đại nhất. Các bài diễn thuyết của ông cung cấp thông tin quý báu về cuộc sống chính trị, xã hội và kinh tế của Athens thế kỷ 4.

**Tự học**. Nếu bạn không "cùng gu" với giáo viên thì, xin lỗi quí vị giáo viên, quên họ đi. Câu chuyện của Quách Tĩnh trong *Anh Hùng Xạ Điêu* của Kim Dung tiên sinh thật ra có thể cho chúng ta nhiều bài học về dạy và học. Quách đại hiệp lúc đầu học võ với Giang Nam Thất Hiệp; thế nhưng anh học hoài mà không có tiến bộ đáng kể. Có nhiều nguyên nhân lý giải cho việc này nhưng tóm lại có hai lí do chính. Thứ nhất, Giang Nam Thất Hiệp dạy Quách Tĩnh với mục tiêu là cái hẹn với Trường Xuân tử Khưu Xứ Cơ (mà mục tiêu là thắng Dương Khang); cái lí do này cũng như học vì điểm số vậy. Chỉ cần đạt điểm 7 qua môn, không cần hiểu, cách này không hiệu quả. Thứ hai Giang Nam Thất Hiệp võ công tạp chủng quá. Chỉ sau khi chàng Tĩnh ca của Hoàng Dung gặp Đan Dương tử Mã Ngọc và được ông dạy cho nội công (học cái gốc) thì Quách Tĩnh mới học hành tiến bộ.

Như vậy nếu bạn không may "không cùng gu" với giáo viên thì các bạn có thể: (1) tìm người khác để học, (2) tìm trên youtube một người dạy online hay, (3) tìm một quyển sách thật hay và học từ nó. Trương Vô Kỵ học Cửu Dương Thần Công theo cách này. Xin xem Chương 31 về câu chuyện thật của Euler tự học Toán như thế nào.

Bạn phải biết cái não của mình thích hợp với kiểu học gì. Nếu bạn là người học hiệu quả bằng cách đọc sách thì trước hết đọc sách. Nếu vẫn không hiểu thì nhờ bạn bè giải thích hay lên Youtube nghe ai đó giải thích. Nên chú ý rằng, đôi khi cho một chủ đề cần có vài quyển sách, làm như vậy để tìm ra quyển sách phù hợp với gu của bạn.

Isaac Asimov (1920 – 1992) là một nhà văn người Mỹ và là giáo sư hóa sinh tại Đại học Boston. Trong suốt cuộc đời của mình, Asimov được coi là một trong "Bộ ba" nhà văn khoa học viễn tưởng, cùng với Robert A. Heinlein và Arthur C. Clarke. Là một nhà văn sung mãn, ông đã viết hoặc biên tập hơn 500 cuốn sách. Asimov viết rằng

> *"Tôi tin chắc rằng tự học là hình thức giáo dục duy nhất."*

Tự học càng trở nên quan trọng trong thế giới ngày nay. Trong cuốn *A More Beautiful Question*, tác giả Warren Berger viết "Joichi Ito, giám đốc của MIT Media Lab[†] danh giá, đưa ra một lý thuyết thú vị về sự cần thiết của sự thích nghi trong suốt cuộc đời. Khi thế giới diễn ra chậm hơn và mọi thứ không quá phức tạp, chúng ta dành phần đầu đời trong giai đoạn học hỏi. Sau đó, khi trở thành người trưởng thành, *bạn xác định công việc của mình và lặp đi lặp lại điều đó suốt đời*. Hôm nay, Ito giải thích rằng do sự thay đổi liên tục và tăng độ phức tạp, cách tiếp cận này trong cuộc sống người lớn không còn hiệu quả như trước. Trong thời đại khi rất nhiều điều chúng ta biết có thể bị điều chỉnh hoặc lỗi thời, người chuyên gia, vốn đang sống thoải mái, nay phải trở lại với việc trở thành *một người học tập không ngừng nghỉ*." (Berger, 2014).

Nhận xét này không có gì đáng ngạc nhiên. Tổ tiên chúng ta chỉ cần thuộc tứ thư ngũ kinh, rồi thi đậu cử nhân, phó bảng, hay tiến sĩ là làm quan sống thoải mái cả đời. Thời cha ông chúng ta, đang đi làm, thì phải học thêm vi tính. Thời nay với sự phát triển mạnh mẽ của trí thông minh nhân tạo, các bạn trẻ sẽ phải không ngừng học hỏi, nếu muốn tồn tại. Mà nhà trường thì cũng chỉ có thể dạy bạn lúc trẻ thôi, còn lại bạn phải tự bơi thôi.

Cuối cùng, nếu tui không tìm được cái động lực 'học để làm gì' thì làm sao? Thì học cho có thôi, chứ sao. Tức là học để đừng ở lại lớp, còn dành lại thời gian tìm động lực. Thế giới này nó bao la bác ngát, không Toán, thì Lý. Không Toán, Lý thì Hóa Sinh. Mà không mấy thứ đó thì thơ ca thi phú. Không nữa thì là hội họa và âm nhạc. Vẫn không thích? Thì thể thao (bóng đá, bóng bàn, cờ tướng, điền kinh ...). Cứ như vậy cho đến khi bạn tìm thấy động lực thì bỏ hết và chỉ tập trung vào nó thôi.

Nhiều diễn viên Holywood đã làm vậy. Đang học cấp ba thấy không hợp, và thích đóng phim. Bỏ học đi học làm diễn viên. Dĩ nhiên không phải ai làm vậy đều thành diễn viên hạng A

[†]MIT Media Lab là một phòng thí nghiệm nghiên cứu tại Viện Công nghệ Massachusetts (MIT), phát triển từ Nhóm Máy kiến trúc MIT trong Khoa Kiến trúc. Nghiên cứu của viện không giới hạn trong các lĩnh vực học thuật cụ thể, mà thu thập từ công nghệ, truyền thông, khoa học, nghệ thuật và thiết kế.

Holywood. Nhưng có ai hối tiếc khi đã yêu đơn phương một người không? Mình nghĩ là phần lớn chúng ta không hối tiếc đã làm chuyện mình thích, dù kết quả thế nào. Vì ít nhất mình có thể tự hào mà nói với con cháu “ít nhất ông đã give it a shot!”. Dù trong trường hợp của mình, mối tình đầu giờ hận mình tới xương tủy, nhưng mà quay lại thời cấp 2 mình vẫn chọn thích cô ấy. Vì mình không thể làm khác được!

**Đọc sách**. Joseph Addison (1672–1719) là một nhà tiểu luận, nhà thơ, nhà viết kịch và chính trị gia người Anh. Ông đã nói về tầm quan trọng của đọc sách như sau

> *"Đọc sách đối với trí óc cũng như tập thể dục đối với cơ thể."*

Hay như Desiderius Erasmus Roterodamus (1466 – 1536), một triết gia và nhà thần học Công giáo người Hà Lan, người được coi là một trong những học giả vĩ đại nhất của thời kỳ Phục hưng phương Bắc, đã dùng hết tiền mua sách:

> *“Khi tôi có ít tiền, tôi mua sách; và nếu còn lại tôi sẽ mua thức ăn và quần áo.”*

Sao toàn mấy ông thời cổ lổ sỹ vậy Phính. Ok thôi. Charlie Munger (sinh năm 1924), Phó Chủ tịch của Berkshire Hathaway, một nhà đầu tư nổi tiếng và cánh tay mặt của Warren Buffett, đã nhấn mạnh tầm quan trọng của việc đọc sách suốt đời. Một trong những câu nói nổi tiếng của ông về việc đọc sách là:

> *"Trong cả cuộc đời tôi, tôi không biết đến bất kỳ người khôn ngoan nào (với một lĩnh vực kiến thức rộng) mà không đọc sách suốt thời gian - không có ai, không một ai."*

Tại sao chúng ta nên đọc sách? Rất đơn giản: học từ tiền nhân những gì tinh túy nhất. Con người đã ghi lại kiến thức của nhân loại dưới dạng sách trong hơn 5 000 năm. Điều đó có nghĩa là bất cứ điều gì bạn đang làm lúc này, bất kỳ vấn đề nào bạn đang gặp khó khăn, đều đã được giải quyết trong một cuốn sách nào đó ở đâu đó bởi một người thông minh hơn bạn rất nhiều. Hãy tránh cho mình những rắc rối khi học từ thử và sai – hãy tìm ra cuốn sách đó.

Đọc sách thì ai biết chữ cũng làm được, nhưng mà quan trọng là đọc sách gì kìa. Chúng ta phải tìm đọc những quyển sách mà làm cho chúng ta mở mắt ra, sách làm cho chúng ta phải kinh ngạc, sách được viết bởi cao thủ hàng đầu. Ở đây mình xin chia sẻ một cách rất hay để tìm ra những tuyệt tác để đọc. Có nhiều người được sinh ra trong một gia đình có một tủ sách thật lớn. Một ngày đẹp trời họ tình cờ mở một quyển sách. Và nó cho biết con đường họ sẽ đi lúc lớn lên. Cũng có một số người, tuy nhà không có tủ sách lớn, nhưng họ may mắn gặp được người thầy ham đọc sách. Và người thầy này cho họ mượn một quyển sách mà cũng thay đổi cuộc đời họ. Dĩ nhiên có nhiều người, rất nhiều là đằng khác, không rơi vào hoàn cảnh trên. Và mình là một trong số đó.

Vậy thì làm sao tìm quyển sách bí kíp đó?

Thật ra thì rất dễ. Những bạn này chỉ việc xem những người thành đạt đọc sách gì, rồi đọc theo. May mắn là rất nhiều người thành đạt chia sẻ những quyển sách họ thích. Bạn có thể xem Bill Gates[¶] hay Elon Musk đọc gì. Mình thích Steven Strogatz–nhà Toán học người Mỹ, nên mình tìm hiểu xem ông đọc sách gì. Đây là 40 quyển sách ông thích: `https://www.readthistwice.com/person/steven-strogatz`.

Sau đây là một số sách có thể giúp chúng ta nâng cao trí tưởng tượng. Tại sao cần cái này? hãy nghe Albert Einstein nói: “Trí tưởng tượng quan trọng hơn kiến thức. Vì kiến thức chỉ giới hạn ở tất cả những gì chúng ta biết và hiểu hiện nay, trong khi trí tưởng tượng bao trùm toàn bộ thế giới, và tất cả những gì sẽ biết và hiểu”

- *Flatland* viết bởi Edwin A. Abbott;

[¶]Link: `https://www.gatesnotes.com/Books`.

- *The Quantum and the Lotus* của Trịnh Xuân Thuận[†] và Matthieu Ricard[‡];
- *You Are Not So Smart: Why You Have Too Many Friends on Facebook, Why Your Memory Is Mostly Fiction, and 46 Other Ways You're Deluding Yourself* của David McRaney; đây là một cuốn sách về tâm lý học, mà theo thiển ý của mình chúng ta phải biết, để hiểu tại sao chúng ta cư xử theo cách chúng ta vẫn hay làm.

Nhưng Phính ơi, đọc bao nhiêu một ngày? Cái này thì P không có câu trả lời. Xin dùng câu chuyện của Elon Musk–chủ của Tesla. Trước khi trở thành ông chủ của Tesla, Elon Musk đọc 10 giờ một ngày. Các bạn trẻ có nhiều thời gian có thể làm theo Elon, còn người bận rộn thì làm thế nào? Xin đừng lo lắng. Có một quy tắc, gọi là *quy tắc năm giờ* được đặt ra bởi Michael Simmons–người sáng lập Empact[**]. Khái niệm này cực kỳ đơn giản: Bất kể những người thành công bận rộn đến đâu, họ luôn dành *ít nhất một giờ mỗi ngày — hoặc năm giờ mỗi tuần — để học hoặc thực hành*. Và họ làm điều này trong toàn bộ sự nghiệp của họ. Bill Gates đọc 50 sách mỗi năm. Mark Zuckerberg đọc ít nhất một quyển sách trong hai tuần. Warren Buffett dành 5 đến 6 giờ mỗi ngày để đọc 5 tờ báo và 500 trang báo cáo của công ty.

Lấy mô ra thời gian dữ vậy? Bận lắm, Phính ơi. Vậy bạn lấy thời gian đâu ra mà ngày ăn ba bữa, ngày ngủ 8 tiếng, ngày lướt Facebook hai tiếng? Muốn đọc sách (để trở nên một con người tốt hơn) thì phải xem đọc sách như ăn, như ngủ, như thở vậy. Khi đã như vậy thì có thời gian thôi.

Mà đọc nhiều vậy làm sao nhớ nổi? Nếu không nhớ thì xem như lãng phí thời gian. Hỏi hay lắm! Đó chính là lí do từ cổ chí kim các danh nhân đều có một cái gọi là *commonplace book* để lưu giữ lại những gì họ đã đọc được. Chúng ta có thể kể một vài cái tên như Charles Darwin, Ralph Waldo Emerson, Mark Twain, Bill Gates. Hình 24.1 là một ghi chú của Darwin viết vào ngày 11 tháng 11 năm 1838; Darwin đã viết trong nhật ký của mình 'Ngày của các ngày!'. Ông đã cầu hôn em họ của mình, Emma Wedgwood, và được chấp nhận.

Không biết các quí ông khác thì như thế nào chứ đối với mình chỉ có con gái thì mới viết nhật ký. Kiểu như Anne Frank. Còn trai thì đá bóng, đánh lộn, vậy nó mới là đàn ông. Với cái hiểu biết hết sức ngô nghê đó, mình sống 40 năm chưa bao giờ viết nhật ký. Đá banh cũng có, đánh lộn cũng có, nên mới thành đàn ông. Bằng chứng là có bà xã chịu cưới, và con có hai con chó. Cuộc đời vốn cứ thế trôi qua, cho đến khi lọt vô cái hố gọi là 'khủng hoảng tuổi trung niên' thì đọc sách, đọc rất nhiều, đọc như thể như chưa từng được đọc. Đọc nhiều như vậy thì mình thấy gì?

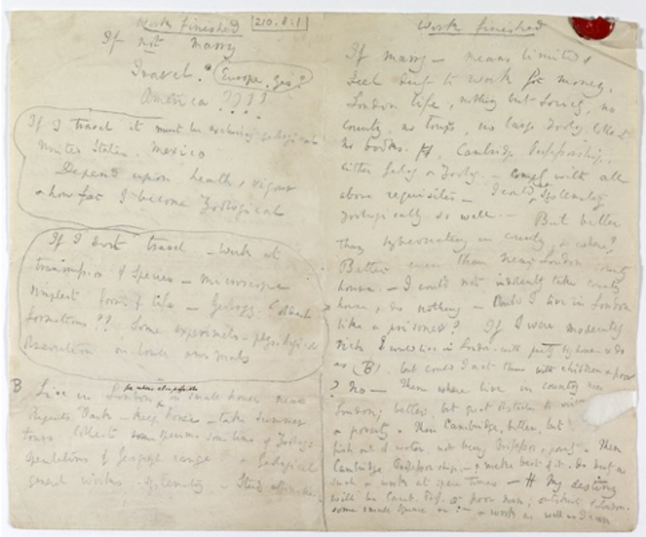
Thì mấy ông như Leonardo da Vinci, Newton, Charles Darwin và vô số ông Tây khác không phải là ... đàn ông. Ông nào cũng có một cuốn nhật ký mà người Tây gọi là 'commonplace book'. Ví như Charles Darwin–người cho chúng ta thuyết tiến hóa–có một book như vậy trong đó ông viết hàng ngày. Ông viết về chuyến đi dài năm năm trên con tàu Beagle (mà nhờ đó ông nghĩ ra thuyết tiến hóa), ông viết cả những suy nghĩ khi quyết định lấy vợ. Đọc rất vui.

Vậy tại sao Darwin lại làm cái chuyện 'con gái' như vậy? Rất đơn giản: *cái não ông không thể chứa hết những thông tin ông thu thập được*. Nếu không viết thì ông sẽ mất tất cả những gì đã đọc được, đã quan sát được. Đơn giản thế thôi. Hơn nữa chỉ khi viết xuống thì hiểu biết của chúng ta mới kết tinh thành một sự hiểu biết thật sự. Do đó, nếu một người nói đọc rất nhiều sách mà không làm ra trò trống gì cả (như Phính) thì cũng không có gì lạ. Vấn đề không phải là đọc nhiều mà là đọc như thế nào. Nếu đọc một quyển sách xong, rồi qua đọc quyển khác, cứ như

[†]Trịnh Xuân Thuận (sinh năm 1948) là nhà vật lý thiên văn người Mỹ gốc Việt. Ông là người nhận giải thưởng Kalinga của UNESCO năm 2009 cho công việc phổ biến khoa học của mình. Ông đã nhận được giải thưởng chủ tịch Kalinga tại Đại hội Khoa học Ấn Độ lần thứ 99 tại Bhubaneswar. Năm 2012, ông được trao giải thưởng Prix mondial Cino Del Duca từ Institut de France. Giải thưởng này công nhận các tác giả có tác phẩm, văn học hoặc khoa học, tạo nên một thông điệp về chủ nghĩa nhân văn hiện đại.

[‡]Matthieu Ricard (sinh năm 1946) là một nhà văn, nhiếp ảnh gia, dịch giả và tu sĩ Phật giáo người Pháp cư trú tại Tu viện Shechen Tennyi Dargyeling ở Nepal. Ông nhận bằng Tiến sĩ về di truyền học phân tử tại Viện Pasteur năm 1972. Sau đó, ông quyết định từ bỏ sự nghiệp khoa học của mình và thay vào đó thực hành Phật giáo Tây Tạng, sống chủ yếu ở dãy Hy Mã Lạp Sơn.

[**]Nguồn: `http://michaeldsimmons.com/why-constant-learners-all-embrace-the-5-hour-rule-mm09/`.



Hình 24.1: Một note trong nhật ký của Darwin trong đó ông viết "Nhưng rồi nếu tôi kết hôn vào ngày mai: sẽ có vô số rắc rối và tốn kém trong việc kiếm và trang bị nhà cửa, — đấu tranh về việc không có Hội — gọi điện buổi sáng — lúng túng — mất thời gian mỗi ngày. Thế thì làm sao tôi quản lý công việc nghiên cứu của mình nếu tôi bắt buộc phải đi dạo với vợ hàng ngày." Các bản thảo gốc của các ghi chú của Darwin hiện nằm trong Kho lưu trữ Darwin trong Thư viện Đại học Cambridge.

thế, thì dù một năm có đọc 100 cuốn cũng chỉ làm được một chuyện...giết thời gian. Dĩ nhiên, chuyện này là chuyện bình thường, ý mình muốn bàn về cách làm sao trở thành người có đóng góp to lớn cho nhân loại. Không phải cho Phính này, mà cho các bạn trẻ. Đọc sách phải đi kèm với ghi chú lại cẩn thận những gì tinh túy nhất, những suy nghĩ, những nhận xét của bản thân trong cái commonplace book. Chừng đó cũng chưa đủ. Chúng ta hay nghe Bill Gates mỗi năm dành ra một khoảng thời gian nhất định, chỉ để đọc sách. Mà ông đọc những gì? Mình không biết rõ nhưng mà chắc chắn là Gates đọc rất nhiều loại: tiểu thuyết, khoa học (hóa, lý, sinh, y ...), kỹ thuật vv. Làm vậy để chi vậy? Để cho các ý tưởng từ nhiều ngành khác nhau nó móc nối nhau, cho ông một ý tưởng mới. Ý tưởng mới trên thế giới này không phải là một cái nhìn mới về một sự việc cũ đó sao?

Thử tưởng tượng, một bạn chừng 10-12 tuổi bắt đầu viết một commonplace cho riêng mình. Thời này thì có thể dùng phần mềm (DevonThink, Obsidian–mình đang học cái này) vv) để làm cái book này. Bạn này đọc sách gì hay thì cho vào cái book này. Thấy câu nói gì hay thì cho vào luôn. Cộng thêm những suy nghĩ cá nhân. Cứ làm như vậy đều đặn cho tới khi 40 tuổi thì dù không làm ra gì (cái này thì còn tùy số trời) cũng có một cơ sở dữ liệu rất lớn. Chắc chắn đủ viết mấy cuốn sách. 40 tuổi, xa quá! Nếu vậy thì cái book này cũng giúp cho bạn viết essay nếu muốn vào trường xịn.

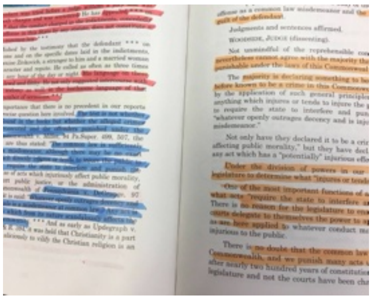
Nay xin bàn một tí về điểm số. Không thể đánh đồng chúng ta với điểm số đạt được; chúng ta tốt hơn điểm số. Điểm kém không có nghĩa là bạn là người không thông minh hay sẽ không làm được gì sau này. Mình có điểm 2 môn Lý và rớt nhiều môn lúc học ĐH đó thôi. William Zettler, giáo sư sinh học ở Đại học Florida đã nói như sau:

> *"Kinh nghiệm đã cho tôi thấy mối tương quan gần như nghịch đảo giữa điểm GRE cao và thành công cuối cùng trong sự nghiệp. Thật vậy, nhiều học sinh có điểm thấp nhất đã trở nên rất thành công, trong khi một số lượng đáng ngạc nhiên các 'thiên tài' đã bỏ cuộc vì lý do này hay lý do khác."*

Học thế nào cho hiệu quả? Trước khi có thể trả lời câu hỏi thì chúng ta phải nhất quán: thế nào là học hiệu quả? (Cái này là học từ nhà Toán học Euclid). Mình định nghĩa học hiệu quả như thế này:

> *"Học hiệu quả là học sao cho **đạt được mục đích mà vẫn còn khối thời gian để làm những thứ khác**."*

Tại sao định nghĩa này? Bởi vì học không phải là điều quan trọng duy nhất. Mục đích thì mỗi người mỗi kiểu. Có bạn muốn vào trường chuyên Lê Hồng Phong, cũng có bạn hài lòng với Hai Bà Trưng. Có bạn thì nhất nhất phải vào Bách khoa, và cũng có bạn không học đại học. Sau khi đã biết mục đích thì sẽ dễ dàng hơn để lên kế hoạch học tập (cho phù hợp với cái mục tiêu). Ví dụ nếu muốn vào trường xịn thì dĩ nhiên phải học hành chăm chỉ hơn là muốn vào trường không xịn. Quyển sách *"How to Become a Straight-A Student: The Unconventional Strategies Real College Students Use to Score High While Studying Less"* của Cal Newport[††], (Newport, 2006) là một minh chứng cho việc chúng ta có thể vừa học vừa chơi. Dĩ nhiên Newport là người Mỹ nên sách ông có thể không dùng hoàn toàn cho học sinh Việt Nam. Nhưng nó là một gợi ý.



Các bạn nên đọc những quyển như *"How to Become a Straight-A Student: The Unconventional Strategies Real College Students Use to Score High While Studying Less"* hay *A Mind For Numbers: How to Excel at Math and Science (Even if You Flunked Algebra)* để biết có những cách thức nào học hiệu quả. Vì nếu không đọc những quyển này thì làm sao bạn biết được cách highlight đầy quyển sách (xem hình bên cạnh) là không hiệu quả. Cách này ai cũng dùng mà, sao lại nói không hiệu quả? Thật ra rất dễ hiểu: nếu Phính qua nhà hàng xóm, dán lên TV của người ta tờ giấy ghi là: "cái TV này của Phính"–ghi chữ thật đẹp, màu mè hẳn hòi. Vậy cái TV có trở thành của Phính không? Do đó cách highlight này chỉ tốn tiền (mua bút và sách không còn sử dụng lại được) thôi.

Nếu được quay ngược thời gian mình sẽ học ít hơn và đọc sách, đọc thật nhiều, nhất là tự truyện của các danh nhân. Các bạn trẻ có thể học được nhiều thứ bổ ích hơn ngàn lần định lý Thales hay luật vạn vật hấp dẫn của Newton! Ví dụ như cách họ giải quyết vấn đề, cách họ suy nghĩ, ... Những cái này thì vô giá.

**Phương pháp chunking**. Các bạn còn nhớ Phương–người chỉ cho mình cách học các môn thuộc lòng không? Tới giờ, nhờ đọc sách mà mình mới biết nguyên lý của phương pháp này. Ví dụ, hãy nhìn dãy chữ cái này và sau đó đọc to chúng mà không cần nhìn:

RKFBIIRSCBSUSSR

Trừ khi bạn quá đặc biệt, còn lại đây là một nhiệm vụ thực sự khó khăn. Bây giờ hãy chia các chữ cái này thành các phần có thể quản lý được như sau[†]:

RK FBI IRS CBS USSR

Bây giờ hãy nhìn đi chỗ khác và cố gắng đọc thuộc lòng chúng. Nó sẽ được dễ dàng hơn nhiều. Chúng ta vừa lấy mười lăm bit và giảm chúng xuống còn năm. Chúng ta luôn chia nhỏ để phân tích thế giới xung quanh tốt hơn (McRaney, 2011).

**Bệnh trì hoãn**. Còn một vấn đề nữa là bệnh trì hoãn. Ví dụ, "xem xong bộ phim này rồi học, có chi mà gấp". Thấy vậy mà nó nghiêm trọng đó. Thậm chí có người nói: "Bệnh trì hoãn là một trong những vấn đề lớn nhất của thế hệ chúng ta"; thế hệ của Facebook, Twitter, Tumblr vv. Có nhiều người cứ như vậy rồi thì lên kế hoạch đủ kiểu mà không bao giờ bắt tay làm cái gì cả! Rất mất thời gian, mà thời gian thì hữu hạn. Hãy nghe Alfred Adler (1870 – 1937), một bác sĩ y khoa, nhà tâm lý trị liệu người Áo và là người sáng lập trường phái tâm lý học cá nhân, nói

[††]Calvin C. Newport là một tác giả người Mỹ viết truyện phi hư cấu và là phó giáo sư khoa học máy tính tại Đại học Georgetown.

[†]Nếu bạn sống ở Mỹ thì IRS là cơ quan về thuế. Còn CBS là một đài truyền hình thương mại của Hoa Kỳ. FBI và USSR thì mình chắc khỏi phải nói.

> *"Mối nguy hiểm chính trong cuộc sống là bạn có thể đề phòng và lưỡng lự quá nhiều."*

Hay mẹ Theresa nói "*Ngày hôm qua đã qua, ngày mai thì chưa đến. Chúng ta chỉ có ngày hôm nay*". Cái gì cần làm thì làm ngay.

Chúng ta trì hoãn những việc khiến chúng ta cảm thấy không thoải mái. Thay vì ngồi giải một bài toán, chúng ta chọn xem phim–một việc khiến chúng ta dễ chịu. Khoa học ngày nay có thể giải thích hành động này: nguyên nhân là Dopamine. Dopamine là một loại chất dẫn truyền thần kinh – một sứ giả hóa học trong cơ thể cho phép các tế bào thần kinh giao tiếp với nhau. Dopamine đóng vai trò chính trong nhiều chức năng của não, bao gồm động lực, tâm trạng, niềm vui, kiểm soát vận động và phần thưởng. Khi bạn làm điều gì đó thú vị, cơ thể bạn sẽ tiết ra dopamine, khiến bạn cảm thấy dễ chịu. Những cảm giác tích cực này thúc đẩy bạn lặp lại hành động đó (Volkow et al., 2017). Nhưng xin nhớ cho rằng, những gì khiến chúng ta cảm thấy dễ chịu tạm thời không nhất thiết sẽ tốt cho chúng ta về lâu dài.

Phương pháp Pomodoro[†] có thể giúp giải quyết vấn đề này:

- Lên núi học (không đem theo điện thoại). Nếu không có núi để lên thì tắt hết tất cả các thứ có thể làm bạn sao lãng (TV, phone,...).
- Đặt đồng hồ 20 phút.
- Học trong vòng 20 phút đó.
- Sau 20 phút, dừng lại, tự thưởng cho mình cái gì đó mà bạn thích.

Bước cuối cùng rất là quan trọng, không có nó thì chúng ta sẽ không thắng được con quỷ trong người mình đâu. Bằng cách tự thưởng cho mình một cái gì mình thích sau khi học 20 phút chúng ta 'dạy lại' bộ não của bạn rằng học 20 phút cũng là một hành động khiến chúng ta dễ chịu (như xem phim chẳng hạn). Sau khi nội công thâm hậu hơn thì có thể tăng lên 30 phút hoặc lâu hơn. Trong vòng 20 phút đó có thể bạn không giải được một bài toán nào đó. Không sao! Bạn đang thực hành phương pháp Pomodoro để chữa bệnh trì hoãn.

**Luật Parkinson**. Vào năm 1955, nhà sử học và tác giả nổi tiếng người Anh Cyril Northcote Parkinson viết một bài đăng trên tạp chí *The Economist*. Trong bài viết đó, Parkinson chỉ ra sự không hiệu quả của sự quan liêu trong dịch vụ công dân Anh, nơi ông làm việc. Ông nhận thấy rằng mọi người đều bận rộn suốt cả ngày, nhưng rất ít việc thực sự được hoàn thành. Cụ thể, Parkinson đưa ra một ví dụ tiếu lâm về một bà cụ già dành cả ngày để viết một bưu thiếp cho cháu gái của mình. Ông viết: "Một giờ sẽ được dành để tìm kiếm bưu thiếp, một giờ khác để tìm kính cận, nửa giờ để tìm kiếm địa chỉ, một giờ và một phút cho việc soạn thảo, và hai mươi phút để quyết định có hay không mang theo ô khi đi đến hòm thư ở đường phố kế bên." Nói tóm lại, bà cụ đó dành cả ngày để thực hiện một hoạt động đơn giản mà một người bận rộn có thể hoàn thành trong vài phút. Đó chính là một ví dụ về cái mà sau này chúng ta gọi là định luật Parkinson.

Định luật Parkinson là một quan sát, nó nêu rõ rằng "Công việc mở rộng để lấp đầy khoảng thời gian có sẵn để hoàn thành." Nói cách khác, con người điều chỉnh tốc độ làm việc của họ dựa trên khối lượng công việc và thời gian mà họ có để hoàn thành nó.

Đó có thể là lí do mà June Huh và Hardy chỉ làm việc từ sáng đến đầu giờ chiều thôi. Họ làm như vậy để họ làm việc hiệu quả, làm việc với cường độ cao. Công ty phần mềm 37signals (nay là Basecamp) giới thiệu chế độ làm việc mùa hè: họ làm việc 4 ngày một tuần (thay vì 5 ngày), mỗi ngày 8 giờ trong mùa hè. Họ bắt đầu thử nghiệm điều này vào năm 2007 và họ vẫn tiếp tục thực hiện sau 14 năm, vì vậy điều đó chắc chắn đã hiệu quả. Nhưng làm thế nào? Người sáng lập

[†]Pomodoro trong tiếng Ý có nghĩa là "cà chua". Francesco Cirillo, người đầu tiên phát triển hệ thống quản lý thời gian này vào những năm 1980, đã sử dụng đồng hồ bấm giờ hình quả cà chua.

công ty, Jason Fried, chia sẻ quan điểm của mình cho tờ *New York Times* "ngắn gọn, nghỉ nhiều hơn khiến bạn làm việc hiệu quả hơn". Việc này tương tự như việc nếu bạn có quá nhiều tiền, khả năng cao bạn sẽ tiêu xài hoang phí; ngược lại nếu bạn có ít tiền, bạn sẽ chi tiêu chừng mực.

Do đó, hãy học ít lại, cho mình những hạn chót (deadline) ngắn lại; làm như vậy bạn sẽ làm việc/học tập hiệu quả hơn. Và giờ bạn hiểu vì sao ta dùng kỹ thuật Pomodoro; nó chính là một cách để ngăn chận luật Parkinson.

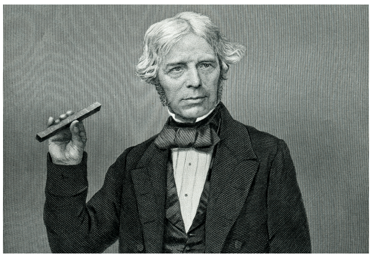
Tóm lại: *Bạn là một phần quan trọng của quá trình học tập của bạn (không kém quan trọng hơn thầy/cô). Điều quan trọng là bạn phải chịu trách nhiệm trong việc học tập của mình. Không ỷ lại vào ai cả. Hãy tìm ra mục đích của mình, lên kế hoạch học tập phù hợp với mục đích đó và phù hợp với cá nhân bạn. Thời gian còn lại, hãy khám phá mọi thứ trên đời này.*

Ngày 1 tháng 8 năm 2022

# Chương 25

# Faraday: từ cậu bé đóng sách đến nhà bác học lỗi lạc

Để minh họa cho tầm quan trọng của đọc sách, tự học và lòng đam mê, mình xin dùng câu chuyện của Miachel Faraday, từ một người ít học, nhà nghèo, một cậu bé đóng sách, một người được khuyên nên tiếp tục sự nghiệp đóng sách, đến một trong những nhà khoa học có ảnh hưởng nhất trong lịch sử. Trên các bức tường trong căn hộ ở Đức của mình vào những năm 1920 ở Berlin, và sau đó là trong ngôi nhà ở Mỹ của ông ở Princeton, Albert Einstein treo chân dung của ba nhà triết học tự nhiên người Anh: Isaac Newton, Michael Faraday và James Clerk Maxwell - và không có nhà khoa học nào khác. Nguồn: cuốn *The lightning tamers* của Kathy Joseph[†] (Joseph, 2022).



Michael Faraday không có vẻ gì là một người có khả năng thay đổi thế giới. Ông sinh năm 1791 trong một gia đình thợ rèn gần như thất nghiệp ở khu ổ chuột Surrey, ngoại ô London. Nền giáo dục thô sơ của ông đặc biệt bị cắt ngắn khi mẹ ông không cho ông đến trường chỉ sau vài tháng để ông tránh xa một giáo viên thô lỗ. Thay vào đó bà dạy ông đọc và viết nhưng ông chưa bao giờ học tiếng Latinh hay nhiều hơn các cụm từ cơ bản trong bất kỳ ngôn ngữ nào khác ngoài tiếng Anh. Ngạc nhiên thay, đối với một người có ảnh hưởng đáng kinh ngạc đến vật lý và hóa học như Faraday, ông chưa bao giờ học toán (ngoài đại số cơ bản). Ông cũng cực kỳ nghèo trong thời kỳ mà một người nghèo nghiên cứu khoa học vô cùng khó khăn. Ngoài ra, không có thư viện miễn phí nào dành cho Faraday. Ngay cả khi có, nhiều sách khoa học được viết bằng tiếng Latinh và đòi hỏi người đọc đã có một nền giáo dục chính quy. Còn các bài giảng thì thật lố bịch đắt đỏ. Ngay cả một bài giảng rẻ tiền cũng sẽ có giá 0,05 pound, và một bài giảng của một nhà khoa học nổi tiếng thường có giá hai bảng Anh và đôi khi cao tới 20 pounds. Ngoài ra, rất là khó khăn để có được tài liệu, và tầng lớp lao động thường phải làm việc bảy ngày một tuần và 10 đến 12 giờ một ngày. Cuối cùng, không ai muốn công bố công trình của một nhà khoa học nghiệp dư không đến từ tầng lớp quý tộc.

May mắn thay, Faraday đã rất may mắn. May mắn làm sao? Chà, thật khó tưởng tượng làm sao Faraday có thể thoát nghèo nếu không có *một ông chủ tốt bụng, một cuốn sách khoa học viết hay, một người bảo trợ hào phóng, một vụ nổ hóa chất xảy ra đúng lúc, và một cuộc đánh đấm.* Mọi chuyện bắt đầu vào năm 1814. Khi Faraday 13 tuổi, ông nhận công việc giao hàng cho một người bán sách địa phương tên là George Riebau. Riebau rất ấn tượng với cậu bé và đưa cậu vào chương trình học nghề bảy năm để trở thành thợ đóng sách mà không yêu cầu gia đình Faraday phải trả tiền cho dịch vụ, như thường lệ vào thời điểm đó, vì gia đình ông không đủ khả năng chi trả. Ngoài ra, Riebau còn là một ông chủ cực kỳ hào phóng đặc biệt là về thời gian và ông để Farday đọc bất kỳ cuốn sách nào ở tiệm sách của mình. Faraday thích tiểu thuyết, nhưng *sách khoa học là đam mê của ông* và ông đặc biệt thích cố gắng làm lại bất kỳ thí nghiệm nào ông

[†]Bà Kathy Joseph–một giáo viên Vật Lý người Mỹ–có kênh Youtube (tên là Kathy Loves Physics & History) rất nhiều người theo dõi.

nghe tới. Riebau sau đó thậm chí còn để chàng Faraday trẻ thiết lập một phòng thí nghiệm nhỏ ở phía sau tiệm sách.

Có ba cuốn sách mà nhiều năm sau, Faraday ghi nhận là đã giúp ông bắt đầu hành trình đến với khoa học của mình. Đầu tiên đặc biệt là cuốn *1797 Encyclopedia Britannica* với 127 trang về những phát triển "mới nhất" về điện, mà Faraday đã đóng trong năm 1810, khi ông 19 tuổi. Cuốn thứ hai là một cuốn sách tên là *Conversations on Chemistry* (Đối thoại về Hóa học), viết vào năm 1805 bởi một người phụ nữ tên là Jane Marcet. Vài năm trước, Marcet đã tham gia một buổi nói chuyện của Humphry Davy[†] nhưng lại thấy khó hiểu. Khi nào Marcet hỏi xung quanh, bà thấy rằng mình không cô đơn; hầu hết mọi người đều hoang mang, đặc biệt là các chị em chưa có kiến thức khoa học. Sau khi Marcet nhờ chồng giải thích cho mình, bà thấy các bài giảng thú vị hơn nhiều. Vì lý do đó, bà đã viết cuốn *Conversations on Chemistry* như một phần giới thiệu đơn giản về hóa học đặc biệt là đối với các chị em. Không bất ngờ, cuốn sách đã trở thành sách bán chạy nhất. Cuốn thứ ba là *Improvement of the Mind* của Isaac Watts (Watts, 2015). Quyển sách của Watts là một hướng dẫn cải thiện bản thân (ma2 tiếng Anh gọi là self-help books) một vài thế kỷ trước khi có internet. Watts đề xuất chúng ta có một quyển sổ để ghi lại các sự kiện, và Faraday đã làm như vậy. Watts đề nghị chúng ta nên tìm tòi theo hướng dẫn bởi các sự kiện quan sát được, và Faraday là như vậy. Watts khuyên nên tìm một giáo viên tuyệt vời, và Faraday bắt đầu tham gia các bài giảng (của Davy).

Vào tháng 2 năm 1810, Faraday–lúc này 19 tuổi–vay anh trai một đồng shilling và đi đến lớp học khoa học đầu tiên của mình. Đó là bài giảng của một thợ bạc và nhà khoa học nghiệp dư tên là John Tatum. Tatum đã thành lập hội các nhà khoa học của riêng mình gọi là Hội triết học thành phố. Đây là phiên bản thuộc tầng lớp lao động của Viện Hoàng gia, nơi sinh sống của các thư ký, họa sĩ, thợ làm thuê, và tất nhiên, một thợ đóng sách tập sự. Faraday đã viết một cuốn sách của riêng mình gồm những ghi chú từ những cuộc nói chuyện của Tatum, thêm những suy nghĩ và các thí nghiệm của ông. Faraday dành tặng cuốn sách cho ông chủ tốt bụng Riebau của mình. Riebau rất tự hào về thành tích của người học việc và trưng bày cuốn sách của Faraday một cách nổi bật trong hiệu sách của mình. Đầu năm 1812, Riebau đưa cuốn sách này cho một trong những người bảo trợ của ông có tên là William Dance[††]. Dance vô cùng ấn tượng với Farday và khả năng của anh và đã giúp đỡ Faraday một cách đáng kinh ngạc: Dance đã cho chàng trai trẻ vé xem tất cả các bài giảng cuối cùng của Humphry Davy trước khi Davy ngừng việc giảng dạy khoa học cho công chúng.

Như bạn có thể đoán ra, Faraday đã bị mê hoặc bởi các cuộc nói chuyện của Davy, và ông đã ghi chép rất nhiều. Ông mất khoảng 5 tháng để gom đủ tiền để tạo ra pin của riêng mình. Cũng giống như những bài nói chuyện của Tatum trước đó, Faraday lại viết ra một cuốn sách dày 300 trang gồm những bài nói chuyện của Davy xen kẽ với những thí nghiệm và quan sát của chính mình. Faraday đã viết thư cho Davy và Davy nói rằng ông rất ấn tượng với lòng nhiệt thành, sức mạnh của trí nhớ và sự chú ý của Faraday. Tuy nhiên, Davy không thích Faraday và khuyên anh nên tiếp tục đóng sách!!!

Đến tháng 10 năm 1812, Faraday hoàn thành học việc với Riebau, và vì ông không thể tìm được một công việc trong lĩnh vực khoa học, ông nhận làm thợ đóng sách cho một thợ đóng sách người Pháp khác tên là Henri de la Roche. La Roche, không như Riebau, từ chối để Faraday đọc những cuốn sách mà ông đang đóng, chứ đừng nói đến việc thiết lập bất kỳ thí nghiệm khoa học nào trong hiệu sách hoặc thậm chí có những buổi chiều thứ Tư để tham dự các cuộc họp khoa học của ông. Faraday buồn bã viết cho một người bạn rằng

> *"đối với sự tiến bộ của khoa học tôi biết nhưng ít, và bây giờ tôi có thể còn biết ít hơn nữa; thực sự, chừng nào tôi còn mắc kẹt trong tình huống hiện tại của mình (và*

[†]Humphry Davy (1778 – 1829) là một nhà hóa học và nhà phát minh người Anh, người đã phát minh ra đèn Davy và một dạng đèn hồ quang rất sớm. Ông cũng được nhớ đến vì đã lần đầu tiên cô lập được một số nguyên tố bằng cách sử dụng điện: kali, natri, canxi, stronti, bari, magie, cũng như khám phá ra bản chất nguyên tố của clo và iốt.

[††]William Dance (1755–1840) là một nghệ sĩ dương cầm và vĩ cầm người Anh.

*tôi thấy chưa có cơ hội thoát ra khỏi nó), tôi phải từ bỏ việc nghiên cứu triết học và trao lại hoàn toàn cho những người may mắn hơn, những người có thời gian và phương tiện.”*

May mắn cho Faraday, Davy bị thương ở mắt do một vụ nổ khi làm việc với chất $NCl_3$ trong phòng thí nghiệm, và Dance, cũng chính là người đã giúp đỡ Faraday vé gặp Davy, đã giới thiệu Faraday làm trợ lý với thần tượng của mình trong vài ngày cho đến khi Davy hồi phục. Khi Faraday hoàn thành việc hỗ trợ Davy, ông đã gửi một lá thư cho Davy yêu cầu một công việc lâu dài cùng với một bản sao cuốn sách ghi chép lại các bài giảng của Davy. Davy đã đáp lại bằng một lời động viên ngắn mà Faraday đã giữ cho đến khi qua đời; nhưng sau đó Davy nói thêm rằng ông không cần bất kỳ sự giúp đỡ nào vào thời điểm đó. Sau đó, vào cuối tháng 2 năm 1813, một trong những trợ lý của Davy đã đánh nhau với một nhà sản xuất nhạc cụ và bị sa thải. Đến ngày 1 tháng 3 năm 1813, Faraday được thuê làm người rửa chai cho Davy và kiếm đủ 25 shilling (1,25 bảng Anh) một tuần. *Cuối cùng, Faraday đã làm việc trong lĩnh vực khoa học. Và phần còn lại là lịch sử.*

Khi được phong tước hiệp sĩ, Faraday đã từ chối, nói rằng ông muốn tiếp tục là "ông Faraday giản dị cho đến cùng." Tương tự như vậy, ông đã hai lần từ chối danh dự Chủ tịch Hiệp hội Hoàng gia. Chính phủ Anh đã yêu cầu ông tư vấn về việc sản xuất và sử dụng vũ khí hóa học trong Chiến tranh Krym và ông đã từ chối vì lý do đạo đức. Trước khi qua đời, ông đã được đề nghị chôn cất ở Tu viện Westminster cùng với Newton, nhưng ông cũng từ chối.

Đó là câu chuyện của Miachel Faraday, từ một người ít học, nhà nghèo, một cậu bé đóng sách đến một trong những nhà khoa học có ảnh hưởng nhất trong lịch sử. Ông đã khám phá ra các nguyên lý cảm ứng điện từ, nghịch từ và các định luật điện phân. Những phát minh của ông về thiết bị quay điện từ đã hình thành nên nền tảng của công nghệ động cơ điện, và phần lớn là nhờ những nỗ lực của ông mà điện trở nên thiết thực để sử dụng trong công nghệ. Chúng ta có thể rút ra nhiều bài học từ cuộc đời của Faraday:

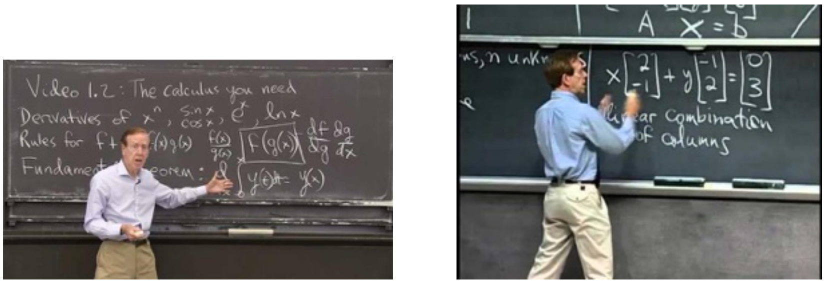
- Các bạn có thể thấy mình giống Faraday một điểm: mình thích ghi chú và làm sách riêng cho mình. Và đó là một cách học rất hiệu quả.
- Trong thời gian bảy năm làm nghề đóng sách, Faraday đọc rất nhiều, và quan trọng nhất là *Conversations on Chemistry* và *Improvement of the Mind*; quyển trước cho ông đam mê về khoa học và quyển sau cho ông phương pháp làm khoa học;
- Thời gian làm việc với Davy Faraday chắc chắn học rất nhiều, và nó còn hơn là đi học đại học! Do đó tìm cao thủ mà học hay làm việc cùng.
- Faraday nói “sự thật rất quan trọng đối với tôi và đã cứu tôi. Tôi có thể tin tưởng vào một sự thật, nhưng luôn kiểm tra chéo một khẳng định”. Do đó ông luôn làm thí nghiệm để kiểm chứng mọi thứ.
- Ai cũng có thể viết sách, không nhất thiết phải là chuyên gia. Và viết càng đơn giản dễ hiểu thì càng bán chạy. Jane Marcet là một minh chứng.

Ngày 15 tháng 4 năm 2023

# Chương 26

# Bảng đen/phấn trắng VS Powerpoint: ai hơn ai?

HÔM qua mình lại xem Gilbert Strang–Giáo sư Toán ở MIT[†]–dạy đại số tuyến tính trên youtube. Thật ra mình đã xem nhiều nhiều lần và rất thích phong cách của ông. Dù là GS ở trường đại học kỹ thuật hàng đầu thế giới, ông không dùng tí 'kỹ thuật' nào trong giảng dạy. Không powerpoint, không keynote, không slide. Chỉ có bảng đen và phấn trắng (Hình 26.1). Vâng bảng đen và rất nhiều bảng đen là đẳng khác.



(a) (b)

Hình 26.1: Gilbert Strang đang dạy giải tích và đại số tuyến tính chỉ dùng bảng đen và phấn trắng.

Rồi một hôm mình nghe bài nói chuyện của Leonard Susskind–GS Vật lý của Stanford. Ông này đi nói chuyện mà không powerpoint hay keynote gì cả. Ông nói: tôi chỉ dùng bảng đen và phấn trắng. Xin cho tôi một cái bảng đen.

Không lẽ hai nhân vật kiệt xuất như Strang và Susskind không biết dùng Powerpoint (trong khi anh Vũ Phính thì biết) ta? Dĩ nhiên không! Hay ông bận rộn quá không có thời gian làm slides? Dĩ nhiên không. Nếu hai ông muốn sẽ có người tình nguyện (mình trong số đó) làm slides cho hai ông. Vậy vì nguyên cớ gì 2 ông không dùng Powerpoint? Mình xin chia sẻ nguyên nhân mà mình mới nghe lỏm được.

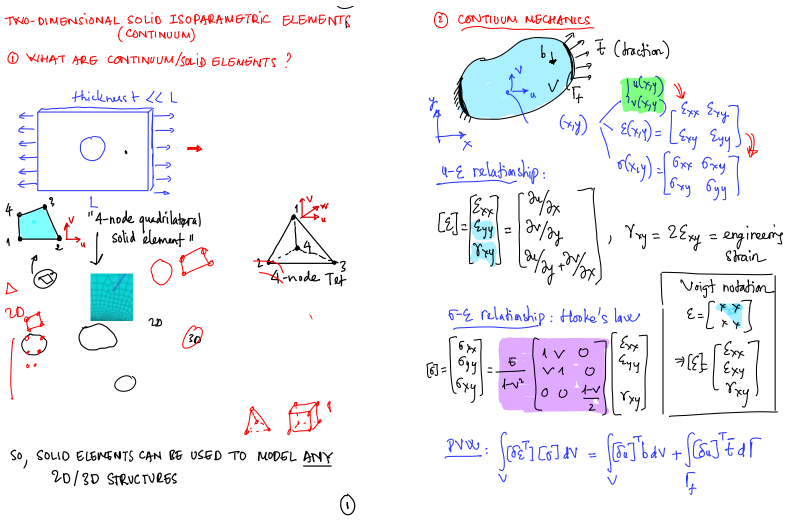
Thật ra Susskind đã có câu trả lời cho chúng ta khi ông viết: tôi thích dạy học vì đó là cơ hội tốt cho tôi nghĩ về Vật lý, cho tôi làm Vật lý. Mà suy nghĩ thì Powepoint vô dụng. Chỉ có giấy và bút thôi, nhưng mà có học trò nên phải dùng bảng đen vậy. Strang không thấy đề cập nhưng mà mình nghĩ lí do cũng tương tự: bảng đen là phương tiện tốt nhất cho Strang làm Toán lúc đang dạy Toán. Mà 2 ông này dùng Powerpoint hay bảng đen thì kệ cha hai ông, liên quan gì tới anh Phính mà anh phải kể lể? Thật ra cái chuyện nó nhỏ xíu này mà nó vô cùng quan trọng đó các bạn. Có vậy Phính này mới chém gió chứ. Không mình xem Glory cho rồi.

[†]Viện Công nghệ Massachusetts (MIT) là một trường đại học nghiên cứu cấp đất tư nhân ở Cambridge, Massachusetts. Được thành lập vào năm 1861, MIT đã đóng một vai trò quan trọng trong sự phát triển của nhiều lĩnh vực khoa học và công nghệ hiện đại.

Nếu người dạy dùng Powerpoint thì bài giảng nó trơn tru, không có sai sót, từ A tới Z. (Các bạn còn nhớ June Huh và GS Hironaka chứ?) Và đó chính là SAI LẦM. Lầm to! Chúng ta học nhiều từ những thất bại hơn là từ thành công, đó là điều gần như là chân lý. Người dạy dùng Powerpoint thì học trò lấy đâu ra cái cơ hội học từ sai lầm? Mình cứ xem lui xem tới cảnh Gilbert Strang cầm cục phấn viết xong lại xóa, xóa xong lại viết, tần ngần một hồi rồi hỏi: "thầy làm đúng hay sai? " Nhiều lần đám sinh viên nói: "Sai rồi."

Mình thích như vậy vô cùng. Tại sao? Vì 2 điều. Thứ nhất, bởi vì nó cho mình sự tự tin. Đường đường là Strang MIT mà còn làm Toán sai thì mình sai là chuyện không có gì buồn cả. Thứ hai, nó cho mình thấy cách Strang suy nghĩ, cách ông phát hiện sai ở đâu ... Và mình học là học cái đó. Còn cái kiến thức đại số tuyến tính thì mua quyển sách 50k là có ngay!

Giờ mình dạy thì dùng slides (soạn bằng `Keynote`) cho những môn ‘lý thuyết’ và chán ngắt. Còn những môn thú vị, nhiều Toán thì mình dùng iPad soạn bài giảng (ví như Hình 26.2 cho môn phần tử hữu hạn), in ra, rồi đem theo lên lớp. Trên lớp mình không dùng bảng đen, mà dùng iPad rồi viết trên nó như Strang làm. Cái note in ra là để phòng khi mình quên, nhìn vào nó. Ở nơi mình làm việc, giảng viên ‘bị’ sinh viên đánh giá cuối môn học, và đánh giá này dùng cho việc lên chức, phong ấn vv nên ít người dám cho phép sai sót trong khi dạy! Như vậy, mình vẫn không làm hoàn toàn như Strang được.




(a) (b)

Hình 26.2: Bài giảng viết ta môn Phần Tử Hữu Hạn.

Nhắc tới MIT, bảng đen và phấn trắng mà không nhắc tới Walter Lewin thì quả là một thiếu sót. Bạn nào thích Vật lý thì phải xem ông GS này dạy Lý, để biết là trên thế giới lại có người yêu nó nhiều đến như vậy. Link: https://www.youtube.com/watch?v=k6aJyOHTDYM...

Ngày 24 tháng 3 năm 2023

# Chương 27

# Cách học tốt nhất: viết

THỈNH thoảng lúc đọc sách mình thấy một vài tác giải viết: "viết sách là cách tốt nhất để học về một đề tài nào đó". Frank Oppenheimer (1912 – 1985) nhà vật lý người Mỹ, cũng từng nói: "dạy là cách tốt nhất để học một cái gì đó". Và quan điểm này được nhiều nhà bác học chia sẻ.

Nhưng mà các bạn trẻ thì lấy đâu ra cái cơ hội để dạy? Thật ra có nhiều cơ hội lắm.

- Các bạn có thể dạy cho người mình thích nè. Cái này chính từ kinh nghiệm cua gái thời trai trẻ của mình.
- Các bạn có thể viết blog về đề tài mình đang muốn học.
- Các bạn có thể viết note (hay sách cho chính bạn). [Nếu là đề tài kỹ thuật thì nên dùng LaTeX để viết]

Nhưng không phải là copy và viết lại những gì các bạn đã học từ thầy/cô hay sách. Làm như vậy bạn chẳng học được gì, và cái note bạn viết chỉ là một sự lãng phí thời gian của bạn và của người đọc.

Vậy phải viết như thế nào?

- Trước tiên bạn phải trung thực với chính bản thân. Những nhà thông thái hàng đầu thế giới thường trả lời các câu hỏi bằng câu "Tôi không biết. Nhưng tôi nghĩ..." Richard Feymann[†] trong cuốn sách nổi tiếng "Các bài giảng Vật Lý của Feymann" cũng thường xuyên viết "tôi không biết". Nhưng tại sao phải trung thực khi viết? Giả sử bạn không biết [rõ] về đề tài A. Do đó lúc viết về nó bạn sẽ lòng vòng tam quốc. Viết xong, dĩ nhiên, bạn cũng không hiểu, và dĩ nhiên người đọc cũng không hiểu. Câu chuyện chưa kết thúc ở đó. Người đọc, vì tin tưởng bạn (bạn là tác giả mà, bạn đã viết sách mà), nên lúc đọc gì không hiểu, họ đổ lỗi cho bản thân, kiểu như "mình ngu, hay mình không đủ trình để học cái này". Mà khi cái suy nghĩ tiêu cực này đã nảy sinh thì bạn sẽ đóng sập cánh cửa và không chấp nhận đề tài A một lần nào nữa, [Không ai muốn cái cảm giác mình ngu cả!]. Dưới đây mình sẽ trình bày kinh nghiệm đau thương của chính mình.
- Liên quan đến vấn đề trung thực là xin các tác giả đừng nổ. Ví dụ rằng để hiểu đề tài A không cần biết lý thuyết B hay C, mà tác giả vẫn viết về B và C. Tại sao? Nổ thôi: cho mọi người thấy ta là uyên bác. Tác hại của nổ thì vô cùng. Xin làm ơn, các tác giả, đừng nổ. Cái này thì rất phổ biến và dưới đây mình sẽ trích dẫn hẳn một câu than vãn của một nhà bác học "không biết nổ". Châm ngôn cho tác giả nên là: Cần chi viết nấy, biết chi viết nấy, không biết nói không biết.

[†]Richard Feynman (1918 – 1988) là một nhà vật lý lý thuyết người Mỹ, được biết đến với công trình về công thức tích phân đường của cơ học lượng tử, lý thuyết về điện động lực học lượng tử. Vì những đóng góp của ông cho sự phát triển của điện động lực học lượng tử, Feynman đã nhận được giải Nobel Vật lý năm 1965 cùng với Julian Schwinger và Shin'ichirō Tomonaga.

- Mục đích chính của một quyển sách là tác giả trình bày làm sao cho người đọc làm/hiểu được những gì bàn trong sách. Mục đích của một quyển sách không phải là để cho tác giả chứng tỏ: "tôi làm được những gì trong sách", còn anh đọc không hiểu tôi không quan tâm!

- Bạn phải xem đối tượng đọc sách (blog/note) của mình chỉ là một cô/cậu khoảng lớp 8, ngây thơ chưa biết gì về đời. Và từ xuất phát điểm đó dẫn họ vào đời (bằng sách/blog/note của bạn). Nếu khi đọc xong sách của bạn, họ vào đời, hay chí ít biết thế nào là đời thì bạn có thể coi như thành công.

- Bạn nên dùng văn phong nhẹ nhàng, hài hước được thì càng tốt. Nếu được thì nên dùng một câu chuyện để bắt đầu một đề tài gì. Không gì bằng câu chuyện cả. (Phần lớn chúng ta thích phim/truyện).

- Bạn không nên bắt đầu với chi tiết kỹ thuật. Thay vào đó, nên bắt đầu bằng cái gì dễ hiểu, rồi cho người đọc thấy "big picture" hay bức tranh tổng thể là gì.

- Viết về đề tài khoa học kỹ thuật không nên dùng ngôn ngữ của Shakespeare[†]. Bạn không phải là nhà văn! Giữ các câu ngắn gọn, được xây dựng đơn giản và trực tiếp. Câu ngắn gọn, rõ ràng có tác dụng tốt cho việc giải thích khoa học. Giảm thiểu mệnh đề, câu ghép và các từ chuyển tiếp - chẳng hạn như 'tuy nhiên' hoặc 'do đó' - để người đọc có thể tập trung vào thông điệp chính.

- Mỗi đoạn văn chỉ truyền tải một ý tưởng hoặc thông điệp duy nhất. Đừng ngại viết những đoạn văn ngắn, thậm chí chỉ hai câu. Sử dụng các câu đơn giản được liên kết với nhau để bài viết của bạn được mạch lạc.

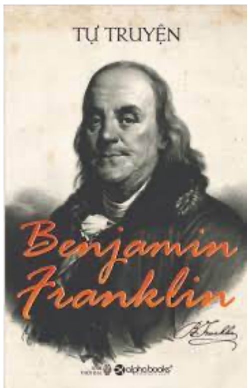
Cornelius Lanczos (1893-1974), nhà Toán học và Vật lý học người Mỹ gốc Hungary, đã viết trong quyển sách nổi tiếng của ông "The Variational Principles of Mechanics" (Những nguyên lý biến phân trong cơ học) những lời sau (chú thích của mình):

> *Nhiều sách khoa học ngày nay được viết bằng một ngôn ngữ nửa huyền thoại, như thể để gây ấn tượng với người đọc bằng cảm giác khó chịu rằng anh ta đang ở trong sự hiện diện thường trực của một siêu nhân [ám chỉ tác giả]. Cuốn sách hiện tại [sách của Lanczos] được hình thành trên tinh thần khiêm tốn và được viết cho những người khiêm tốn.*

Làm sao để viết được như trên? Rất dễ: bắt chước người khác. Theo mình thì các bạn nên xem quyển "Các bài giảng Vật Lý của Feymann", tập một[††], chọn vài chương mà bạn quen thuộc về nội dung. Sau đó xem Feymann trình bày chúng như thế nào. Ông dùng câu ra sao? Ông lý luận như thế nào? Rồi học theo! Hoặc bạn có thể đọc cuốn "*Nonlinear dynamics and Chaos*" của nhà Toán học người Mỹ Steven Strogatz (sinh năm 1959) (Strogatz, 1994). Ông này viết rất hay dù là một nhà Toán học.

[†]William Shakespeare (1564–1616) là một nhà viết kịch, nhà thơ và diễn viên người Anh. Ông được coi là nhà văn viết bằng tiếng Anh vĩ đại nhất và là nhà soạn kịch lỗi lạc của thế giới.

[††]Link sách: `https://www.feynmanlectures.caltech.edu`.




"Tự truyện của Benjamin Franklin" là một quyển sách nổi tiếng. Vậy Franklin sinh ra bẩm sinh là người viết hay? Không phải vậy. Đây là cách ông học làm thế nào viết hay (ghi chú của mình):

> *“Tôi lấy một số bài báo, và viết những gợi ý ngắn gọn về ý chính trong mỗi câu, đặt chúng trong vài ngày [để quên đi bài gốc], và sau đó, không cần nhìn vào cuốn sách, cố gắng hoàn thành bài viết một lần nữa, bằng cách triển khai các ý chính này đầy đủ như nó đã được diễn đạt trước đây, bằng bất kỳ từ ngữ phù hợp nào. Sau đó, tôi so sánh bản viết của mình với bản gốc, phát hiện ra một số lỗi của mình và sửa chúng."*

Nay xin quay lại chủ đề tác giả nổ hay Thầy/Cô nổ. Hồi xưa mình đi học môn A. Giảng viên hỏi “rứa mấy chú có biết lý thuyết nhóm hay topology không?”. Dĩ nhiên là không ai biết! Rồi giảng viên cười nhếch mép mà giờ mình vẫn còn nhớ. Mình không biết lý do tại sao người này làm vậy, nhưng mà mình học môn này không được, và tới giờ vẫn không dám đụng vào nó. Vì sao? Vì mình không biết lý thuyết nhóm (group theory) và topology thì càng không. Điều đáng buồn là trong suốt cả học kỳ, mình chẳng thấy lý thuyết nhóm hay topology mô cả!

Ngày 25 tháng 9 năm 2022

# Chương 28

# Viết bài báo khoa học

CHƯƠNG này là một sự tiếp nối của chương trước. Ở đây mình trình bày hai tài liệu mình viết về chủ để làm sao viết một bài báo khoa học chất lượng. Từ chất lượng ở đây có nghĩa là bài báo dễ đọc, và truyền tải được nghiên cứu trình bày trong bài báo tới người đọc. Tuy đối tượng chính của hai tài liệu này là sinh viên cao học và nghiên cứu sinh, mình nghĩ các tài liệu này cũng có thể hữu ích cho học sinh cấp 2/3 và sinh viên đại học–những người có nhu cầu viết rõ ràng và khoa học.

Tài liệu thứ nhất là slides bài giảng 'how to write well' cho các nghiên cứu sinh, link ở đây: https://www.researchgate.net/publication/342800015_How_to_write_a_high-quality_paper?fbclid=IwAR36IljmetEP9DLx_XBvNsF-I7_itGTTY-XjTL2BhK7pBjxXi3FQt07osJI. Tài liệu thứ hai là một bài báo có nội dung tương tự slides ở trên, nhưng ở format bài báo; và trong đó bàn kỹ hơn về các công cụ dùng trong viết lách (Nguyen et al., 2021). Mình úp bài này trên trang ResearchGate (link trong trích dẫn trên). Trong link này mình đã upload NĂM (vâng là FIVE ạ) phiên bản của bài báo này, mục đích là minh họa cho việc viết 1 bài báo là một vòng lặp 'gần như vô tận'; mỗi lần xem lại đều có thể làm nó tốt hơn. Vòng lặp đầu là ý chính, vòng tiếp theo thêm tí thịt, tiếp theo thêm tí mỡ, tiếp theo bôi son trót phấn cho đẹp. Cuối cùng, sau một hồi lặp mà bạn thấy chán, thì *submit* nó lên một tạp chí để qua chơi với bài khác.

Nếu để ý thì các bạn sẽ thấy trong mấy phiên bản sau (viết vào năm 2022/2023) thì bài báo này viết theo những gợi ý trình bày trong slides trên một cách nghiêm túc hơn so với các phiên bản trước (lí do là lúc đó mình võ công chưa đủ hỏa hầu–nói lý thuyết thì được chứ thực hành thì chưa). Do đó bản thân bài báo (Nguyen et al., 2021)–với nội dung dễ hiểu–chính là một ví dụ để học cách viết rõ ràng. Cho những bạn muốn học LaTeX, mình để nguồn LaTeX của bản mới nhất trên github: https://github.com/vinhphunguyen/how-to-write-a-paper. Chỉ việc đối chiếu file pdf và nguồn LaTeX bạn sẽ biết dùng LaTeX ngay.

Vì pdf không thể xem video trong slides, mình xin phép giải thích ở đây một slide như vậy: slide về giải Oscar năm 2010. Nếu bạn có thể viết phần introduction của bài báo như cách Oprah Winfrey giới thiệu diễn viên Gabourey Sidibe cho đề cử vai diễn nữ chính xuất sắc nhất giải Oscar lần 82 năm 2010 thì chắc chắn đó là viết hay. Oprah nói như sau (chỉ đoạn đầu), nguyên văn[†]:

> *'Gabourey Sidibe, she was a student trying to earn some money to go to college. On Monday, she skipped school to audition for a movie called Precious. On Tuesday they called her back to meet the Director Lee Daniels. On Wednesday she got the part. And tonight she is sitting in the Academy Award in the same category as Meryl Streep. '*

Phần còn lại bà Oprah tô son trét phấn thôi; tức là giải thích làm sao Sidibe diễn xuất sắc thế nào trong phim Precious. Đối với mình đó là một lời giới thiệu tuyệt vời, ngôn từ đơn giản, và một sự so sánh với tượng đài Meryl Streep là quá đủ. (Nếu bạn chưa biết vì răng Streep là 1 tượng đại

[†]Nguồn: 1.https://www.youtube.com/watch?v=-hTTwSQPmMo.

thì đây là câu trả lời: bà là diễn viên có nhiều đề cử Oscar nhất–chừng 20 lần, chỉ có khoảng thời gian 1992-1995 là bà không có đề cử. Tại vì răng? Vì lúc đó bà ở trong tù. Đây chỉ là joke của Jimmy Kimmel[†].)

Vì vậy, người viết tài liệu khoa học, cũng nên bắt chước Oprah, dùng simple, direct language. Đừng cố tỏ ra ta đây TOELF 10.0 thì phải dùng complex compound sentences mà đọc rất là mệt mỏi mới hiểu muốn nói gì.

Muốn biết bơi thì phải nhảy xuống nước và uống ít nước (dù thối). Tương tự như vậy, muốn viết tốt thì phải viết một số bài dở. Bí mật của người viết hay (không phải Phính, Phính thì viết ok thôi):

*NOT A SINGLE DAY WITHOUT A LINE*

Tức là không cần nhiều, mỗi ngày viết vài dòng là được rồi. Nếu cần một bằng chứng thì có thể nghĩ tới Alice Ann Munro (sinh ngày 10 tháng 7 năm 1931). Munro là một nhà văn truyện ngắn người Canada đã đoạt giải Nobel về Văn học năm 2013. Bà đã nói: "Tôi không thể nhớ có lúc nào mà tôi không đang viết truyện cả". Như vậy, nếu bạn viết mỗi ngày nửa trang thì sau một năm bạn đã có gần 200 trang! Có thể không phải trang nào cũng là tuyệt bút nhưng chắc chắn sẽ có những điều hay ho.

Mỗi lần có dịp về Sài gòn mình đều gặp Tri và làm một seminar về một cái gì đó ở trường mà Tri đang làm việc. Mục đích không có gì to tát ngoài chia sẻ với các bạn trẻ những gì mình biết. Năm 2023, sau 3 năm không về VN vì đại dịch cúm Vũ Hán, mình về SG và lần này Tri giúp mình tổ chức một seminar về cách viết báo khoa học ở bộ môn Chế tạo máy thuộc khoa Cơ khí trường Sư Phạm Kỹ Thuật. Có khoảng 20 người tham dự (Hình 28.1). Sau seminar là đi ăn cơm trưa với mọi người, ăn cơm niêu gì đó, rất vui.

Hình 28.1: Seminar ở bộ môn Chế tạo máy thuộc khoa Cơ khí trường Sư Phạm Kỹ Thuật năm 2023.

Ngày 4 tháng 7 năm 2023

[†]James Christian Kimmel (sinh ngày 13 tháng 11 năm 1967) là một người dẫn chương trình truyền hình, diễn viên hài, nhà văn và nhà sản xuất người Mỹ.

# Chương 29

# Nhìn có vẻ ngu thì tốt hơn là ngu thật

CÁC nghiên cứu đã chỉ ra rằng trẻ em ở tuổi lên bốn thường hỏi từ 100 đến 300 câu hỏi mỗi ngày, và thú vị thay các bé gái sẽ hỏi nhiều hơn các bé trai cùng tuổi. Mình không có con gái nên không thể tự kiểm chứng kết luận này, nhưng mà nhân vật Lucy Diamond Dawson trong bộ phim rất hay *I am Sam* do Sean Penn và Michel Pfeifer đóng là một minh chứng. Trong phim, chúng ta thấy cô bé Lucy hỏi bố mình–là Sam–rất nhiều: "Tại sao tuyết tạo thành hình hoa tuyết?", "Bố ơi, mù tạc được làm từ cái gì vậy?", "Bố ơi, tại sao đàn ông hói?", "Bố ơi, bầu trời kết thúc ở đâu vậy?". (Có nhiều trường hợp con cái hỏi nhiều đến nổi mà người bố phải quát lên: câm ngay và ăn hết tô bún bò đi.)

Tuy nhiên, điều này bắt đầu thay đổi vào khoảng năm năm hoặc sáu tuổi. Việc đặt câu hỏi (ít nhất là những câu hỏi mà các em học sinh nhỏ tuổi nói ra trong trường học) có xu hướng giảm dần theo từng năm. Thói quen đặt câu hỏi hàng ngày có khi gần trăm câu hỏi mỗi ngày của trẻ em bốn tuổi dần giảm xuống chỉ còn vài câu hỏi - hoặc không còn câu hỏi nào - khi trở thành thiếu niên.

Tại sao như vậy? Có nhiều nguyên nhân mà nguyên nhân chủ yếu là *sợ bị coi là ngốc*. Im lặng cho ra vẻ 'thông thái', hay ít nhất là cho lành. Một nguyên nhân nữa, mà có nguồn gốc từ nhà trường: trường học là nơi chú trọng việc thi cử mà câu trả lời được đánh giá quá cao. Kiểm tra: Diện tích là gì? và học sinh chỉ việc trả lời. Lúc lớn lên, với lượng kiến thức dồi dào hơn, và thời gian cũng ít hơn, chúng ta không còn đặt câu hỏi nữa. Kiến trúc sư lừng danh người Mỹ Frank Lloyd Wright (1867 – 1959) đúc kết tình huống này như sau:

> *"một chuyên gia là người đã ngừng suy nghĩ vì ông ta đã biết."*

Mình là người nhút nhác nên trong lớp từ cấp một đến đại học mình không bao giờ hỏi thầy/cô, dù không hiểu. Mình là tuýp người về nhà tự mò mẫm chứ nhất định không hỏi. Cái thói quen này theo mình cho đến tận ngày nay. Và mình nghĩ nó chẳng hay ho tí nào. Có lẽ nó liên quan tới tính sáng tạo nên mình chia sẻ một vài điều tìm hiểu được.

Trước hết, chúng ta hãy nghe các danh nhân nói gì về vấn đề này. Nguồn: https://www.youtube.com/watch?v=tYnGiWlwcj4

- "Hãy phán xét một con người qua câu hỏi chứ không phải qua câu trả lời." — Voltaire
- "Nhìn có vẻ ngu thì tốt hơn là ngu thật. Không rõ ai nói.
- "Điều quan trọng nhất là không ngừng đặt câu hỏi [hay học]." – Albert Einstein
- "Những ai muốn thành công phải đặt ra câu hỏi đúng." —Aristotle
- "Hàng triệu người đã thấy quả táo rơi nhưng chỉ có Newton hỏi tại sao." – Bernard Baruch
- Khi được hỏi ý nghĩa của đời người Elon Musk nói "rõ ràng là thế giới này là câu trả lời, chúng ta chỉ cần tìm ra câu hỏi đúng"

- "Người ra câu hỏi thì trông ngốc nghếch trong vòng một phút, người không hỏi thì là kẻ ngốc cả cuộc đời."–Khổng Tử

- "Máy tính là vô dụng; chúng chỉ cho ra câu trả lời."–Pablo Picasso

Các bạn trẻ cứ thế này: Với người lớn hơn thì "Thưa thầy/cô/anh/chị, em không hiểu chổ này ạ. Xin giải thích giúp em". Với người cùng trang lứa, thì "Mày chỉ cho tau cái này, tau không hiểu". Hay, với người nhỏ hơn "Em chỉ cho anh cái này, anh không hiểu".

Chắc chắn sẽ học nhiều và nhanh hơn mình cứ im im làm ra vẻ "không ngu". Hiện tại ai biết cái gì mình chưa biết là mình học, dù người đó là một cậu bé.

Có ý muốn hỏi là tốt, nhưng các bạn còn cần suy nghĩ là nên hỏi như thế nào nữa. Với thầy/cô thì dù bạn hỏi gì hay hỏi như thế nào, họ sẽ trả lời bạn, nhưng với người lạ thì nếu hỏi không đúng cách, chắc chắn bạn sẽ không nhận được câu trả lời. Mình nhớ có một câu chuyện như sau ở trường HBT mình học lúc cấp ba. Ở trường này có hai thầy cùng tên A, một thầy cao và một thầy lùn. Hôm nọ, có một bạn học sinh đến gặp thầy A lùn và hỏi như sau: “thầy cho em hỏi thầy A cao đang ở đâu ạ?” Mình không biết thầy A lùn trả lời sao nhưng mà cứ hỏi thế này, có ngày thi lại môn do thầy dạy ☺.

Chúng ta có thể bắt chước bố già Vito Corleone trong tác phẩm huyền thoại *Bố già* của nhà văn người Mỹ Mario Puzo; Corleone thường nói “Tôi sẽ đưa ra một đề nghị mà anh ấy không thể từ chối.” Nếu các bạn hỏi một người yêu Toán một câu hỏi về Toán thì xác xuất cao là anh ta sẽ trả lời. Ngoài ra, câu hỏi phải rõ ràng, đừng làm mất thời gian người bị hỏi phải đoán bạn muốn hỏi gì.

Đó là hỏi để học, còn nếu các bạn quan tâm đặt câu hỏi quan trọng thế nào trong sáng tạo thì xin mời đọc tiếp câu chuyện của Henry Dunant và sự thành lập của Hội Chữ Thập Đỏ.

Vào năm 1859, một thanh niên Thụy Sĩ theo đạo Calvin tên là Henry Dunant đang du lịch ở Ý thì tình cờ gặp phải hậu quả sau một trận chiến đẫm máu giữa quân đội Áo và Pháp. Trên chiến trường, khoảng bốn mươi nghìn người đàn ông nằm chết hoặc bị thương, và Dunant đã tổ chức ngay các người dân địa phương để trị liệu và chăm sóc những người bị thương. Trở về nhà, Dunant viết trong cuốn *A Memory of Solferino*: *"Liệu có cách nào, trong một thời kỳ hòa bình và yên tĩnh, để thành lập các tổ chức cứu trợ với mục tiêu chăm sóc cho những người bị thương trong thời chiến bằng tình nguyện viên nhiệt tâm, đầy đủ năng lực cho nhiệm vụ này?*". Việc xuất bản cuốn sách này đã dẫn đến việc thành lập Ủy ban Quốc tế của Hội Chữ thập đỏ (Berger, 2014).

Đối diện với một thách thức hoặc vấn đề, một người có thể đáp lại với câu hỏi ’Ôi, trời ơi, chúng ta sẽ làm gì đây?’ Nhưng đối diện với tình huống tương tự, một người có thể hỏi, ’Nếu thay đổi này đại diện cho một cơ hội cho chúng ta thì sao? Làm thế nào chúng ta có thể tận dụng tốt nhất tình huống này?‘ Câu chuyện sau đây của Van Phillips là một ví dụ.

Van Phillips (sinh năm 1954) lớn lên ở Lake Forest, bang Illinois và là một sinh viên năm thứ ba trong chương trình truyền thông tại Đại học Arizona State (ASU) vào năm 1976, khi một tai nạn lướt sóng nước đã thay đổi cuộc sống của anh. Một chiếc thuyền máy đã đâm vào anh, cắt mất chân trái của anh ở trên mắt cá chân. Anh phải đối mặt với việc phải mang chân giả để có thể tự di chuyển mà không cần nạng, nhưng chân giả có sẵn vào thời điểm đó cứng, vụng về và không thoải mái, làm anh cảm thấy bực bội. Một số người khuyên anh nên chấp nhận điều đã xảy ra, học cách sống với nó và tiến lên phía trước, nhưng anh quyết tâm tìm cách chạy lại. Anh hỏi: *“tại sao chúng ta có thể đưa con người lên tận mặt trăng mà lại không làm được một cái chân giả cho ra hồn???”*

Một năm sau đó, Phillips quyết định tập trung vào việc xây dựng một loại chân nhân tạo mới. Anh rời ASU và tham gia chương trình Kỹ thuật Y sinh của Đại học Northwestern. Tại đó, anh bắt đầu hình dung ra một chiếc chân giả mà người dùng có thể nhảy và phục hồi; nó sẽ cần có sức mạnh, sự bền bỉ và tính linh hoạt, cũng như độ chắc chắn và không thể gãy. Sau khi hoàn thành bằng cử nhân vào năm 1981, Phillips làm kỹ sư phát triển cho Trung tâm Thiết kế Y sinh của Đại học Utah (Salt Lake City). Tại đó, anh làm việc trên các phần ghép, lót và phụ kiện của các chân giả, trong khi tiếp tục nghiên cứu vật liệu và thiết kế phù hợp với ý tưởng đang hình thành trong đầu anh. Được truyền cảm hứng từ hình dạng C của chân sau của con linh dương, Phillips đã phát triển một thiết kế ban đầu và bắt đầu xây dựng một nguyên mẫu. Ngay khi Phillips hoàn thành thiết kế của mình, anh nghỉ việc để làm việc toàn thời gian cho dự án, thành lập Flex-Foot, Inc. vào năm 1984 cùng với Abildskov và hai đối tác khác. Sản phẩm của anh được kiểm tra ngay sau đó bởi các vận động viên tại các trận Paralympic; sự phổ biến của nó tăng nhanh chóng. Phát minh của Phillips hoặc một biến thể của thiết kế ban đầu Flex-Foot hiện được sử dụng bởi khoảng 90% vận động viên Paralympic, và nhiều người khác giờ đây có thể tận hưởng cuộc sống hoạt động hơn nhờ phát minh của anh.

Ngày 11 tháng 2 năm 2023

# Chương 30

# Lời than thở của nhà Toán học

PAUL Lockhart là một nhà Toán học người Mỹ, làm việc cho đại học Brown (một trường hàng đầu thế giới). Thế nhưng vì một lí do nào không rõ Paul quyết định bỏ việc và chuyển sang làm giáo viên dạy Toán ở trường trung học Saint Ann's School ở quận Brooklyn, thành phố New York (Mỹ). Ôi, các bạn học sinh ở trường này quá may mắn!

Phát ngán với việc dạy Toán ở Mỹ, vào năm 2002, Paul viết một tài liệu dài 25 trang có tựa đề "*Lời than thở của một nhà Toán học*" (A Mathematician's Lament). Để công bố tài liệu này cho một lượng lớn độc giả, Paul đã làm một cách rất hay. Trong một buổi nói chuyện vào cuối năm 2007 của Keith Devlin, nhà Toán học nổi tiếng người Mỹ gốc Anh (là giáo sư ở ĐH Stanford–một trường khủng nữa), Paul đã trao tài liệu này cho Devlin, và nói rằng "ông có thể thích nó". Quả thật Devlin thích tài liệu này của Paul. Và ông làm một việc rất hay: để cho nhiều người biết đến tài liệu quý giá này, ông đăng toàn bộ tài liệu lên trang web của Hiệp hội Toán học Mỹ[†] (Dĩ nhiên là có xin phép Paul và dĩ nhiên là Paul rất dzui dẻ chấp thuận).

Để biết Paul viết hay thế nào thì chỉ cần đọc những dòng Devlin viết

> *"Ước gì Paul là giáo viên dạy Toán của tôi khi tôi còn là học sinh."*

Đó là câu cuối của lời tựa mà Devlin viết cho quyển sách cùng tên Paul xuất bản sau này. Đây chính là quyển sách mà khiến mình có động lực để học lại Toán từ con số không ở tuổi ... 36 và học mãi cho đến bây giờ.


Một cách vắn tắt, quyển sách gồm hai phần. Phần một chỉ trích cách dạy toán chán ngắt điển hình ở các trường học Hoa Kỳ và lập luận về một phương pháp giảng dạy thẩm mỹ, trực quan và định hướng vấn đề. Phần thứ hai đưa ra những ví dụ cụ thể về cách dạy toán học như một nghệ thuật. Cũng trong lời tựa của quyển sách đó, Devlin viết "đây là quyển sách bắt buộc đọc cho những người làm nghề dạy Toán, cho các bậc phụ huynh có con ở tuổi đi học, và nhân viên nhà trường hay chính phủ có trách nhiệm đến việc dạy Toán".

Dạo này mình ghiền facebook nên hay sử dụng Google translate (để dịch vài câu chuyện về mấy cao thủ Toán học mình thích) và thấy nó làm rất tốt việc dịch thuật. Thế là mình nghĩ ra ý định sẽ dịch quyển sách của Paul (cùng với Google translate). May mà, mình không làm chuyện đó. Vì đã có một bạn trẻ làm việc đó rồi. Mà bạn này không dính dáng gì đến Toán cả. Bạn này là sinh viên ngoại ngữ.

Xin trân trọng giới thiệu với mọi người, bản dịch của Nguyễn Tiến Đạt: *Lời than thở của nhà Toán học*, link tải sách https://www.dropbox.com/s/kwem35zlb182mks/%5Bsutucon%5D%20Loi%20than%20van%20cua%20mot%20nha%20toan%20hoc.pdf. Mình không đọc bản dịch này (vì mình đã đọc quyển gốc 2 lần) nên mình không bình luận về nó. Nhưng hình như đây là bản dịch duy nhất. Không hiểu sao bạn này không in ra sách.

[†]Link: https://www.maa.org/external_archive/devlin/LockhartsLament.pdf.

Dĩ nhiên không thể nào để nhà trường thực hiện được những gì Paul trình bày trong sách. Dù đó là trường ở Mỹ hay bất cứ nơi nào trên thế giới, chừng nào lớp học vẫn như hiện nay: một cô/thầy chăm cho 30 em, và mục đích của cái gọi là giáo dục chỉ là để xếp thứ hạng các học sinh dựa vào các bài kiểm tra nhàm chán. Mà đã xếp hạng học sinh thì tại sao phải mặc đồng phục? Há không phải mâu thuẫn lắm ư? Rõ ràng Paul ý thức được điều này, bởi vậy Paul mới dùng chữ "than thở", để thể hiện sự bất lực của mình trong việc thay đổi việc dạy Toán. Quá hay. Ngoài ra Paul còn là một nhà văn quá xuất sắc.

Vậy thì đọc quyển sách này để làm gì?

Chúng ta đọc nó để hiểu Toán thật sự là gì, và nếu bạn trẻ nào bị cho là học dốt Toán thì rất có thể là: người dạy quá chán (đừng quên câu chuyện của nhà Toán học Hàn Quốc June Huh). Không phải là Toán không dành cho bạn, như bạn (và cả thầy cô bạn) nghĩ. Quyển sách của Paul cho các bạn "dốt Toán" một cơ hội để làm lại. Nó đã cho mình một cơ hội, dù là hơi muộn.

Paul ơi, răng ông không sanh sớm hơn dăm vài chục năm? Cái này hỏi ông không trả lời được.

Theo Paul thì Toán học là một nghệ thuật, và vì vậy nếu giới thiệu Toán đúng (ông trình bày làm thế nào trong sách) thì các bạn trẻ sẽ yêu thích môn này như yêu thích âm nhạc hay hội họa. Mà khi đã yêu thích rồi thì có cấm cũng không được. Câu chuyện của Sophie Germain hay của Blaise Pascal là minh chứng. Mà thật ra cần gì những ví dụ này. Cứ lấy chuyện yêu đương là thấy ngay. Có ai cấm được Hoàng Dung yêu Quách Tỉnh dù đó là Đông Tà Hoàng Dược Sư?

Để minh họa cho ý trên, Paul–không dùng câu chuyện của Germain, mà chỉ cần trích dẫn câu nói rất hay của nhà thơ Pháp, Antoine de Saint-Exupéry: (đây là cách viết rất hay)

> *"Nếu bạn muốn đóng một con tàu, đừng kêu gọi mọi người thu thập gỗ và đừng giao cho họ nhiệm vụ và công việc, mà hãy dạy họ về sự bao la vô tận của biển cả".*

Ý của Paul là dạy Toán cũng nên như vậy. Nếu giáo viên có thể cho học trò thấy sự bao la vô bờ bến, và vẻ đẹp của Toán học, các trò sẽ tự làm Toán (làm bài tập, tìm sách đọc,...), không cần giáo viên/phụ huynh nhắc. Tuy nhiên không phải thầy cô nào cũng là Hironaka, người đã cho June Huh thấy vẻ đẹp của Toán học, do đó các bạn trẻ phải tìm ra câu trả lời cho câu hỏi tối quan trọng: "Học Toán để làm cái gì?" để tìm ra động lực. Và nếu muốn tìm một Hironaka cho mình, xin mời xem các kênh youtube sau

- https://www.youtube.com/@3blue1brown
- https://www.youtube.com/@Mathologer
- https://www.youtube.com/@numberphile
- https://www.youtube.com/watch?v=qFo7xZFdBdc&t=902s
- https://www.youtube.com/watch?v=Ss18pJIuiKE

Paul dùng tựa đề *A Mathematician's Lament* là bắt chước Godfrey Harold Hardy–nhà Toán học lừng danh người Anh, người đã viết quyển *"A Mathematician's Apology"* (Lời xin lỗi của nhà toán học) vào năm 1940. Mà Hardy thì bắt chước Plato, nhà triết học Hy lạp cổ đại, vì Plato đã viết quyển *"Apology of Socrates"* vào năm ... 399 trước Công nguyên. Còn Plato có bắt chước ai không thì chỉ có trời mới biết. Mà tại sao Hardy phải xin lỗi khi ông về hưu? Vì ông cho rằng những gì ông đã làm không làm cho thế giới này tốt đẹp hơn ... dù chỉ là một tí tẹo. Ông viết:

> *"Không có phát hiện nào của tôi [về Toán] đã tạo ra, hoặc có khả năng tạo ra, trực tiếp hoặc gián tiếp, dù tốt hay xấu, sự khác biệt nhỏ nhất đối với sự tiện nghi của thế giới."*

Mình thích Hardy từ lúc đọc câu này. Nếu có ai hỏi thì mình cũng đáp luôn: nghiên cứu của mình làm mấy chục năm qua chẳng có đóng góp gì cho nhân loại hết trơn hết trọi. Cuốn *Lời xin lỗi của nhà toán học* thường được coi là một trong những hiểu biết sâu sắc nhất về tâm trí của một nhà toán học còn sống được viết cho những người không chuyên. Mình khuyến khích các bạn trẻ đọc nó, nhất là các bạn định theo ngành Toán.

Đó mới là Toán học đích thực, không ứng dụng. Có ai bắt buộc các bức tranh của Picasso phải có ứng dụng không? Toán là một thế giới cho các nhà Toán học vào đó vui chơi. Một thế giới hoàn hảo: các hình tròn thì tròn vành vạnh không khuyết tật. Có nhiều nhà Toán học đam mê cái thế giới này vì thế giới thực của họ chán quá. Ví dụ Pascal vì đau răng không ngủ được nên làm Toán để quên đi cái đau thể xác. (Tới đây thì mình mới nhớ nhà thơ Hàn Mặc Tử của chúng ta hình như cũng làm thơ để quên đi nổi đau?) Cũng có trường hợp Toán học đã cứu một sinh mệnh. Trong cuốn tự truyện của mình, Bertrand Russel đã kể lại cuộc khủng hoảng thời trẻ của mình: 'Có một lối đi bộ băng qua những cánh đồng đến New Southgate, và tôi thường đến đó một mình để ngắm hoàng hôn và định tự tử. Tôi đã không bao giờ tự tử, vì tôi muốn biết nhiều hơn về toán học.'

Xin lấy chuyện học võ để so sánh. Nếu bạn là Phương Chứng đại sư[†], trụ trì Thiếu Lâm Tự, thì học võ là để cường thân kiện thể. Còn nếu bạn là Nhậm Ngã Hành, giáo chủ Triều Dương Thần Giáo, thì học võ là để xưng hùng xưng bá. Dù bạn chọn mục đích gì thì học võ đều có lợi không có hại cho bản thân bạn.

Học Toán cũng vậy, bạn có thể yêu Toán như Hàn Mặc Tử yêu thơ, và bạn sẽ thành Hardy hay June Huh hay GS Ngô Bảo Châu. Bạn cũng có thể dùng Toán như một công cụ, và bạn sẽ trở thành nhà nữ Toán học người Mỹ Katherine Johnson (1918–2020), người đã dùng Toán để đưa con người lên không gian (xin xem phim *Hidden Figures*). Và dĩ nhiên bạn hoàn toàn có thể không trở thành một người thưởng thức hay sử dụng Toán lúc lớn lên. Nhưng ít nhất với việc học Toán bạn trở nên "khỏe mạnh" hơn. Cụ thể là bạn biết suy nghĩ, hoặc ít nhất biết tính tiền lúc đi mua hàng hóa.

Bạn Phan Thị Thu Hà cắc cớ hỏi Toán học là gì. Không ai trả lời được cả vì không có một định nghĩa duy nhất. Có người nói "Toán là ngôn ngữ của vũ trụ", cũng có người nói "Toán là nghệ thuật". Có người nói "Toán là những gì nhà Toán học làm". Theo mình thì chúng ta để câu hỏi khó này cho mấy triết gia.

Ngày 28 tháng 10 năm 2022

[†]Nhân vật trong truyện *Tiếu Ngạo Giang Hồ* của nhà văn Kim Dung.

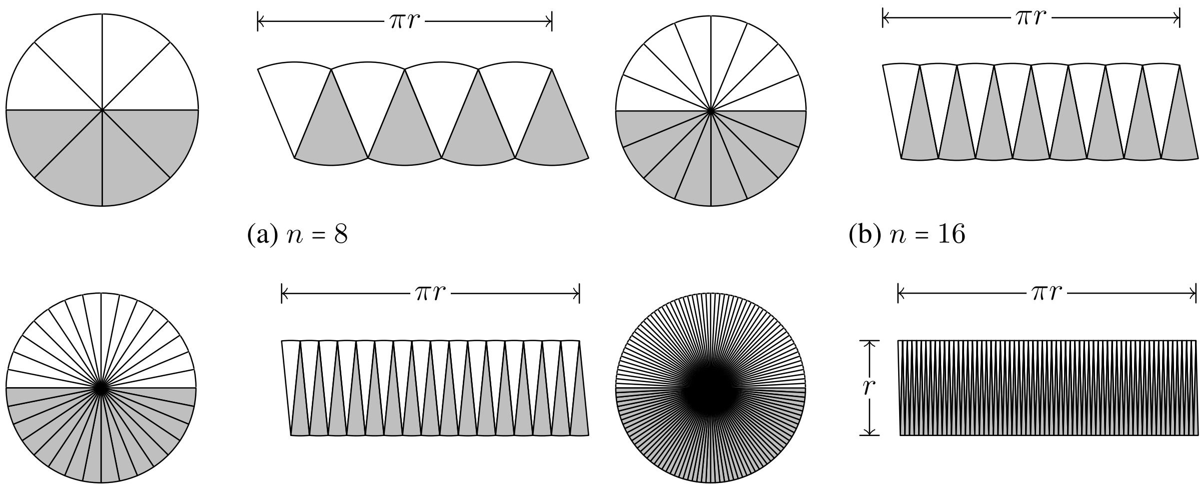
# Chương 31

# Học Toán như thế nào?

TRONG bài này mình xin trình bày một vài thiển ý về cách học Toán. Trước tiên chúng ta cần có sách tốt và trong phần 31.1 mình giới thiệu những quyển sách mình đã đọc và thấy hay. Sau đó, mình xin trình bày cách đọc một quyển sách Toán như thế nào ở phần 31.2. Tiếp theo là một vài lời khuyên về cách học Toán ở phần 31.3. Tiếp đến, mình xin chia sẻ một cách học Toán rất hiệu quả ở phần 31.4. Suy nghĩ bằng hình ảnh sẽ được đề cập ở phần 31.5. Ở phần 31.6 mình trình bày một số phương pháp chứng minh thông dụng, và phần 31.7 nhấn mạnh về tầm quan trọng của kiến thức căn bản. Phần 31.8 nhấn mạnh rằng Toán là một ngôn ngữ, việc hiểu điều này là quan trọng, giúp các bạn trẻ làm thế nào để đọc công thức toán, và viết toán cho đúng văn phạm. Các bước để giải một bài toán sẽ được trình bày trong phần 31.9 qua khoảng mười mấy bài tập. Phần 31.10 bàn về phỏng đoán. Cuối cùng, phần 31.11 bàn về cái gọi là nỗi sợ toán học; mục đích chính là cho các bạn thấy không có gì phải sợ toán cả.

Trước hết thì xin mạn phép bàn một tí cho câu hỏi: Tại sao chúng ta học Toán? Đây là một câu hỏi rất khó trả lời vì mỗi người học một cái gì vì một mục đích khác nhau. Tuy nhiên, cho các bạn còn trẻ (lớp 7 tới lớp 12) thì cái lý do tốt nhất có lẽ là: *học Toán vì nó là nghệ thuật* không thua kém gì âm nhạc và hội họa–một nghệ thuật rất đẹp giúp chúng ta giải thích những vấn đề về số, về hình, vv. Xin lấy một ví dụ, học sinh cấp hai ai cũng được học công thức diện tích hình tròn có bán kính $r$:

$$A = \pi r^2, \quad \pi = 3.1415926535897\ldots \tag{31.1}$$




(a) $n = 8$ (b) $n = 16$

(c) $n = 32$ (d) $n = 128$

Hình 31.1: Diện tích của hình tròn bán kính $r$: chia hình tròn thành $n$ nêm. Khi $n$ rất lớn thì chúng ta thu được một hình chữ nhật có cạnh là $r$ and $\pi r$. Dĩ nhiên diện tích của hình chữ nhật này là $(\pi r) \times r = \pi r^2$. Và đó cũng chính là diện tích hình tròn, vì trong quá trình chia này chúng ta không thêm hay bớt gì cả.

Một điều đáng tiếc là không phải ai cũng hiểu vì sao diện tích hình tròn lại là như vậy. Trong Hình 31.1 là một chứng minh của công thức này, không dùng Toán học cao cấp gì cả. Thử tưởng tượng bạn có một cái bánh pizza hình tròn, chúng ta trước tiên chia nó thành 8 phần bằng nhau (mỗi phần là một hình nêm). Sau đó chúng ta xếp các hình nêm này lại (Hình 31.1a). Chưa có gì đặc biệt cả. Chúng ta tiếp tục bằng cách chia cái pizza thành 16 (Hình 31.1b), rồi 32 (Hình 31.1c) và cuối cùng là 128 (Hình 31.1d) phần bằng nhau. Ngạc nhiên thay, khi xếp 128 phần này thì chúng ta có một hình chữ nhật có cạnh là $r$ and $\pi r$ (chú ý là nửa chu vi hình tròn là $\pi r$). Dĩ nhiên diện tích của hình chữ nhật này là $(\pi r) \times r = \pi r^2$. Và đó cũng chính là diện tích hình tròn, vì trong quá trình chia này chúng ta không thêm hay bớt một tí pizza nào cả.

Một định nghĩa khác của Toán học: *toán học là nghiên cứu về các mô hình đối tượng toán học*. Hãy giới hạn vào số tự nhiên như đối tượng toán học. Dưới đây là một ví dụ về cách các nhà toán học *chơi* với đối tượng của họ; điều này cũng tương tự như Maradona chơi với trái banh vậy hay Shakespeare chơi với ngòi bút. Họ bắt đầu bằng một câu hỏi: *tổng của $n$ số tự nhiên đầu tiên là gì*? Rõ ràng là $n$ số tự nhiên đầu tiên là: $1, 2, 3, \ldots, n$. Do đó, tổng này được viết như sau:

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Ví dụ, nếu $n = 3$, tổng là $S(3) = 1 + 2 + 3$, tức là 6, và nếu $n = 4$ thì tổng là $S(4) = 1 + 2 + 3 + 4$, và cứ thế.

**Ghi chú**

Trong phương trình trên, một dấu ba chấm (dấu "...") (được đặt ở trung tâm của dòng) dùng giữa hai ký hiệu toán học (ở đây là ký hiệu cộng) chỉ ra việc bỏ đi giá trị trong một phép toán lặp đi lặp lại. Ví dụ, thay vì viết dài dòng

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

các nhà toán học viết,

$$S = 1 + 2 + \cdots + 10$$

Các bạn cũng sẽ nghĩ ra giải pháp này (có thể dùng một kí hiệu khác) nếu các bạn cần viết (thường xuyên) tổng của một triệu số tự nhiên đầu tiên.

Bây giờ, các nhà toán học là những người 'lười biếng', họ không muốn tính đi tính lại cái tổng cho các giá trị khác nhau của $n$; nhất là họ muốn tránh đi cái khó khăn khi tính $S(n)$ cho $n$ lớn (chẳng hạn, $n = 1000$). Họ muốn tìm một công thức duy nhất cho tổng đó; một công thức đúng với bất kỳ $n$ nào. Để đạt được điều đó, họ phải nhìn thấu vấn đề hoặc nhìn thấy mẫu. Do đó, họ tính tổng cho một số trường hợp đặc biệt: với $n = 1, 2, 3, 4$, các tổng tương ứng là

$$\begin{aligned}
n = 1 &: S(1) = 1 \\
n = 2 &: S(2) = 1 + 2 = 3 = \frac{2 \times 3}{2} \\
n = 3 &: S(3) = 1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3 \times 4}{2}
\end{aligned}$$

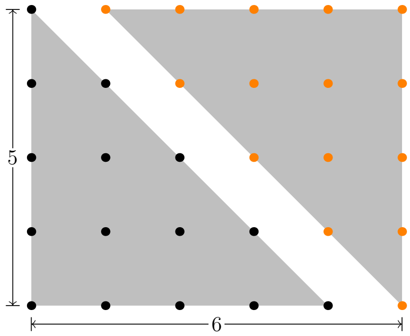
Một mẫu xuất hiện và họ đoán công thức sau đây

$$\boxed{S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}} \tag{31.2}$$

Thực sự thú vị là cách họ chứng minh rằng công thức của họ là đúng. Họ viết $S(n)$ dưới dạng thông thường, và họ cũng viết nó theo thứ tự ngược lại[††], và sau đó họ cộng hai phương trình

$$\begin{aligned}
S(n) &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\
S(n) &= n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \\
2S(n) &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ số hạng}} = n(n+1)
\end{aligned}$$

[††]Họ có thể làm điều này nhờ tính chất giao hoán của phép cộng: Thay đổi thứ tự các số hạng không làm thay đổi tổng. Ví dụ $3 + 5$ thì cũng bằng $5 + 3$. Học Toán thì phải chú ý tới những điều này: mỗi bước đều hiểu tại sao. Chưa hiểu thì lùi lại, học cơ bản. Ở phần 31.7 mình trình bày chi tiết hơn về vấn đề này.




Câu chuyện nhỏ này là một ví dụ (khiêm tốn) về nghệ thuật của nhà toán học: đặt những câu hỏi đơn giản và thanh lịch về những đối tượng trừu tượng tưởng tượng của họ, và tạo ra những giải thích thỏa đáng và tuyệt đẹp, mà họ gọi là các chứng minh. Vậy làm sao mà nhà toán học biết viết $S(n)$ theo thứ tự ngược lại và cộng hai phương trình? Cái này thì Gauss cho chúng ta một câu trả lời, dựa vào hình học! Nếu xem số 1 là một viên đá, số 2 là hai viên vv, và nếu chúng ta sắp xếp những viên đá này một cách ngay ngắn, tổng của chúng ta (tức là $S(n)$) tạo thành một tam giác (xem hình bên cho trường hợp $n = 5$). Và bằng cách thêm một tam giác y chang nó vào tam giác này, chúng ta được một hình chữ nhật; mà hình chữ nhật thì rất dễ cho chúng ta đếm số điểm: $5 \times 6$ điểm. Do vậy, mỗi tam giác sẽ có $^{5\times 6}/_{2}$; chính là Eq. (31.2). Bài học ở đây là hãy cố gắng có những quan điểm khác nhau (hoặc biểu diễn khác nhau) về cùng một vấn đề. Trong vấn đề này, chúng ta rời xa khái niệm trừu tượng (các số $1, 2, 3, \ldots$) trở lại sự cụ thể (viên đá hoặc điểm) và bằng cách chơi với các điểm, chúng ta có thể nhìn thấy cách giải quyết vấn đề.

Một điều thú vị về toán học là khi ta đã phát hiện ra một kết quả thì tự nhiên ta sẽ có rất nhiều kết quả khác. Ví dụ, giờ ta có thể tính ngay tổng của các số chẵn đầu tiên (ví như $2+4+6+\cdots+100$ chẳng hạn):

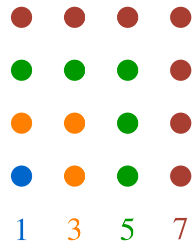
$$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n) = 2\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) \tag{31.3}$$

Vậy tổng của các số lẻ đầu tiên tính được không? Tất nhiên là có, và ta có thể tính ngay:

$$1 + 3 + 5 + 7 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) - (2 + 4 + 6 + 8) = \frac{8 \times 9}{2} - 4 \times 5 = 16 (= 4^2)$$

Cái mẹo ở đây là thêm các số chẵn vào để có thể sử dụng Eq. (31.2), rồi đuổi chúng đi (dùng Eq. (31.3)). Và giờ thì chúng ta chơi lớn luôn: tính tổng của $n$ số lẻ đầu tiên:

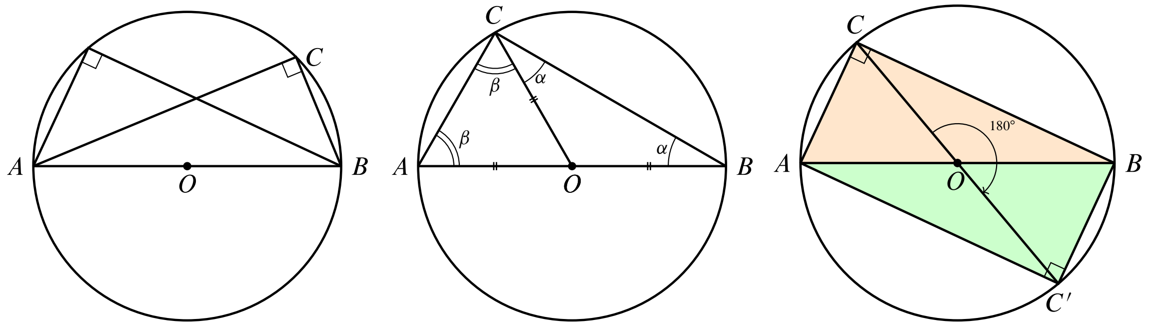
$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 &= (1 + 2 + 3 + \cdots + 2n) - (2 + 4 + \cdots + 2n) \\ &= \frac{2n(2n+1)}{2} - n(n+1) = n^2 \end{aligned} \tag{31.4}$$




Nhưng sao kết quả lại như vậy? Xem các con số như là các viên đá (ở đây minh họa bằng các hình tròn), và sắp xếp 1 viên, rồi 3 viên, rồi 5 viên, và 7 viên sẽ thấy ta luôn có một hình vuông $4 \times 4$.

Nay mình trình bày một định lý khác mà trong đó có hai cách chứng minh. Một chứng minh dùng đại số; tức là mát xa các công thức và *voilà* kết quả hiện ra. Chứng minh thứ hai dùng hình học; chúng ta không những chứng minh xong mà còn *thấy* hay cảm giác được kết quả. Định lý mình muốn bàn liên quan tới một tam giác trong một nửa đường tròn; tức là một tam giác với một cạnh là đường kính của đường tròn và cả ba đỉnh đều nằm trên đường tròn (tam giác $ABC$ trong Hình 31.2a). *Nếu chúng ta chơi với nó đủ lâu* (tức là vẽ thêm các tam giác tương tự), chúng ta sẽ thấy một điều đáng chú ý: bất kể chúng ta đặt đỉnh $C$ của tam giác ở đâu trên vòng tròn, nó luôn tạo thành một tam giác vuông rất đẹp (Hình 31.2a). Toán học đầy những bất ngờ như thế này. Và các nhà Toán học là người đặt ra sứ mạng cuộc đời là đi tìm chúng. Dĩ nhiên, các bạn trẻ cũng có thể tìm ra chúng nếu có đam mê. Câu chuyện của nhiều nhà toán học nghiệp dư (như Fermat) là một minh chứng.

Nhưng liệu phỏng đoán $\triangle ABC$ là một tam giác vuông có đúng không? Chúng ta cần một chứng minh để trả lời câu hỏi *Tại sao chúng ta biết điều đó?* Trong Hình 31.2a, mình trình bày một chứng minh thường được dạy trong lớp hình học trung học. Một chứng minh hoàn chỉnh sẽ dài dòng hơn một chút những gì được trình bày ở đây. Chỉ với việc mát xa những $\alpha$ và $\beta$ rồi thì chúng ta có góc $C$ bằng $90^\circ$. Đó là một chứng minh dùng đại số. Có một chứng minh tốt




(a) Trong tam giác $ABC$: $2(\alpha+\beta)=\pi$ (b) $ACBC'$ là một hình chữ nhật

Hình 31.2: Góc nằm trong một nửa đường tròn luôn là góc vuông (90°): hai cách chứng minh. (a) Các góc có cùng đánh dấu thì bằng nhau, do đó, trong tam giác $ABC$, chúng ta có $2(\alpha+\beta)=\pi$ hoặc $\alpha+\beta=\pi/2$. Chìa khóa của chứng minh là vẽ đoạn thẳng $OC$ mà ban đầu không có trong bài toán. Và (b) Xoay $ABC$ 180° theo chiều kim đồng hồ, chúng ta có một tam giác mới là $ABC'$. Hoặc vẽ $OC$ (như trong chứng minh đầu tiên) nhưng kéo dài nó để gặp vòng tròn tại $C'$ (để có tính đối xứng). Bây giờ hình hộp $ACBC'$ là một hình bình hành. Nhưng đó là một hình bình hành đặc biệt: hai đường chéo bằng nhau (cả hai đều là đường kính của vòng tròn). Vì vậy, $ACBC'$ phải là một hình chữ nhật. Chứng minh thứ hai được coi là tinh tế hơn chứng minh đầu tiên vì chúng ta có thể "nhìn thấy" kết quả.

hơn không? Xem Hình 31.2b: $ACBC'$ là hình chữ nhật và do đó $ABC$ là một tam giác vuông! Chứng minh hình học này được coi là tinh tế vì nó cho phép chúng ta thấy tại sao định lý là đúng.

Toán học dạy trong trường đâu có giống như trình bày ở đây? Chúng toàn là mát xa các $a,b,c$ hay $x,y,z$ một cách vô thức. Để cho các bạn trẻ thấy cái hay của đại số (tức là mát xa $x,y$ đó), hãy giải bài sau: cho hai số thực $x,y$ thỏa mãn $x+y=xy=3$, tính $S=x^3+y^3$. Ôi, có chi mô: từ hệ $x+y=xy=3$, ta tìm ra $x,y$ rồi tính $x^3$ và $y^3$, cuối cùng cọng chúng lại là có $S$. Nếu toán chỉ có vậy thì các nhà toán học đã chuyển nghề rồi! Hãy xem họ làm phép nè:

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy \implies x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\times 3=3$$

Sau đó, họ lại làm tiếp

$$(x+y)(x^2+y^2)=x^3+y^3+xy(x+y) \implies 3\times 3=x^3+y^3+3\times 3 \implies S=0$$

Không cần biết $x,y$, họ vẫn tính ra được $x^3+y^3$! Không cần có vệ tinh họ vẫn tính được bán kính trái đất! Dù Euclid chỉ biết vài số nguyên tố nhỏ, ông biết chắc chắn có vô số số nguyên tố! Không cần kính thiên văn, nhà thiên văn học và toán học người Pháp Le Verrier (1811 – 1877) vẫn có thể phát hiện ra sao Hải vương bằng toán. Như Francois Arago (1786 – 1853), một nhà toán học người Pháp, đã nói:

*"Le Verrier đã phát hiện ra một hành tinh bằng ngòi bút của mình."*

Nói đúng hơn là ngòi bút và $x,y,z$.

## 31.1 Tài liệu

Khi bạn đang giải các bài tập, đọc sách giáo khoa, đi sâu vào các chi tiết cơ bản của từng chủ đề, bạn rất dễ "loose the forest for the trees” và quên mất lý do tại sao bạn lại có cảm hứng học chủ đề mà bạn đang học. Nếu bạn chỉ đọc sách giáo khoa, bạn sẽ thấy chủ đề này thật buồn tẻ. Sách giáo khoa về toán học (hay bất cứ đề tài nào) được viết cho những người đã có mong muốn học toán học mạnh mẽ; chúng không được (hay hiếm) viết để tạo ra một mong muốn như vậy. Đừng bắt đầu bằng cách đọc sách giáo khoa. Thay vào đó, hãy bắt đầu bằng cách đọc xung quanh chủ đề. Đây là lúc những cuốn sách thực sự hay (và không mang tính suy đoán) về chủ đề đó trở nên hữu ích: chúng truyền cảm hứng, khuyến khích và giúp bạn hiểu được bức tranh toàn cảnh. Đối với toán học và vật lý, những quyển sau đây là những sách tốt nhất (ít nhất là với mình):

- A Mathematician's Lament by Paul Lockhart;
- Measurement by Paul Lockhart;
- The Joy of $x$ by Steven Strogatz;
- The Feynman Lectures on Physics;
- An Imaginary Tale by Paul Nahin;
- Character of Physical Law by Richard Feynman;
- Evolution of Physics by Einstein and Infeld;
- Letters to a young mathematician by Ian Stewart

Mình đã nói về cuốn *A Mathematician's Lament* của Lockhart ở Chương 30. Ngoài ra Paul còn viết cuốn *Measurement* rất hay.

Cuốn *The Joy of $x$* của Steven Strogatz thuộc họ sách toán nhằm mục đích phổ cập toán học. Trong gia đình này, bạn cũng có thể tìm thấy những cuốn sách thú vị không kém như *Journey through Genius* của William Dunham, hay *17 equations that changed the world* của Ian Stewart. Đối với các bạn trẻ, đọc những cuốn sách này sẽ rất có ích để nhận ra rằng toán học không phải là một chủ đề khô khan, nhàm chán. Ngược lại, nó rất thú vị.

Bài giảng Feynman về Vật lý của nhà vật lý đoạt giải Nobel Richard Feymann có lẽ là cách tốt nhất để học toán cấp đại học bằng cách nghiên cứu vật lý. Bill Gates từng nói 'Feymann là giáo viên tốt nhất mà tôi chưa từng có'. Trong các bài giảng này, Feymann đã giới thiệu rất hay các chủ đề vật lý khác nhau và toán học cần thiết để mô tả chúng. Ông cũng mô tả cách các nhà vật lý suy nghĩ về các vấn đề. Một lý do khác để đọc những bài giảng này là bạn nên đọc những cuốn sách ở trình độ cao hơn kiến thức của bạn. Các bài giảng của Feymann được viết cho sinh viên Học viện Công nghệ California.

*Sự Tiến Hóa Vật Lý* của nhà vật lý vĩ đại Einstein dạy chúng ta cách tưởng tượng. Thông qua các thí nghiệm tư duy tưởng tượng, cuốn sách giải thích các khái niệm cơ bản của vật lý. Đây chắc chắn là cuốn sách phải đọc đối với tất cả học sinh muốn học vật lý một cách nghiêm túc.

Và nếu bạn muốn trở thành một nhà toán học chuyên nghiệp, hãy đọc *Những lá thư gửi một nhà toán học trẻ tuổi* của Ian Stewart. Ian Stewart (sinh năm 1945) là một nhà toán học người Anh nổi tiếng với việc thu hút công chúng đến với toán học và khoa học thông qua nhiều cuốn sách bán chạy nhất, các bài báo và tạp chí cũng như các lần xuất hiện trên đài phát thanh và truyền hình.

Và đừng quên đọc lịch sử toán học. Nhà Toán học người Pháp Henri Poincaré (1854 – 1912) khuyên,

> *Nhiệm vụ của nhà giáo dục là làm cho tinh thần của đứa trẻ trở lại nơi mà tổ tiên của nó đã đi qua, di chuyển nhanh chóng qua các giai đoạn nhất định nhưng không kìm hãm bất kỳ giai đoạn nào. Về vấn đề này, lịch sử khoa học phải là kim chỉ nam cho chúng ta.*

Sau đây là một vài quyển sách về lịch sử Toán học:

- A history of Mathematics: an introduction by Victor Katz (Katz, 2008);
- A short account of the history of mathematics by W. W. Rouse Ball (Ball, 2005);
- Mathematics and Its History by John Stillwell (Stillwell, 2010);
- Men of Mathematics: The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré by E. T. Bell (Bell, 1986);

## 31.2 Đọc một quyển sách Toán như thế nào?

Tất nhiên, điều đầu tiên cần lưu ý là chúng ta không thể đọc một cuốn sách toán học như đọc một cuốn tiểu thuyết. Điều thứ hai là chúng ta không nên đọc liền một lượt từng trang, từng chữ một. Thứ ba, sách giáo khoa toán thường dài gấp nhiều lần mức cần thiết vì phải đưa vào rất nhiều bài tập (ở cuối mỗi phần hoặc cuối chương). Tại sao như vậy? Chủ yếu là để làm hài lòng các nhà xuất bản nhắm đến mục tiêu tài chính chứ không phải mục tiêu giáo dục!

Đây là một gợi ý về cách chúng ta nên đọc sách toán (dựa trên nhiều khuyến nghị mà mình đã thu thập từ nhiều nguồn khác nhau). Rõ ràng là điều gì đó hiệu quả với người này có thể không hiệu quả với người khác, nhưng nó có thể là một sự khởi đầu:

- Đọc lần 1: lướt qua một phần/chương trước. Ý tưởng là nhìn thấy khu rừng, không phải cái cây. Biết tất cả các cây trong lần đầu tiên sẽ là quá nhiều;
- Đọc lần 2: đọc chậm (bằng giấy/bút chì) để nhận biết các loại cây; tập trung vào động cơ, định nghĩa, định lý. Có khi phải đọc đi đọc lại chỉ một câu hay một lý luận;
- Đọc lần 3: đọc xung quanh; đọc lịch sử của khái niệm;
- Đọc lần 4: chú ý đến các chứng minh; nghiên cứu chúng một cách cẩn thận và tự viết một chứng minh cho chính mình.

## 31.3 Bí quyết học Toán

Không có gì ngạc nhiên khi nhiều người trong chúng ta (dĩ nhiên kể cả tui) đã học nhiều chủ đề một cách tự nhiên mà không hiểu bộ não hoạt động như thế nào. Chúng ta có thể bù đắp cho sự thiếu hụt kiến thức đó bằng cách đọc cuốn *Learning How to Learn* của Barbara Oakley và Terry Sejnowski (Oakley et al., 2018). Mình không nhắc lại lời khuyên của họ ở đây, vì họ là chuyên gia còn mình thì không. Thay vào đó, mình cung cấp những thứ của riêng mình mà mình đã học và phát triển trong nhiều năm (mình không khẳng định chúng là những phương pháp hay nhất, mình chỉ cảm thấy rằng mình nên chia sẻ những gì mình cho là hữu ích; đây là những thông tin mà mình ước mình đã biết chúng khi còn ở trường cấp 2/3):

- Nếu bạn có một giáo viên tồi, hãy bỏ qua lớp học của người đó. Có rất nhiều những giáo viên dạy toán giỏi trên mạng. Thay vào đó, hãy học hỏi từ họ.
- Cách tốt nhất để học là dạy. Nếu bạn không có cơ hội như vậy, bạn có thể viết về những gì bạn biết. Hoặc bạn có thể viết một blog về toán học. Viết là một trong những cách tốt nhất để củng cố kiến thức của bạn về những gì bạn đã học (không chỉ môn toán). Bạn có thể thắc mắc: nhưng viết tốn thời gian. Điều đó không đúng nếu bạn chỉ viết một trang mỗi ngày và bạn làm điều đó một cách nhất quán hàng ngày.
- LaTeX là cách tốt nhất cho việc viết Toán. Vì vậy bạn có thể học nó ngay bây giờ nếu muốn.
- Trong khi học toán, bạn nên nhớ rằng toán học là về các ý tưởng chứ không phải công thức hay các con số. Vì vậy, trước tiên bạn phải có khả năng diễn đạt ý tưởng bằng ngôn ngữ nói của mình. Sau đó, dịch nó sang ngôn ngữ toán học. Ví dụ, ý tưởng về sự hội tụ của một dãy được thể hiện trong cả tiếng Anh và toán học:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\forall \epsilon > 0$ | $\exists N \in \mathbb{N}$ | such that | $\forall n > N$ | $\lvert a_n - a \rvert < \epsilon$ |
| however small epsilon is | there is a point in the sequence | such that | beyond that point | all the terms are within epsilon of $a$ |

- Cũng giống như việc học bất kỳ ngôn ngữ nói nào, để nói được ngôn ngữ toán học, bạn phải học từ vựng của nó. Bạn nên làm quen với các ký hiệu Hy Lạp như $\epsilon, \delta, \forall$;

- Và như Euclid đã nói với Ptolemy 1st Soter, vị vua đầu tiên của Ai Cập sau cái chết của Alexander Đại đế rằng “không có con đường hoàng gia nào dẫn đến hình học”, bạn phải làm toán. Cũng giống như để thích bơi lội bạn phải nhảy xuống nước, chỉ nhìn người khác bơi bạn sẽ không bao giờ hiểu được sự phấn khích;

- Biết tên của một cái gì đó không có nghĩa là bạn hiểu nó. Có một cách để kiểm tra xem bạn có hiểu điều gì đó hay chỉ biết tên/định nghĩa. Nó được gọi là Kỹ thuật Feynman, và nó hoạt động như sau: “Không sử dụng từ mới mà bạn vừa học, hãy cố gắng diễn đạt lại những gì bạn vừa học bằng ngôn ngữ của chính mình”; Xin xem thêm Chương 49.

- Đọc sách toán rất chậm; đừng để mất rừng vì cây. Nghiên cứu kỹ các định nghĩa, tại sao chúng ta cần chúng. Sau đó, chơi với các định nghĩa để xem chúng có thể sở hữu những thuộc tính nào. Cho đến lúc đó, nghiên cứu các định lý. Và cuối cùng là các chứng minh. Nếu bạn chỉ muốn trở thành một nhà khoa học hay kỹ sư, thì hãy bớt tập trung vào các chứng minh;

- Hãy đọc về lịch sử toán học. Nó không chỉ kể cho bạn nghe những câu chuyện thú vị mà còn tiết lộ rằng các nhà toán học vĩ đại cũng là con người, họ đã phải vật lộn, thất bại nhiều lần trước khi thành công trong việc phát triển một ý tưởng toán học đúng đắn.;

- Nếu bạn bị tụt lại phía sau trong các môn toán, vật lý, hóa học (mình đã từng như vậy ở lớp 8), chỉ cần tập trung vào việc cải thiện môn toán của bạn. Giỏi toán hơn, bạn sẽ làm tốt với vật lý và hóa học. Hãy nhớ rằng toán học là ngôn ngữ mà Chúa nói;

- Bạn không thể hiểu đại số nếu bạn chưa thành thạo số học. Bạn không thể hiểu giải tích nếu bạn chưa nắm vững đại số. Vì vậy, đừng vội vàng, điều quan trọng là phải quay lại giai đoạn đầu;

- Toán học là một môn học rộng lớn và ít người có thể giỏi mọi thứ trong môn này. Bạn không giỏi hình học không có nghĩa là bạn không giỏi toán. Bạn có thể không giỏi toán thuần túy, nhưng bạn có thể giỏi toán ứng dụng;

- Hãy nhận biết chế độ suy nghĩ tập trung và phân tán (dịch từ chữ diffused). Xin xem cuốn sách *Learning how to learn*, đề cập ở trên, để biết chi tiết. Nói tóm lại, chế độ phân tán là khi tâm trí bạn thoải mái và tự do; bạn không đang nghĩ về một cái gì cụ thể. Bạn đang ở trạng thái phân tán khi đi dạo trong công viên (tất nhiên là không có điện thoại), hay đang tắm. Và thông thường, khi bạn ở trạng thái phân tán, bạn sẽ tìm ra giải pháp cho những vấn đề mà bạn đang loay hoay giải quyết[†]. Và một trong những cách tốt nhất để chuyển sang chế độ phân tán là đi bộ. Không phải ngẫu nhiên mà nhiều nhà tư tưởng vĩ đại nhất trong lịch sử lại là những người đi bộ nhiệt tình. Một ví dụ cũ là Aristotle, nhà triết học Hy Lạp nổi tiếng, người đã thực hiện các bài giảng của mình khi đi dạo trong khuôn viên trường học của ông ở Athens. Một số nhà văn nổi tiếng, chẳng hạn như Jane Austen, Carl Sandburg và Charles Dickens, đã tìm thấy nguồn cảm hứng trong những chuyến đi bộ thường xuyên của họ.[††] Thời này thì có thêm đi tàu. Vào khoảng năm 1994, Joanne Rowling đang trên chuyến tàu bị trễ bốn tiếng từ Manchester đến London, thì các nhân vật Harry Potter, Ron Weasley và Hermione Granger hiện ra rõ ràng trong tâm trí cô. Không có bút và giấy buộc cô phải khám phá đầy đủ các nhân vật và câu chuyện của họ trong trí tưởng tượng của mình. Sau khi về đến căn hộ của mình, cô bắt đầu viết;

[†]Archimedes đã đi vào lịch sử với tư cách là anh chàng khỏa thân chạy trên đường phố Syracuse và hét lên "Eureka!" - hoặc "Tôi có nó!" bằng tiếng Hy Lạp. Câu chuyện đằng sau sự kiện đó là Archimedes được giao nhiệm vụ chứng minh rằng chiếc vương miện mới làm cho Hieron, vua của Syracuse, không phải là vàng nguyên chất như người thợ kim hoàn đã tuyên bố. Archimedes đã suy nghĩ rất lâu nhưng không thể tìm ra phương pháp chứng minh rằng chiếc vương miện không phải là vàng nguyên khối cho đến khi ông đi tắm. Về $E = mc^2$, Einstein nói rằng: “Tôi đã nghĩ về nó khi đang đạp xe.”

[††]Nhiều bài viết trong sách này hình thành lúc mình đi bộ. Về nhà mình chỉ viết lại những gì đã nghĩ trong đầu lúc đi bộ.

- Bạn nên chiến đấu bao lâu trước khi bỏ cuộc khi giải các bài toán? Một điều mà nhiều bạn học sinh hay làm khi gặp khó khăn là nhìn lời giải. Nhưng đừng làm như vậy! Tốt nhất là giải bài đó một lúc (ví dụ trong 2 giờ), nếu vẫn không được thì quên đi, làm việc khác. Quay lại với nó sau, và làm điều tương tự. Sau một hoặc hai ngày, nếu vẫn bế tắc thì xem lời giải, nhưng chỉ là bước đầu tiên, sau đó thì tự bạn giải quyết vấn đề và suy ngẫm: tại sao mình không nghĩ ra cách giải. Nếu bạn phải xem xét toàn bộ giải pháp, thì hãy đảm bảo rằng bạn có thể tự mình lặp lại tất cả các bước sau đó. Đừng đánh lừa bản thân bằng cách chỉ nhìn vào lời giải và nghĩ rằng bạn hiểu nó. KHÔNG! Đó là ảo tưởng về năng lực – một tình huống tinh thần mà bạn nghĩ rằng mình đã thành thạo một điều gì đó nhưng thực tế thì chưa. Tất cả chúng ta đều xem Messi ghi bàn từ một quả đá phạt trực tiếp: anh ấy chỉ đưa bóng vào góc cao bên trái khiến thủ môn đối phương không thể với tới. Nhưng chúng ta có thể lặp lại điều đó không?

- Nếu muốn thành nhà Toán học sau này bạn nên có một hay nhiều bài khiến bạn bí trong thời gian dài (6 tháng hay 1 năm). Vì sau này lúc trở thành nhà Toán học bạn sẽ rơi vào hoàn cảnh tương tự;

- Tự suy ngẫm nhiều hơn. Đâu là nơi bạn học hiệu quả nhất? Khi nào là thời gian bạn làm việc hiệu quả nhất? Sau khi giải quyết mọi câu hỏi toán học, hãy đặt các câu hỏi như: tại sao phương pháp này hiệu quả, tại sao câu trả lời đó, câu trả lời có hợp lý không, phương pháp có hiệu quả không nếu chúng ta sửa đổi câu hỏi? Tại sao tôi không thể nhìn thấy giải pháp? Có cách nào khác để giải quyết cùng một vấn đề không? Trả lời hết các câu hỏi này rồi mới chuyển sang bài toán mới. Xin xem thêm Chương 36.

- Đối mặt với một bài toán, bạn nên làm một điều gì đó: thư giãn, vẽ một cái gì đó, viết ra một cái gì đó ... Và trong đầu bạn nói rằng "Tôi có thể giải quyết nó, tôi có thể giải quyết nó". Đây được gọi là tư duy phát triển (growth mindset), một thuật ngữ được trình bày bởi Nhà tâm lý học Carol Dweck của Đại học Stanford;

- Để có một tâm trí và cơ thể nhạy bén, chúng ta tập thể dục. Tương tự như vậy, toán học của bạn sẽ bị rỉ sét nếu bạn không sử dụng nó thường xuyên. Mình nghe nói rằng Zdenek Bazant–Giáo sư Kỹ thuật Xây dựng và Khoa học Vật liệu tại Đại học Northwestern–vẫn giải phương trình đạo hàm riêng mỗi tuần! Lưu ý rằng ông này không phải là một nhà toán học; nhưng ông ấy cần toán cho công việc của mình;

- Học Toán thì không nên dựa vào máy tính tay; ví dụ gặp phải $99 \times 3$ thì nên làm $100 \times 3 - 3 = 300 - 3 = 297$. Bằng cách 'ép' mình vào việc phải dùng tay và đầu óc như vậy chúng ta sẽ phát triển khả năng Toán học;

- Toán học có thể khó hiểu đầy đủ và sự hiểu biết đó thường đến từ việc tiếp xúc và thực hành lặp đi lặp lại hơn là một khoảnh khắc hiểu biết đột ngột. Vì vậy, nhà toán học người Mỹ gốc Hungary John von Neumann (1903–1957) đã từng nói:

> *Trong toán học bạn không hiểu mọi thứ. Bạn chỉ cần làm quen với chúng.*

## 31.4 Tự học với sự chỉ điểm của cao thủ

Ai mà đã học Toán thì không thể không biết tới công thức thần sầu quỷ khốc: $e^{i\pi} + 1 = 0$. Tác giả của nó không ai khác chính là Leonhard Euler (1707 – 1783), nhà Toán học vĩ đại người Thụy Sỹ. Người mà làm Toán nhưng không nhìn thấy được Toán của mình. Về kinh nghiệm học Toán của mình, ông viết trong tự truyện của ông viết cho con trai cả:

> *"Tôi nhanh chóng tìm thấy cơ hội được giới thiệu với một giáo sư nổi tiếng Johann Bernoulli ... Đúng là ông ấy rất bận nên đã thẳng thừng từ chối dạy riêng cho tôi; nhưng ông ấy đã cho tôi nhiều lời khuyên quý giá hơn để bắt đầu tự mình đọc những cuốn sách toán học khó hơn và nghiên cứu chúng một cách chăm chỉ nhất có thể; nếu tôi gặp trở ngại hoặc khó khăn nào đó, tôi được phép tự do đến thăm ông vào mỗi chiều thứ Bảy và ông đã tận tình giải thích cho tôi mọi điều tôi không thể hiểu được ... và đây chắc chắn là phương pháp tốt nhất để thành công trong các môn toán."*

Xin tạm gác Euler lại và cho phép mình chia sẻ kinh nghiệm của mình từ một người đuối như con cá chuối môn Toán đến thi đậu BKSG. Hồi đó lúc mình đã quyết định sẽ học Toán thì trước tiên mình ra nhà sách hốt hết sách Toán mà túi tiền cho phép (trước đó mình chỉ xài sách GK). Về nhà, mình đọc và làm. Lúc nào không hiểu thì chạy qua nhà anh Bé, và anh Bé giải thích. Mình không nhớ rõ, nhưng có thể mình làm như vậy trong vòng 3 tháng hè. Sau đó là mình tự bơi qua sông, không chết đuối.

Rõ ràng là có sự trùng hợp giữa cách học của Euler và mình. Dù mình là hạt muối, còn Euler là Thái Bình Dương bao la bát ngát. Cách học này hay chổ nào?

*Chổ tự học có sự chỉ điểm riêng của cao thủ!*

Nếu anh Bé chủ động dạy mình thì kết quả chưa chắc đã tốt. Vì là tự học nên lúc sang gặp anh Bé, mình biết mình cần hỏi gì. Đó là mấu chốt của vấn đề. Người đi học thêm không có điều này. Người đi học thêm có thể: (1) không biết mình không hiểu gì, hay (2) biết mình không hiểu cái gì nhưng không hỏi được vì ông thầy là thầy chung cho mọi người. (Hồi xưa lúc mình đi học thêm Toán thầy Quang thì mình đi rất sớm, lúc đó thầy là của mình, và mình tranh thủ hỏi bài thầy.)

Nhưng mà làm sao mình xoay xở lúc mới tự học Toán (trước khi có sự can thiệp của anh Bé)? Cái đó thì John von Neumann nói rất hay: *Trong Toán học bạn không hiểu mọi thứ. Bạn chỉ cần làm quen với chúng.* Mà Neumann là ai có đáng tin cậy không? Xin thưa Neumann là người đã xây dựng một khuôn khổ vững chắc cho cơ học lượng tử. Ông cũng làm việc trong lĩnh vực lý thuyết trò chơi, nghiên cứu cái mà ngày nay gọi là Đại số von Neumann, và là một trong những người tiên phong của khoa học máy tính. Như vậy lúc ban đầu chúng ta chỉ cần bắt chước và làm quen Toán. Lúc đó xin đừng quá cố gắng trả lời câu hỏi tại sao. Với thời gian, chúng ta sẽ hiểu Toán sâu hơn.

Và cuối cùng chúng ta nên nhận thức rằng làm Toán không hề là một câu chuyện dễ dàng. Hãy nghe nhà Toán học người Anh Andrew Wiles–người được phong tước Hiệp sĩ–kể lại kinh nghiệm làm toán của mình:

> *"Giống như việc đi vào một lâu đài tối om. Bạn bước vào phòng thứ nhất, trong đó tối đen như mực, bạn bước đi loạng choạng, va đập vào đồ đạc trong phòng. Dần dần, bạn cũng biết được vị trí của từng thứ một. Và cuối cùng, sau khoảng sáu tháng bạn lần ra công tắc đèn rồi bật lên. Ngay lập tức, mọi thứ được sáng tỏ và bạn thấy rõ mình đang ở đâu. Thế rồi bạn bước vào một phòng tiếp theo, ở đó lại tối đen như mực..."*

Khó thì nói mới thích thú; nếu trên đời mọi chuyện chỉ dừng lại ở $1 + 1 = 2$ thì chắc chắn chúng ta sẽ chết vì chán! Sao lúc chơi game chúng ta đều muốn chơi những game khó nhất? Vì chúng ta thích thử thách và chán những gì dễ. Vì chúng ta thích cảm giác thắng lợi sau những nỗ lực. Toán học hoàn toàn có thể cho các bạn những cảm giác đó. Ở Chương 54 mình sẽ nói về Andrew Wiles.

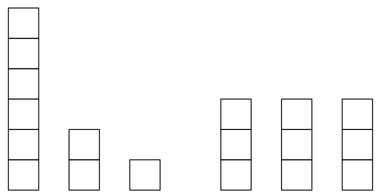
## 31.5 Suy nghĩ bằng hình ảnh

Sau đây là câu hỏi số năm trong kỳ thi AMC (American Mathematics Competitions) 10 năm học 2014-2015.

Pablo, Sofia và Mia nhận được một số quả trứng kẹo tại một buổi tiệc. Pablo có ba lần số quả trứng của Sofia, và Sofia có gấp đôi số quả trứng của Mia. Pablo quyết định chia một số quả trứng của mình cho Sofia và Mia sao cho cả ba người có cùng số quả trứng. Tỷ lệ phần trăm của số trứng mà Pablo nên cho Sofia là bao nhiêu?

**Lời giải đại số**. Đầu tiên, mình trình bày lời giải đại số. Hãy đặt $m$ là số quả trứng mà Mia có; vậy thì Sofia có $2m$ quả trứng và Pablo có $6m$ quả trứng. Tổng cộng, họ có $m + 2m + 6m = 9m$ quả trứng. Sau chia sẻ từ Pablo, họ có cùng số quả trứng, do đó mỗi người có $3m$ quả trứng. Vậy nên, Pablo phải cho Sofia $m$ quả trứng, tương ứng với $1/6$ số quả trứng của anh ấy.

**Lời giải hình học**. Để có một giải pháp hình học, chúng ta cần một biểu đồ. Chúng ta dùng một hình vuông đại diện cho số quả trứng của Mia (tức là $m$ ở lời giải trên). Do đó, chúng ta có hình vẽ như trong Hình 31.3: bên trái là số trứng của Pablo, Sofia và Mia (theo thứ tự) và bên phải là số trứng sau khi chia. Giải pháp sau đó trở nên dễ dàng.



Hình 31.3

Mình luôn là người thích suy nghĩ dùng đại số ($x, y, \ldots$ rồi sau đó mát xa chúng) và mình kém hình học. Nhà Vật lý Albert Einstein là người có thói quen suy nghĩ bằng hình ảnh (lúc ông học cấp ba thì trường học ông khuyến khích phong cách này), và nhờ đó ông có thể làm cái gọi là *thought experiments*, tức là thí nghiệm vật lý trong đầu. Mình nghĩ chúng ta nên tiếp cận vấn đề theo hai cách. Và các bạn trẻ có thể luyện tập bằng cách vẽ hình, dù là bài tập đại số. Ở Chương 49 mình sẽ giới thiệu thêm về tư duy hình ảnh.

## 31.6 Một số phương pháp chứng minh toán học thông dụng

Sau đây mình sẽ trình bày ba phương pháp chứng minh toán học phổ biến nhất (ít nhất trong trường học):

- chứng minh trực tiếp;
- chứng minh bằng phương pháp quy nạp;
- chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

### 31.6.1 Chứng minh trực tiếp

Trong chứng minh trực tiếp, kết luận được xác lập bằng cách kết hợp logic các tiên đề, định nghĩa và các định lý trước đó. Ví dụ, phương pháp chứng minh trực tiếp có thể được sử dụng để chứng minh rằng tổng của hai số nguyên chẵn luôn luôn là số chẵn. Xét hai số nguyên chẵn $x$ và $y$. Vì chúng là số chẵn, chúng có thể được viết dưới dạng $x = 2a$ và $y = 2b$, tương ứng, với $a$ và $b$ là các số nguyên. Sau đó, tổng của chúng là $x + y = 2a + 2b = 2(a + b)$. Do đó, $x + y$ có 2 là một thừa số và, theo định nghĩa, là số chẵn. Vì vậy, tổng của hai số nguyên chẵn bất kỳ cũng là số chẵn.

### 31.6.2 Chứng minh bằng phương pháp quy nạp

Một kỹ thuật phù hợp để chứng minh Eq. (31.2) là *chứng minh theo quy nạp*. Các bước của một chứng minh quy nạp là: (1) kiểm tra $S(1)$ đúng–được gọi là bước cơ sở, (2) giả định $S(k)$ đúng, đây là giả thiết quy nạp, và (3) chứng minh rằng $S(k+1)$ đúng: bước quy nạp. Vì vậy, sự thật rằng $S(1)$ đúng dẫn đến việc $S(2)$ đúng, từ đó dẫn đến $S(3)$ và cứ tiếp tục như vậy. Điều này tương tự hiệu ứng domino quen thuộc.

*Chứng minh theo quy nạp của Eq.* (31.2). Dễ thấy rằng $S(1)$ đúng (vì Eq. (31.2) chính là $1 = 1$). Giả sử nó đúng với $k$–một số tự nhiên, do đó chúng ta có

$$S(k) = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Bây giờ, chúng ta xem xét $S(k+1)$, tức là $1 + 2 + \cdots + k + k + 1$. Nếu chúng ta có thể chứng minh rằng $S(k+1) = 0.5(k+1)[(k+1+1]$, thì chúng ta đã xong. Thực sự, chúng ta có (chú ý rằng $S(k+1)$ chính là $S(k) + (k+1)$)

$$\begin{aligned} S(k+1) &= S(k) + (k+1) && \text{(định nghĩa của } S(k+1)) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{(giả thiết quy nạp cho } S(k)) \\ &= \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} && \text{(đại số)} \end{aligned}$$

□

### 31.6.3 Chứng minh bằng phương pháp phản chứng

Các nhà toán học Hy lạp cổ đã phát hiện ra rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỷ; tức là không thể viết $\sqrt{2}$ dưới dạng $a/b$ trong đó $a, b$ là hai số nguyên. Làm thế nào chúng ta chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỷ? Thông tin duy nhất mà chúng ta có là định nghĩa về số vô tỷ–số không thể biểu diễn dưới dạng $a/b$. Vì vậy, mục tiêu là chứng minh $\sqrt{2} \neq a/b$. Chúng ta bắt đầu từ đâu? Có vẻ dễ dàng hơn nếu chúng ta bắt đầu với $\sqrt{2} = a/b$, và thử xem liệu có điều gì đó xuất hiện. Chúng ta đang cố gắng sử dụng phương pháp chứng minh bằng phản chứng. Giờ thì hãy cùng làm điều đó.

*Chứng minh phản chứng $\sqrt{2}$ là số vô tỷ*. Giả sử rằng $\sqrt{2}$ là một số hữu tỷ, tức $\sqrt{2} = a/b$ hoặc $a^2/b^2 = 2$ trong đó $a, b$ không đều là số chẵn (nếu chúng là số chẵn, ta luôn có thể loại bỏ đi thừa số 2). Vì vậy, $a^2 = 2b^2$ mà đó là một số chẵn (vì nó là 2 nhân với một số nào đó). Do đó, $a$ là một số chẵn (mặc dù điều này khá rõ ràng, nhưng như mọi khi, cần chứng minh). Vì $a$ là số chẵn, chúng ta có thể biểu diễn nó dưới dạng $a = 2c$ với $c = 1, 2, 3, \ldots$

$$a = 2c \implies a^2 = 4c^2 \implies 4c^2 = 2b^2 \implies b^2 \text{ là số chẵn, hoặc } b \text{ là số chẵn}$$

Vì vậy, chúng ta dẫn đến việc cả $a$ và $b$ đều là số chẵn, điều này trái với điều kiện ban đầu là $a$ và $b$ không đều là số chẵn. Vậy nên, căn bậc hai của hai phải là số vô tỷ. □

Chúng ta đã sử dụng phương pháp chứng minh bằng phản chứng. Để sử dụng kỹ thuật này khi chứng minh $A$ đúng, chúng ta giả định rằng phủ định của $A$ là đúng và sử dụng nó để dẫn đến một điều vô lý. Như vậy phủ định của $A$ phải sai, và vì vậy $A$ phải đúng. Vì lí do này, mà phản chứng còn được biết đến bằng cụm từ tiếng Latin *reductio ad absurdum* (có nghĩa là bằng cách dẫn đến sự vô lý).

Nói về chứng minh phản chứng thì phải trình bày siêu phẩm của Euclid về số nguyên tố. Nhưng trước hết, số nguyên tố là gì? Một lần nữa, khi chúng ta chơi với các số tự nhiên đủ lâu và tập trung, chúng ta sẽ phát hiện nhiều cái hay ho. Ví dụ ta sẽ thấy điều này:

$$4 = 2 \times 2, \quad 6 = 2 \times 3, \quad 8 = 2 \times 4, \quad 9 = 3 \times 3$$
$$2 = 1 \times 2, \quad 3 = 1 \times 3, \quad 5 = 1 \times 5, \quad 7 = 1 \times 7$$

Vì vậy, chúng ta có hai nhóm số tự nhiên trong việc phân tích thành thừa số (biểu diễn một số thành tích của các số khác). Trong một nhóm $(2, 3, 5, 7, \ldots)$, các số chỉ có thể được viết dưới dạng tích của chính nó và số một. Những số như vậy được gọi là *số nguyên tố*. Nhóm còn lại $(4, 6, 8, 9, \ldots)$ chứa các số không phải số nguyên tố hoặc *hợp số*.

Số nguyên tố là trung tâm của lý thuyết số vì định lý số học cơ bản khẳng định rằng mọi số tự nhiên lớn hơn một đều là số nguyên tố hoặc có thể phân tích thành tích của các số nguyên tố, và biểu diễn đó là *duy nhất theo thứ tự của chúng*. Ví dụ,

$$328\,152 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 11 \times 11 \times 113 = 2^3 \times 3^1 \times 11^2 \times 113$$

mỗi trong các số $2, 3, 11, 113$ là số nguyên tố. Và biểu diễn thành thừa số nguyên tố này là duy nhất (thứ tự của các thừa số không quan trọng). Đó là lý do tại sao các nhà toán học quyết định rằng 1 không phải là số nguyên tố. Nếu 1 là số nguyên tố thì chúng ta có thể viết $6 = 1 \times 2 \times 3 = 2 \times 3$: biểu diễn không duy nhất. Giống như vật chất được tạo thành từ nguyên tử, các số được tạo thành từ số nguyên tố!

Sau khi khám phá ra số nguyên tố, các nhà toán học tò mò hỏi: vậy có bao nhiêu số nguyên tố? Có vô hạn số nguyên tố hay không? Euclid đã chứng minh rằng có vô hạn số nguyên tố. Đây là một trong những chứng minh phản chứng hay nhất mọi thời đại. Ông làm sao chứng minh điều này? Chúng ta có thể suy nghĩ thế này. Làm sao ta biết có vô số các số tự nhiên $1, 2, 3, \ldots$? Các em bé tầm 6 hay 7 tuổi hay nói '1 triệu', và em khác nói '1 tỉ' khi chơi trò chơi ai nói ra số lớn nhất thắng. Rồi sau khi có em nói '100 tỉ' thì có một em thông minh phát hiện ra điều này: cứ cho bạn mình nói ra bất cứ con số nào, mình chỉ thêm một vào nó là có số lớn hơn rồi.

*Chứng minh phản chứng có vô số số tự nhiên.* Giả sử rằng có hữu hạn các số tự nhiên, và các số đó là $1, 2, \ldots, n$, trong đó $n$ là số tự nhiên lớn nhất. Giờ ta xét số $N = n + 1$. Vì $N$ là số tự nhiên, và $N > n$, $n$ không thể là số tự nhiên lớn nhất. Điều này mâu thuẫn với giả định ban đầu. Do đó, phải có vô số các số tự nhiên. □

Trong tinh thần của chứng minh này, ta có thể hiểu chứng minh của Euclid rằng có vô số các số nguyên tố. Chứng minh như sau:

*Chứng minh phản chứng có vô số các số nguyên tố.* Giả sử rằng có hữu hạn các số nguyên tố, và các số đó là $p_1, p_2, \ldots, p_n$, trong đó $p_n$ là số nguyên tố lớn nhất. Giờ ta xét số

$$N = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_n + 1 \tag{31.5}$$

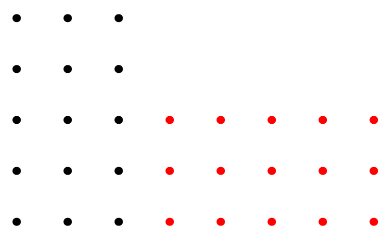
Vì chúng ta đã giả định chỉ có $n$ số nguyên tố, $N$ không thể là số nguyên tố. Do đó, theo định lý số học cơ bản, $N$ phải chia hết cho bất kỳ số $p_i$ nào $(1 \leq i \leq n)$, nhưng Eq. (31.5) nói rằng $N$ không chia hết cho bất kỳ $p_i$ nào (vì phần dư là 1). Một sự mâu thuẫn! Vậy nên giả định rằng có số lượng hữu hạn số nguyên tố là sai, và do đó có vô số số nguyên tố. □

Tới đây thì một câu hỏi thú vị nảy sinh: làm sao biết lúc nào dùng phương pháp nào? Cái này thì các bạn tự tìm câu trả lời cho chính mình thì thú vị hơn. Nói ngắn gọn thì sau một thời gian làm toán các bạn sẽ tự khắc biết à. Kiểu như có ai dạy đâu, bạn cũng biết tìm tới nhà nàng thôi.

## 31.7 Bắt đầu từ cái cơ bản

Ai đã ngồi ghế nhà trường thì đều biết, cho hai số thực bất kỳ $a$ và $b$, chúng ta luôn có $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Đây là một đẳng thức. Một điều đáng tiếc là chúng ta lại học thuộc lòng đẳng thức này thay vì hiểu tại sao nó như vậy. Muốn hiểu nó thì chúng ta phải bắt đầu với luật chơi của các con số (tiên đề đó các bạn). Đây là một vài luật chơi, mà ai muốn chơi với các con số phải tuân thủ (đã là luật chơi thì xin đừng hỏi chứng minh; không ai hỏi tại sao con xe trong cờ tướng không đi chéo):

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \text{tính giao hoán của phép cộng} & a+b=b+a \\ \text{(b)} & \text{tính giao hoán của phép nhân} & ab=ba \\ \text{(c)} & \text{tính phân phối} & a(b+c)=ab+ac \\ \text{(d)} & \text{tính trọn vẹn} & a+b \text{ là một số thực} \end{array} \tag{31.6}$$



(Chú ý khi nhà Toán học viết $ab$ họ ám chỉ là $a \times b$, khi họ viết $2a$ họ muốn nói $2 \times a$, $a$ là $1a = 1 \times a$ và $-a = (-1) \times a = (-1)a$. Họ luôn muốn tiết kiệm thời gian. Nhưng họ không thể viết 53 với mong muốn đó là $5 \times 3$!) Và một cách để hiểu vì sao $ab = ba$ là dùng các viên bi và xếp chúng theo hai cách (xem hình minh họa cho $3 \times 5 = 5 \times 3$). Tính giao hoán của phép cộng thì có gì ghê gớm mà được 'phong thần' như vậy? Phép trừ và phép chia không có tính chất này! Hơn nữa vì nó mà ta không quan tâm thứ tự của $a, b$ khi làm phép cộng. Đừng xem thường nó nhé, ví dụ từ nó ta suy ra $a + b + c = c + b + a = a + c + b$ (hay cho tổng của bất kỳ bao nhiêu số, thứ tự không quan trọng). Nhờ nó mà ta chứng minh Eq. (31.2).

Giờ thì chúng ta có thể chứng minh $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Chúng ta bắt đầu với $(a+b)^2$, tức là $(a+b)(a+b)$. Gọi $c$ là số thực sao cho $c = a+b$ (tại sao làm được điều này? Vì tiên đề (d) ở Eq. (31.6)). Giờ ta có,

$$\begin{aligned} (a+b)(a+b) &= (a+b)c \\ &= ac + bc && \text{(vì (c))} \\ &= a(a+b) + b(a+b) && (\text{vì } c = a+b\ ) \\ &= aa + ab + ba + bb && \text{(vì (c) )} \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 && \text{(vì (b) )} \end{aligned} \tag{31.7}$$

Và đó là lí do vì sao $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Sao $ab + ab = 2ab$? Nó như 1 quả táo với 1 quả táo thì hai quả táo vậy. Nếu bạn không hài lòng với giải thích này, thì đây: $ab + ab = (1)ab + (1)ab = (1+1)ab = 2ab$ (đã dùng tính phân phối (c)).

Tóm lại, toán học là một trò chơi, và như mọi trò chơi, chúng ta phải biết ba thứ: chơi với cái gì, và chúng ta có thể làm gì với những thứ này, và luật chơi như thế nào. Chỉ có vậy thôi, những cái khác sẽ là hệ quả của ba thứ này. Ví dụ, trong đại số chúng ta chơi với các con số (2, 3 hay $x, y$), các biểu thức ($x^2 + 4xy$), ... và với các con số chúng ta có thể cộng/trừ/nhân/chia (gọi là bốn phép tính cơ bản), lấy căn, lấy logarit, ... và luật chơi là Eq. (31.6) (chú ý, không đầy đủ).

Một điều chú ý là khi đã biết $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ thì cũng phải nhận ra $a^2 + 2ab + b^2$ là $(a+b)^2$; tức là đi được từ trái sang phải thì cũng biết đi từ phải sang trái. Hơn nữa, phải biết $a$ và $b$ có thể bất cứ cái gì, lúc thì $x, y$, lúc thì $1, x$ vv. Do đó sau đây đều là $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \\ (1+x)^2 &= 1 + 2x + x^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (2x+3y)^2 &= 4x^2 + 12xy + 9y^2 \end{aligned} \tag{31.8}$$

Sau đây là các đẳng thức hay được sử dụng:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & \text{hiệu của bình phương:} & a^2 - b^2 & = (a-b)(a+b) \\ \text{(b)} & \text{hiệu của lập phương:} & a^3 - b^3 & = (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ \text{(c)} & \text{tổng của lập phương:} & a^3 + b^3 & = (a+b)(a^2-ab+b^2) \end{array} \tag{31.9}$$

Cái quan trọng không phải là thuộc lòng chúng một cách máy móc, mà là biết vận dụng chúng; tức là biết lúc nào thì dùng thằng nào, và nhìn vào một biểu thức phải thấy nó có dạng gì. Ví dụ, hãy đơn giản hóa biểu thức sau

$$A = (\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})$$

Có căn bậc hai và có tích, ta nghĩ ngay đến $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Với $a = \sqrt{5} + \sqrt{6}$ và $b = \sqrt{7}$, tích của hai nhân tử đầu tiên là

$$[(\sqrt{5} + \sqrt{6}) + \sqrt{7}][(\sqrt{5} + \sqrt{6}) - \sqrt{7}] = (\sqrt{5} + \sqrt{6})^2 - (\sqrt{7})^2 = 4 + 2\sqrt{30}$$

Tương tự, với $a = \sqrt{7}$ và $b = \sqrt{5} - \sqrt{6}$, tích của hai nhân tử cuối là

$$[\sqrt{7} + (\sqrt{5} - \sqrt{6})][\sqrt{7} - (\sqrt{5} - \sqrt{6})] = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{6})^2 = -4 + 2\sqrt{30}$$

Do đó,

$$A = (4 + 2\sqrt{30})(-4 + 2\sqrt{30}) = (2\sqrt{30})^2 - (4)^2 = 104$$

## 31.8 Toán học là một ngôn ngữ với các kí hiệu riêng

Cho đến thời điểm này, chúng ta đã sử dụng những gì được gọi là ký hiệu toán học để diễn đạt ý tưởng toán học. Đến lúc nên thảo luận về những ký hiệu này. Ký hiệu toán học bao gồm việc sử dụng các biểu tượng để biểu diễn các phép toán (chẳng hạn $+, -, \times, \sqrt{\square}, \sum, \ldots$), các con số xác định $(1, 2, 1324, 3.14)$, các số không xác định (ví dụ, $x, y$), các mối quan hệ $(=, >, <, \ldots)$, các toán tử logic ($\implies, \iff, \vee, \ldots$), và cho các mục đích khác, và ghép chúng thành các biểu thức và công thức.

Ngoài toán học, ký hiệu toán học còn được sử dụng rộng rãi trong khoa học và kỹ thuật để biểu diễn các khái niệm phức tạp và tính chất một cách ngắn gọn, rõ ràng và chính xác. Ví dụ, phương trình của Einstein $E = mc^2$ là biểu diễn trong ký hiệu toán học của tương đương khối lượng- năng lượng. Ký hiệu toán học được giới thiệu lần đầu bởi François Viète và được mở rộng mạnh mẽ trong thế kỷ 17 và 18 bởi René Descartes, Isaac Newton, Gottfried Leibniz và đặc biệt Leonhard Euler.

Thường thì các chữ cái được sử dụng để đặt tên cho các đối tượng toán học. Thông thường, bảng chữ cái La Mã và Hy Lạp được sử dụng, nhưng một số chữ cái của bảng chữ cái Hebrew đôi khi cũng được sử dụng. Chúng ta đã thấy $a, b, \alpha, \beta \ldots$ Rõ ràng là những bảng chữ cái này chưa đủ: để có thêm biểu tượng và để cho phép các đối tượng toán học có liên quan được biểu thị bằng các biểu tượng có liên quan, các dấu điểm (ví dụ $f'$), chữ số dưới chân (ví dụ $x_2$) và chữ số mũ trên đỉnh ($z^3$) thường được sử dụng. Đối với phương trình bậc hai, chúng ta có thể sử dụng $x$ và $y$ để ký hiệu hai nghiệm của nó. Nhưng đôi khi việc sử dụng $x_1$ và $x_2$ (cả hai đều là $x$ và chúng ta có thể nhận biết đâu là nghiệm thứ nhất và đâu là nghiệm thứ hai) là tốt hơn. Hơn nữa, khi chúng ta muốn nói về $n$ nghiệm của một đa thức bậc $n$, chúng ta phải sử dụng $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tại sao? Bởi vì thậm chí chúng ta không biết $n$ là gì.

Sử dụng các biểu tượng là cơ sở của ký hiệu toán học. Chúng đóng vai trò tương tự như từ ngữ trong ngôn ngữ tự nhiên. Chúng có thể đóng vai trò khác nhau trong ký hiệu toán học tương tự như động từ, tính từ và danh từ đóng vai trò khác nhau trong một câu. Khi ta thấy một biểu thức hay một công thức, ta phải biết cách đọc nó bằng ngôn ngữ tự nhiên, ví dụ:

$$\begin{aligned} &x + 2\sqrt{y} - x^3 = 10 && : x \text{ cộng 2 nhân căn bậc hai của } y \text{ trừ } x \text{ nhân } x \text{ nhân } x \text{ bằng 2} \\ &\bar{x} = \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i && : \bar{x} \text{ bằng tổng của } x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ chia cho } n \end{aligned} \tag{31.10}$$

Nếu công thức nào chưa hiểu thì tìm ví dụ cụ thể, ví dụ cho $n = 3$, thì công thức thứ hai trở thành

$$\bar{x} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

Với các công thức phức tạp thì chia nhỏ ra và tìm hiểu từng phần. Ví dụ sau là từ ngành thống kê học. Nếu chúng ta có $n$ mẫu và mỗi mẫu có hai đo lường $X$ và $Y$, do đó chúng ta có $X = (x_1, \ldots, x_n)$ và $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ (dĩ nhiên mấy chú $x_i, y_i$) là các số thực), thì sự tương quan mẫu giữa $X$ và $Y$ được định nghĩa như sau:

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \tag{31.11}$$

Ta đọc công thức này như thế nào? Nó định nghĩa một đại lượng gọi là sự tương quan mẫu giữa $X$ và $Y$ với cái kí hiệu rất oách $\mathrm{Cov}(X, Y)$, và nó bằng cái đống tùm lum ở bên vế phải của công thức trên. Để hiểu cái vế bên phải, trước hết từ $X = (x_1, \ldots, x_n)$ ta tính được trung bình $\bar{x}$–nó là một số thực, không có chi ghê gớm. Tương tự, ta có $\bar{y}$ từ $Y$. Sau đó, ta cho $n$ một giá trị cụ thể (ví như $n = 3$), thì công thức trên trở thành:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2}\left[(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + (x_3 - \bar{x})(y_3 - \bar{y})\right] \tag{31.12}$$

Cuối cùng thì cũng chỉ là cọng trừ nhân chia các số. Thử tưởng tượng $n = 200$ ($n = 10\,000$ là một chuyện bình thường ở huyện), thì cách viết như ở Eq. (31.12) thật là mỏi tay. Do đó, phải có một người nào đó nghĩ ra cái kí hiệu $\sum_{i=1}^{n}$. Phải như vậy! Rồi thì khi phải viết quá nhiều $\sum$, Einstein bực quá, bỏ nó luôn, và ông viết

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n-1}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \tag{31.13}$$

Và để cho mọi người hiểu ý mình, ông nói khi nào chỉ số $i$ mà lặp lại hai lần trong một biểu thức thì là có tổng. Cái này giờ gọi là quy tắc tổng của Einstein.

Bây giờ chúng ta sẽ bàn một tí về viết Toán như thế nào. Sau đây mình sẽ trình bày hai cách viết khi giải $x^2 - 5x + 6 = 0$:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ (x-2)(x-3) &= 0 \\ x &= 2, 3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} & x^2 - 5x + 6 && = 0 \\ \iff & (x-2)(x-3) && = 0 \\ \iff & x && = 2, 3 \end{aligned}$$

Theo bạn cách nào đúng? Vì toán học là một ngôn ngữ, nên mỗi phương trình đóng vai trò như một câu, và giữa các câu thì phải có sự kết nối. Vì lí do này, cách trình bày bên trái là sai. Nếu bạn vẫn bướng cho rằng thì hai cách viết đều cũng cho ra đúng nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$ là $x = 2, 3$, thì bạn sai rồi. Xem tác hại của cách viết cẩu thả nè: giải phương trình $\sqrt{x} + 2 = x$ (tức là tìm số thực $x$ thỏa mãn phương trình). Lại có hai cách trình bày:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + 2 &= x \\ \sqrt{x} &= x - 2 \\ x &= (x-2)^2 \\ x &= x^2 - 4x + 4 \\ 0 &= x^2 - 5x + 4 \\ x &= 1, 4 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} & \sqrt{x} + 2 && = x \\ \iff & \sqrt{x} && = x - 2 \\ \Longrightarrow & x && = (x-2)^2 \\ \iff & x && = x^2 - 4x + 4 \\ \iff & 0 && = x^2 - 5x + 4 \\ \iff & x && = 1, 4 \end{aligned}$$

Nếu giờ ta thay $x = 1$ vào $\sqrt{x} + 2 = x$ thì có $1 = 3$; do đó $x = 1$ không phải là nghiệm cần tìm. Nhưng sai sót ở đâu? Nếu ta làm như cách trình bày bên phải thì ta sẽ phát hiện ra có một bước mà ta không thể dùng $\iff$: mặc dù nếu $\sqrt{x} = x - 2$ thì có ngay $x = (x-2)^2$, chiều ngược lại không đúng. Vì sao? Vì $\sqrt{a^2} = |a|$ chứ không phải $\sqrt{a^2} = a$. Nếu không hiểu thì thử cho $a = -2$. Chuyện này giống như: mèo thì thích chuột, nhưng thích chuột thì không nhất định phải là mèo.

Kí hiệu $\iff$ là để chỉ sự tương đương của hai mệnh đề, do đó nếu không phải là mệnh đề thì không thể dùng kí hiệu này, ví dụ:

$$\begin{aligned} & x^2 - 5x + 6 \iff (x-2)(x-3) && \text{SAI} \\ & x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) && \text{ĐÚNG} \end{aligned}$$

## 31.9 Giải một bài toán như thế nào?

Sau đây là một số tài liệu viết về đề tài làm sao để giải một bài toán:

- *How to solve it* của George Pólya

- *Thinking mathematically* của J. Mason, L. Burton, K. Stacey (Mason et al., 1982)
- *The Art and Craft of Problem Solving* của Paul Zeit, (Zeitz, 2007)
- *Solving mathematical problems: a personal perspective* của Tarence Tao;

Các bạn nên tham khảo ít nhất là cuốn của Pólya và cuốn của Mason. Bạn nào nội công thâm hậu thì tham khảo cuốn của Paul Zeit và Tarence Tao. Dùng thuật ngữ trình bày trong cuốn *Thinking mathematically*, giải một bài toán có ba giai đoạn như sau:

1. Khởi động (hay làm quen)
2. Tấn công
3. Đánh giá

Thay vì đi vào giải thích lý thuyết nhàm chán, dưới đây mình sẽ đưa ra khoảng chục bài toán để minh họa các bước trong quá trình suy nghĩ tìm ra lời giải một bài toán. Vậy dựa trên tiêu chí nào mà mình chọn những ví dụ sau?

Trước hết các bạn phải phân biệt giữa bài tập và vấn đề (hay bài toán). Nói một cách đơn giản, *bài tập là các vấn đề hoặc câu hỏi mà bạn đã biết quy trình để giải quyết chúng* (ngay cả khi bạn có thể không hoàn thành vì chán hay vì bất cẩn). Ví dụ, một bài tập điển hình là sử dụng công thức $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ để giải nhiều phương trình bậc hai như $x^2-2x+1=0$ và $x^2+5x-10=0$. Mình nghĩ rằng bạn chỉ nên giải ba phương trình bậc hai: (i) $(x-1)(x-2)=0$ (hai nghiệm thực), (ii) $(x-1)(x-1)=0$ (hai nghiệm trùng nhau) và $x^2+1=0$ (không có nghiệm thực), sau đó vẽ đồ thị của chúng. Đó là tất cả. Giải thêm năm mươi phương trình bậc hai sẽ không mang lại niềm vui và điều hữu ích nào cho bạn. Có khi còn làm bạn ghét môn Toán.

Mặt khác, *vấn đề là các câu hỏi mà chúng ta không biết trước quy trình để giải quyết*. Bạn có thể tưởng tượng mình như Indiana Jones đang đi tìm kho báu ở đất nước Ả rập huyền bí; khác biệt là thay vì dùng súng và roi da, bạn dùng một cây viết! Có hai loại vấn đề toán học: một loại có lời giải và một loại chưa có lời giải (chính loại này là cuộc sống của các nhà Toán học và ta không bàn ở đây). Ở đây, chúng ta tập trung vào loại đầu tiên: các vấn đề có lời giải nhưng chúng ta vẫn chưa biết cách giải. Ví dụ, hãy giải phương trình bậc bốn sau đây:

$$x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0 \tag{31.14}$$

Làm thế nào chúng ta có thể giải quyết phương trình này? Không có công thức nào cho $x$. Sau nhiều lần thử nghiệm, Lagrange, sống cách nay khoảng 300 năm, đã tìm thấy rằng *chia phương trình này cho $x^2$* là hướng đi đúng:

$$x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0 \tag{31.15}$$

Nhận thấy $x+1/x$ và $x^2+1/x^2$ có một mối liên hệ, Lagrange thực hiện một sự thay đổi biến với $u=x+{}^1/_x$, từ đó ông có, không gì khác, mà chính là một phương trình bậc hai quen thuộc:

$$u^2-3u+2=0 \iff u=1, \quad u=2 \tag{31.16}$$

Nếu chỉ cho phép các nghiệm thực, thì với $u=2$, chúng ta có $x+1/x=2$, điều này dẫn đến $x=1$. Việc phương trình này có nghiệm $x=1$ không quá quan trọng đối với các nhà toán học (nghiệm hoàn toàn có thể là một con số xấu xí như $x=1.23$). Điều quan trọng là *chia phương trình này cho $x^2$* là cách giải.

**Ví dụ 1.** Giờ chúng ta sẽ giải một bài toán rất thực tế để minh họa cho ba giai đoạn giải một bài toán. Bài toán như sau: Trong một shop hàng, bạn được hưởng chiết khấu (giảm giá) 20% nhưng bạn phải trả thuế bán hàng 15%. Bạn muốn tính chiết khấu trước hay thuế trước?

Chúng ta bắt đầu với bước làm quen. Không gì hay bằng đọc bài toán thật kỹ (có khi đọc to ra) *xem bài toán có những gì biết, và những gì chưa biết, bài toán liên quan tới nhánh nào của toán học (đại số? hình học? giải tích?)* ... Để trả lời câu hỏi 'tính chiết khấu trước hay thuế trước' rõ ràng ta phải tính giá cho hai trường hợp: (1) chiết khấu trước và (2) thuế trước, sau đó tùy vào hai giá này mà đưa ra lựa chọn (tất nhiên là chọn giá thấp hơn). Mà để tính giá thì ta phải có một con số cụ thể. Do đó, chúng ta sẽ giải sử giá là \$100[†].

Giờ thì chúng ta có thể chuyển qua giai đoạn hai: tấn công, tức là tính giá (dĩ nhiên là chúng ta phải biết chơi với khái niệm phần trăm thì mới giải được bài này). Ta bắt đầu với lựa chọn giảm giá trước-thuế sau:

$$\begin{array}{lll} \text{giảm giá:} & (20\%)\$100 & = \$20 \\ \text{giá thật:} & \$100 - \$20 & = \$80 \\ \text{thuế:} & (15\%)\$80 & = \$12 \\ \text{giá cuối:} & \$80 + \$12 & = \$92 \end{array} \tag{31.17}$$

Và cho lựa chọn thuế trước và giảm giá sau, ta có:

$$\begin{array}{lll} \text{thuế:} & (15\%)\$100 & = \$15 \\ \text{giá thật:} & \$100 + \$15 & = \$115 \\ \text{giảm giá:} & (20\%)\$115 & = \$23 \\ \text{giá cuối:} & \$115 - \$23 & = \$92 \end{array} \tag{31.18}$$

Hai lựa chọn đều cho ra con số \$92. Điều này có nghĩa là trình tự giảm giá/đánh thuế không quan trọng. Kết thúc bài toán ở đây được không? Dĩ nhiên không! Chắc gì kết luận này đúng cho giá khác (ví dụ \$123.23). Hơn nữa ta vẫn chưa hiểu vì sao ta có \$92 cho cả hai lựa chọn[††]. Muốn trả lời câu hỏi này, ta sẽ viết Eq. (31.17) lại như thế này. Giảm giá 20% cho \$100 có nghĩa là $(1-0.2)\times\$100$. Và thuế 15% cho $\$P$ nghĩa là $(1+0.15)\times\$P$. Do đó, Eqs. (31.17) and (31.18) sẽ được viết lại cô đọng như sau:

$$\begin{array}{ll} \text{lựa chọn 1:} & (1+0.15)\times[(1-0.20)\times\$100] = (1+0.15)\times(1-0.20)\times\$100 \\ \text{lựa chọn 2:} & (1-0.20)\times[(1+0.15)\times\$100] = (1-0.20)\times(1+0.15)\times\$100 \end{array} \tag{31.19}$$

Và lí do tại sao cả hai lựa chọn đều cho cùng một con số xuất hiện: vì $ab = ba$. Và nếu ta thay \$100 bằng $\$P$ (ám chỉ giá nào cũng được) thì Eq. (31.19) cho ta biết ngay, kết quả vẫn như cũ: hai lựa chọn đều cho cùng một giá.

Bài toán coi như đã giải xong, giờ ta chuyển qua giai đoạn 3: đánh giá. Thứ nhất, không chỉ 20% và 15%, mà cho bất cứ phần trăm nào, kết quả vẫn như cũ; nếu gọi phần trăm chiết khấu là $x$ và phần trăm thuế là $y$, ta có:

$$\begin{array}{ll} \text{lựa chọn 1:} & (1+y)\times(1-x)\times\$P \\ \text{lựa chọn 2:} & (1-x)\times(1+y)\times\$P \end{array} \tag{31.20}$$

Thứ hai, có rất nhiều bài học sau khi ta đã làm xong bài này (đây là một bước mà mình hiếm khi làm lúc còn là học sinh, đúng là một sai sót lớn, vì lẽ đó mình sẽ dành riêng Chương 36 để nói về nó):

- Dù Eqs. (31.17) and (31.19) cho cùng một kết quả, Eq. (31.19) rõ ràng có sức mạnh hơn. Như vậy, cùng một thứ mà cách diễn đạt khác nhau sẽ có hiệu quả khác nhau. Đó là lí do tại sao học sinh cấp 2 mất thời gian để chuyển (cùng những cái tương tự) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ thành $(x-2)(x-3)$; vì biểu thức sau cho ngay nghiệm của $f(x) = 0$ là 2 và 3.

- Khi ta chọn \$100 thì ta đã làm bước gọi là *cụ thể hóa*; bước này cho phép ta làm quen với bài toán, hiểu nó hơn, và có một kết quả cụ thể.

[†]Tại sao con số này? Vì nó đẹp, nhất là với phần trăm.
[††]Mục đích tối thượng không phải là giải xong bài này càng nhanh càng tốt, mà là tìm hiểu nó kỹ lưỡng.

- Khi ta thay con số cụ thể \$100 bằng \$P ta đã làm bước gọi là *tổng quát hóa*. Bước này rất quan trọng, vì rõ ràng việc chứng minh được, giá phải trả không phụ thuộc vào thứ tự chiết khấu và thuế và cho bất cứ giá nào là một kết quả quan trọng hơn so với trường hợp đơn lẻ \$100.

Ghi chú

Nếu bạn chưa hiểu tại sao khi giảm giá 20% cho một món hàng có giá trị \$100 thì giá là $(1-0.20)\times\$100$, thì chi tiết như sau:

$$\$100-(20\%)\$100=(1)\times\$100-(0.2)\times\$100=(1-0.2)\times\$100$$

ở bước cuối cùng ta xài luật $a(b+c)=ab+ac$, với $a=\$100$, $b=1$ và $c=-0.2$.

**Ví dụ 2.** Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ biểu diễn một sắp xếp tùy ý của các số tự nhiên $1, 2, 3, \ldots, n$. Chứng minh rằng nếu $n$ là số lẻ, thì tích $(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\cdots(a_n-n)$ là một số chẵn. Bài này mình trích từ cuốn *The Art and Craft of Problem Solving* của Paul Zeit.

Giờ ta làm quen bài toán nhé:

- Ta có $n$ số tự nhiên đầu tiên $1, 2, 3, \ldots, n$, với $n$ không xác định, nó có thể là 1 hay 2 hay 1 triệu.

- Từ các số tự nhiên đó ta có thể tạo thành các sắp xếp $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Điều này có nghĩa là gì? Tưởng tượng ta đang chơi với 3 con số $1, 2, 3$ (tức là ta cụ thể hóa cho $n=3$) làm bằng gỗ, ta có thể xếp chúng nhiều cách như sau: $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$ ... Ta gọi $(1,3,2)$ là một sắp xếp của ba số $1, 2, 3$.

- Bài toán liên quan tới tích $P=(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\cdots(a_n-n)$ khi $n$ là một số lẻ. Ví dụ, với $n=3$, nếu $(a_1,a_2,a_3)$ là $(2,3,1)$ thì tích $P$ sẽ là $P=(2-1)(3-2)(1-3)=-2$: số chẵn. Nếu $(a_1,a_2,a_3)$ là $(2,1,3)$ thì tích $P$ sẽ là $P=(2-1)(1-2)(3-3)=0$: cũng số chẵn. Bây giờ, ta có niềm tin rằng với mọi sắp xếp $(a_1,a_2,a_3)$, tích $P$ luôn là số chẵn. Dù vậy, làm sao chứng minh điều này lại là một chuyện khác.

Ta chuyển sang bước hai: tấn công bài toán:

- Bài toán muốn ta chứng minh tích $P$ là một số chẵn, mà tích $P$ là tích của $n$ số nguyên. Nhưng ta nào biết là tích của những số nào vì ta không biết $a_1, a_2, \ldots$ là gì. Không sao. Thay vì đi tìm hiểu $P$ (mà ta chưa rành), ta đi thử xem tích của hai số lẻ là số chẵn hay lẻ[††]: $1\times3=3$ (lẻ), $9\times7=63$ (lẻ), $5\times9=45$ (lẻ). Như vậy, ta đoán rằng tích của hai số lẻ là một số lẻ. Và ta sẽ kiểm chứng điều này như sau: gọi $2n+1$, và $2m+1$ là hai số lẻ bất kỳ, tích của chúng là:

$$(2n+1)(2m+1)=4nm+2n+2m+1=2\underbrace{(2nm+n+m)}_{p}+1=2p+1$$

 là một số lẻ. Kết quả này lại cho ta kết quả khác: tích của ba số lẻ bất kỳ là một số lẻ:

$$\underbrace{\text{odd}\times\text{odd}}_{\text{odd}}\times\text{odd}=\text{odd}$$

 Và do đó, tích của các số lẻ (bao nhiêu số cũng được) là một số lẻ.

- Với khám phá này, việc chứng minh tích $P$ là một số chẵn trở thành chứng minh trong các số $a_1-1, a_2-2, \ldots, a_n-n$ phải có một số chẵn! Chưa chắc chứng minh điều này dễ hơn việc chứng minh trực tiếp $P$ chẵn, nhưng mà ít nhất ta có một tia hi vọng, và phải bám theo nó thôi.

[††]Tích của hai số chẵn chắc chắn là số chẵn nên ta không phải xét nó.

- Làm sao chứng minh trong các số $a_1 - 1, a_2 - 2, \ldots, a_n - n$ phải có một số chẵn? Số nào mới được chứ? Ta có thể tránh rắc rối này bằng cách dùng chứng minh phản chứng. Ta sẽ giả sử $a_1 - 1, a_2 - 2, \ldots, a_n - n$ toàn là số lẻ, và từ nó suy ra một điều vô lý. Do đó, phải có ít nhất 1 số chẵn (và ta không quan tâm là chú nào). Trước hết ta chọn $n = 5$ cho dễ: nếu chúng ta giả sử rằng tất cả các số $a_1 - 1, a_2 - 2, a_3 - 3, a_4 - 4, a_5 - 5$ là số lẻ, chúng ta suy ra $a_1$ là số chẵn, $a_2$ là số lẻ, $a_3$ là số chẵn, $a_4$ là số lẻ và $a_5$ là số chẵn. Tức là, có ba số chẵn và hai số lẻ. Nhưng trong $1, 2, 3, 4, 5$ chỉ có hai số chẵn và ba số lẻ! Chúng ta có một sự mâu thuẫn, do đó giả thuyết của chúng ta là sai. Chúng ta đã giải xong bài toán, ít nhất là cho $n = 5$. Nhưng mà dễ thấy, dù $n$ có là 1 tỷ thì lập luận cũng như vậy.

- Trong $1, 2, \ldots, n$ với $n$ lẻ có nhiều số lẻ hơn số chẵn. Giả sử $a_1 - 1, a_2 - 2, \ldots, a_n - n$ toàn là số lẻ, do đó $a_1$ là số chẵn, $a_2$ là số lẻ, và cứ thế cho tới $a_n$ là số chẵn, tức là có nhiều số chẵn hơn số lẻ. Mâu thuẫn xảy ra! Chấm hết.

Cuối cùng, ta chuyển qua bước 3: đánh giá.

- Chúng ta lại xài chiêu cụ thể hóa để làm cho bài toán nhẹ nhàng hơn, trước khi xét trường hợp tổng quát;

- Chúng ta sử dụng mẹo biến đổi bài toán: thay vì chứng minh $P$ là số chẵn, ta đi chứng minh trong các số $a_1 - 1, a_2 - 2, \ldots, a_n - n$ phải có một số chẵn.

- Chúng ta dùng phương pháp phản chứng để chứng minh trong các số $a_1 - 1, a_2 - 2, \ldots, a_n - n$ phải có một số chẵn. Vì sao? Vì ta nào biết ai trong số tụi này là số chẵn. Thay vào đó ta giả sử tất cả đều số lẻ, một chuyện dễ hơn nhiều.

**Ví dụ 3.** Giờ thì mình trình bày một bài quen thuộc trong chương trình toán cấp 2/3: giải hệ phương trình sau đây:

$$\begin{aligned} x^3 + 9x^2y &= 10 \\ y^3 + xy^2 &= 2 \end{aligned} \tag{31.21}$$

Bước làm quen:

- Liệu chúng ta có thể xài chiêu quen thuộc là loại bỏ một biến số không? Có thể, nhưng chắc chắn là bạn không dám đi theo con đường đó. Hãy thử (ví dụ $y = (10 - x^3)/(9x^2)$ và thay nó vào phương trình thứ 2) và bạn sẽ thấy tại sao. *Phải có một cách tốt hơn*. Tại sao? Bởi vì đây là một bài tập toán! Học sinh trung học nên nhớ điều này: gần như tất cả các câu hỏi trong một bài kiểm tra/đề thi đều có lời giải và thường không khó và tốn thời gian (vì thời gian kiểm tra là hữu hạn!). Hơn nữa, nếu có một câu hỏi khó, thì điểm số của nó thường thấp. Vì vậy, *bạn không cần phải dành hết thời gian để học để đạt điểm A. Hãy sử dụng thời gian đó để khám phá thế giới.*

- Giờ thì hãy nhìn trừng trừng vào Eq. (31.21) để xem nó có gì đặc biệt. Nó có $x^3$, $y^3$ (đều là bậc 3), rồi có $x^2y$ và $xy^2$ (cũng là bậc 3). Đây là một nhận xét tốt, và nó chính là chìa khóa dẫn đến lời giải!

- Vì tất cả các số hạng đều bậc 3, ta nghĩ ngay tới chú bạn $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Bước hai: tấn công. Ta xem xét $(x + 3y)^3$. Tại sao lại chọn chú này? Vì khi mở rộng nó, chúng ta sẽ có các thành phần xuất hiện trong hai phương trình:

$$\begin{aligned} (x + 3y)^3 &= x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3 \\ &= x^3 + 9x^2y + 27(xy^2 + y^3) \\ &= 10 + 27 \times 2 = 64 \end{aligned}$$

Bây giờ, chúng ta có $x + 3y = 4$ hoặc $x = 4 - 3y$. Tất nhiên, chúng ta giờ thay thế $x$ trong phương trình thứ hai của Eq. (31.21) để có được một phương trình theo $y$:

$$y^3 + (4 - 3y)y^2 = 2 \Longleftrightarrow y^3 - 2y^2 + 1 = 0 \tag{31.22}$$

Nhận ra $y = 1$ là một nghiệm của phương trình trên, chúng ta có thể phân tích vế trái của nó và viết[†]

$$(y-1)(y^2 - y - 1) = 0 \Longleftrightarrow y = 1 \ \ (x = 1), \ \ y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \ \ (x = \frac{5 \mp 3\sqrt{5}}{2})$$

Cuối cùng, ta chuyển qua bước 3: đánh giá. Lời giải này sẽ cho bạn điểm 10 tròn trịa nhưng bạn sẽ làm sao nếu mình thay phương trình thứ hai bằng $y^3 + 5xy^2 = 2$? Cách xét $(x + 3y)^3$ sẽ không dùng được nữa, do đó cách đó không tổng quát. Chúng ta cần một giải pháp khác hoạt động với bất kỳ hệ số nào. Đó mới là toán học.

Ta xét $y = kx$, tức là ta khử $y$ và đưa vào $k$. Các bạn sẽ thấy sự lợi hại của việc này. Thay $y = kx$ vào Eq. (31.21), chúng ta có hệ phương trình mới sau đây:

$$\begin{aligned} x^3 + 9x^2y = 10 &\Longrightarrow x^3(1 + 9k) = 10 \\ y^3 + xy^2 = 02 &\Longrightarrow x^3(k^3 + k^2) = 2 \end{aligned}$$

Không như mối quan hệ $x, y$, với $x, k$ ta có thể tách chúng ra: $x^3(1 + 9k)$, và nhờ đó thật dễ dàng bây giờ để loại $x$. Như thế nào? Bằng cách chia[††] phương trình đầu tiên cho phương trình thứ hai, chúng ta thu được phương trình bậc ba sau đây cho $k$:

$$1 + 9k = 5(k^3 + k^2) \Longleftrightarrow 5k^3 + 5k^2 - 9k - 1 = 0 \Longleftrightarrow (k-1)(5k^2 + 10k + 1) = 0$$

với các giải pháp $k = 1$ (kết quả là $x = y = 1$) và $k = -1 \pm {}^{2\sqrt{5}}/_{5}$. Có được giá trị $k$, chúng ta có thể giải cho $x$ như sau

$$x^3 = \frac{10}{1 + 9k} = \frac{25}{-20 \pm 9\sqrt{5}} \Longrightarrow x^3 = 5(9\sqrt{5} + 20), \quad x^3 = -5(9\sqrt{5} - 20)$$

**Ví dụ 4.** Giải phương trình lượng giác sau:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$$

(Tức là tìm $x$ thỏa mãn phương trình trên.) Trong bước làm quen thì ta phải nghĩ tới 2 công thức (đẳng thức lượng giác) sau:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

vì trong phương trình ta có $\cos^2 \square$, và công thức của $\cos\alpha + \cos\beta$ cho phép ta gộp nhân tử chung. Hơn nữa các bạn phải làm quen với 1 phương pháp giải phương trình rất hiệu quả: giải $f(x) = 0$ bằng cách biến nó thành $g(x)h(x) = 0$. Tại sao làm vậy? Vì nếu tích của hai số bằng 0 thì một trong hai số phải bằng 0: $g(x) = 0$ hay $h(x) = 0$. Ví dụ, giải $x^2 - 5x + 6 = 0$ không dùng công thức, ta biến nó thành $(x-2)(x-3) = 0$, và do đó ta chỉ cần giải 2 phương trình siêu đơn giản: $x - 2 = 0$ và $x - 3 = 0$.

Giờ ta quan sát phương trình, thấy có số 1 bên vế phải, trong khi đó ta có thể làm 1 xuất hiện ở vế trái, với

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

[†]Bài tập này không phải là về việc giải phương trình bậc ba, vì vậy việc đoán một nghiệm đặc biệt là kỹ thuật tốt nhất ở đây. Cho phương trình $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, nếu nó có nghiệm $x = {}^{p}/_{q}$, thì $p|a_0$ và $q|a_n$. Nhà toán học viết "3|6" để diễn đạt rằng 3 là ước của 6 hay 6 chia hết cho 3.

[††]Vì chia một số khác 0 cho 0 là một điều cấm kị trong toán học, trước khi làm phép chia ta phải hết sức cẩn thận; ở đây $x, y \neq 0$ suy ra $k \neq 0$, nên chia thỏa mái vì $x^3(k^3 + k^2) \neq 0$.

Như vậy, ta có thể khử 1 và đó là một điều tốt vì ta sẽ biến phương trình thành dạng $\ldots = 0$:

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \cos^2 3x = 1 \iff \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) + \cos^2 3x = 0$$

Giờ ta xài chiêu $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\square\cos\square$ cho $\cos 2x + \cos 4x$ vì ta thấy $2, 4$ sẽ cho ra $3, 1$ và ta có $\cos^2 3x$. Cụ thể,

$$\cos x \cos 3x + \cos^2 3x = 0$$

Và ta sẽ viết lại thành

$$\cos 3x(\cos x + \cos 3x) = 0$$

Cuối cùng ta lại xử chiêu $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\square\cos\square$:

$$\cos 3x(2\cos 2x\cos x) = 0 \iff \cos x\cos 2x\cos 3x = 0 \iff \cos x = 0, \quad \cos 2x = 0, \quad \cos 3x = 0$$

Phần còn lại thì không có gì để nói, đúng không nào? Bước đánh giá:

- sao lại biến đổi 2 số hạng đầu? Ta có thể biến đổi hai số hạng cuối không (tức là $\cos^2 2x$ và $\cos^2 3x$)? Nếu bạn thử thì thấy làm như vậy cũng ok. Lí do: ba số hạng này bình đẳng (đối xứng) trong phương trình, nên biến đổi hai chú nào cũng được.

- Khi làm toán phải đặc biệt chú ý tới các thông tin, và hỏi: giữa chúng có mối liên hệ gì. Ở bài này ta có $1x, 2x, 3x$, và sau khi biến đổi ta có $2x, 4x, 3x$, sau đó, $2x, 4x$ hợp tác sẽ cho ra $3x$. Đó là mối quan hệ chằng chịt giữa chúng, và nhờ phát hiện ra mà ta giải được.

- nếu phương trình biến thành: $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 2$ thì làm sao? Thì cách mới trình bày tiêu tùng chứ làm sao. Vậy có cách nào không? Dĩ nhiên có: ta biến phương trình đã cho thành một phương trình bậc ba $at^3 + bt^2 + ct + d = 0$ với $t = \cos 2x$ (do đó $|t| \le 1$). Chi tiết dành cho bạn với một gợi ý, ta phải dùng thêm một chiêu nữa: $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

- Việc giải được phương trình lượng giác hay không phụ thuộc hoàn toàn vào việc bạn có quen biết các đẳng thức lượng giác hay không. Bạn có thể tự mình phát triển các đẳng thức này, hoặc bạn có thể học thuộc lòng chúng. Tuy nhiên, mình tin rằng cách tốt nhất là bài thi/kiểm tra về lượng giác nên cung cấp tất cả các đẳng thức lượng giác, chuyện này như bên Hóa thì cho ta cầm theo bảng tuần hoàn các nguyên tố vậy. Ép học sinh nhớ chúng làm gì?

- Cuối cùng, đây là một câu trong đề thi IMO 1962.

**Ví dụ 5.** Một hôm có một bạn trẻ đưa cho mình đề cuộc thi AMC 12 2021 (American Math Context), và trong đó có bài sau: tính $P$ với $P$ như sau

$$P = \left(\sum_{k=1}^{20} \log_{5^k} 3^{k^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{100} \log_{9^k} 25^k\right)$$

Không lẽ đã 'viết' cả một cuốn sách Toán mà giải không được thì 'xấu hổ' lắm. Thế là mình ngồi giải nó, và bó tay! Dù biết rằng trên trang Art of Problem Solving có lời giải, mình đã kháng cự không xem lời giải. Đã hơn ba tháng trôi qua, thỉnh thoảng mình quay lại với em $P$ này (Phính và P, cũng hay ghê), nhưng em tuyệt đối không chịu tiết lộ tuổi của em. Em nói "Nói ra anh sẽ bỏ em qua với em khác!"

Hôm ni, nhân lúc giải bài ví dụ 4, và mình đã ghi trong *Cửu Âm chân kinh* những dòng sau: Khi làm toán phải đặc biệt chú ý tới các thông tin, và hỏi: giữa chúng có mối liên hệ gì. Và chính cái dòng 'giữa chúng có mối liên hệ gì' đã cho mình ý tưởng và mình đã giải được $P$. Wow, lâu rồi mới thấy sướng. Thì ra em P thật thà, em này đã sống 21 thiên niên kỷ rồi.

Sau đây là quá trình suy nghĩ tìm ra lời giải bài này của mình.

Một suy nghĩ rất tự nhiên là $P$ là tích của hai số hạng, nên để tìm $P$ ta tìm mỗi số hạng rồi nhân chúng lại. Đó là một suy nghĩ rất tự nhiên:

$$P = AB, \quad A = \left(\sum_{k=1}^{20} \log_{5^k} 3^{k^2}\right), \quad B = \left(\sum_{k=1}^{100} \log_{9^k} 25^k\right)$$

Bây giờ ta sẽ tính $A$, và dĩ nhiên ta sẽ khai triển $A$ ra[†]:

$$A = \log_5 3 + \log_{25} 3^4 + \log_{125} 3^9 + \cdots + \log_{5^{20}} 3^{20^2}$$

Nhìn vào các số hạng của $A$ ta không thể không nghĩ tới công thức: $\log_a b^p = p \log_a b$. Và do đó, $A$ biến thành

$$A = \log_5 3 + 4\log_{25} 3 + 9\log_{125} 3 + \cdots + 20^2 \log_{5^{20}} 3 \tag{31.23}$$

Và đây là lúc mình 'bí'. Không biết làm sao để đi tiếp. Giờ ta sẽ hỏi câu hỏi: 'giữa các số hạng của $A$ có mối liên hệ gì không?' Ta đoán chắc là có vì $5, 25, 125, \ldots$ đều liên quan với 5. Để trả lời câu hỏi này, mình đã tính $(\log_5 3)/(\log_{25} 3)$ và dùng công thức $\log_a b = (\log_a x)/(\log_b x)$:

$$\frac{\log_5 3}{\log_{25} 3} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2\log_5 5 = 2$$

A, quả đúng là có một sự liên hệ giữa số hạng thứ hai của $A$ với số hạng thứ nhất,

$$\log_{25} 3 = \log_{5^2} 3 = \frac{1}{2}\log_5 3$$

Và tương tự, ta có ngay sự liên hệ giữa số hạng thứ ba của $A$ với số hạng thứ nhất,

$$\log_{125} 3 = \log_{5^3} 3 = \frac{1}{3}\log_5 3$$

Giờ thì ta đã thấy bí mật của $A$ và do đó $A$ có dạng:

$$A = \log_5 3 + \frac{4}{2}\log_5 3 + \frac{9}{3}\log_5 3 + \cdots + \frac{20^2}{20}\log_5 3$$

Giờ thì ta đã hiểu em $A$ qúa rồi, không còn gì làm khó được nữa[††]:

$$A = \log_5 3(1 + 2 + 3 + \cdots + 20) = \log_5 3 \times \frac{20 \times 21}{2} = 210\log_5 3$$

Và hoàn toàn tương tự, ta tính được $B$, kết quả như sau:

$$B = 100\log_9 25 = 200\log_9 5$$

Do đó, $P$ sẽ là

$$P = AB = (210\log_5 3)(200\log_9 5) = (210)(200)(\log_9 5\log_5 3) = (210)(200)(\log_9 3) = 21\,000$$

Sau đây là những bài học sau khi giải xong bài này:

- Để giải được bài này về logarit ta cần phải biết $\log_a b^p = p\log_a b$ và $\log_a b = (\log_a x)/(\log_b x)$. Điều này là hiển nhiên: giống như đi xe máy thì phải biết ga ở mô, phanh ở đâu;
- Đã hơn hai tháng, mình bí vì mình cứ ngồi nhìn trân trân 'em' Eq. (31.23) mà không hỏi han em. Lúc đó mình đã thử xem có mối liên hệ nào giữa $\log_5 3$ và $4\log_{25} 3$. Câu hỏi đúng phải là liên hệ của cặp $\log_5 3, \log_{25} 3$.

[†]Cho $k = 1$ có $\log_5 3$, cho $k = 2$ có $\log_{25} 3^4$, cứ thế cho tới $k = 20$, rồi cọng tất cả chúng lại. Nhưng không cần phải viết hết ra, vì thông thường chỉ vài số hạng là đủ cho ta thấy cái pattern.

[††]Mình đã dùng Eq. (31.2); đây là một công thức rất hữu ích trong toán.

- Bị bí lúc làm toán là chuyện bình thường, nó xảy ra với các nhà Toán học chuyên cũng như không chuyên, nó xảy ra với thầy/cô. Nó xảy ra với cả những nhà toán học hàng đầu thế giới. Nó là một phần của cuộc chơi.

Cuộc thi AMC 12 này có 25 câu hỏi và người thi chỉ có 75 phút. Vậy mà Phính cần ba tháng để giải cho câu logarit này! Đó là lí do Usain Bolt phải tập luyện thường xuyên: anh mỗi ngày chạy 100m, ngày này qua ngày khác, rồi đến khi thi đấu anh cũng chỉ chạy 100m. Tương tự, để tham gia IMO thì thành viên trong đội tuyển phải tập trung lại, và chạy 100m, ngày này qua ngày nọ. Đến khi thi không gặp bài chạy 100m thì cũng gặp bài chạy 150m.

**Ví dụ 6.** Một dãy số được định nghĩa bởi $D_0 = 0$, $D_1 = 0$, $D_2 = 1$, và $D_n = D_{n-1} + D_{n-3}$ cho $n \geq 3$. Hãy xác định tính chẵn lẻ của ba số $(D_{2021}, D_{2022}, D_{2023})$.

Bước làm quen:

- nếu bạn đã nghe qua Fibonacci thì bạn đã quen với dãy số, còn nếu không thì cũng không sao. Các số tự nhiên $1, 2, 3, \ldots$ là một dãy số với số đầu tiên là $D_0 = 1$, số thứ hai là $D_1 = 2$... Các nhà Toán học rất thích chơi với các dãy số mà trong đó các con số được định nghĩa bởi một công thức. Như vậy trong bài toán trên, ta có các con số: $0, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, \ldots$; trong đó ta đã phải tính $D_3 = D_2 + D_0 = 1 + 0 = 1$, $D_4 = D_3 + D_1 = 1 + 0 = 1$. Như vậy, ta chỉ cần viết ra tường minh vài con số đầu tiên của dãy, còn các con số khác ta dùng một công thức (như $D_n = D_{n-1} + D_{n-3}$).
- Trên lý thuyết ta có thể tính $D_{2021}, D_{2022}, D_{2023}$, và từ đó biết được tính chẵn lẻ của chúng.
- Tuy nhiên, làm cách đó thì có khi mất cả mấy tháng (thậm chí mấy năm), và rất nhàm chán (trừ khi bạn có thể dùng máy tính[‡]). Và vì vậy, phải có một cách khác, ngắn hơn, hay hơn, và vậy mới là Toán học. Mà muốn ngắn hơn thì chỉ có một cách duy nhất: có một quy luật về tính chẵn lẻ của các con số $D_0, D_1, \ldots$ này. Và nhiệm vụ của ta bây giờ là đi tìm ra cái quy luật đó.

Để tìm ra quy luật thì trước hết ta phải lân la, lại gần và chơi với dãy số[††], với tính chẵn lẻ của nó, có vậy thì cái quy luật mới xuất hiện. Do đó, ta lập Bảng 31.1. Bảng 31.1 này cho ta thấy

Bảng 31.1: Bảng cho dãy số $D_n$ với tính chẵn (E) và lẻ (O) cho mỗi số.

| $D_0$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | $D_6$ | $D_7$ | $D_8$ | $D_9$ | $D_{10}$ | $D_{11}$ | $D_{12}$ | $D_{13}$ | $D_{14}$ | $D_{15}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 13 | 19 | 28 | 41 | 60 | 88 |
| E | E | O | O | O | E | O | E | E | O | O | O | E | O | E | E |

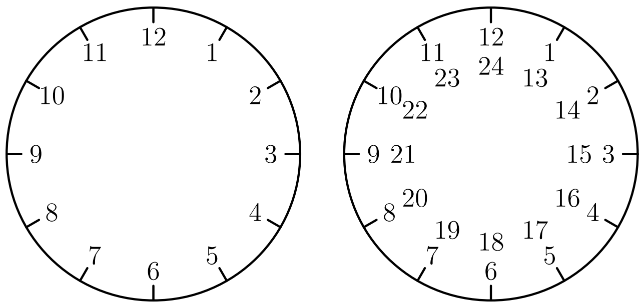
cái quy luật: ta có chu kỳ $E, E, O, O, O, E, O$. Tức là, không cần tính ta cũng biết $D_{16}, D_{17}, D_{18}$ toàn là số lẻ! Bài toán giờ trở thành bài này: hôm ni là thứ sáu, hỏi 100 ngày sau là ngày thứ mấy. Trả lời: 7 ngày sau cũng là thứ 6, 14 ngày sau cũng là thứ 6, 98 ($98 = 7 \times 14$) ngày sau cũng là thứ 6, và vì vậy, 100 ngày sau là chủ nhật. Quay lại bài dãy số, ta thấy $2023 = 289 \times 7$, tức là tính chẵn lẻ của $D_{2023}$ giống như của $D_7$ (hay của $D_{14}$), và nhìn lại bảng ta kết luận: tính chẵn lẻ của $(D_{2021}, D_{2022}, D_{2023})$ là E,O,E.

Chính khi giải những bài này mà Gauss đã phát triển cái giờ ta gọi là số học modular; ví như ta viết

$$13 \equiv 1 \pmod{12}, \quad 26 \equiv 2 \pmod{12}$$

Điều này có nghĩa là 13 và 1 là như nhau trong modulo 12; xem đồng hồ trên Hình 31.4 là bạn hiểu ngay.

[‡] $D_{2021}$ là một con số rất lớn, xem Chương 38 mà ở đó mình trình bày một chương trình máy tính để tính nó.
[††] Các đối tượng toán học luôn nói yes với bạn. Con người, nhiều khi, rất khó để tiếp cận và làm quen.




Hình 31.4: Thời gian bằng cách sử dụng đồng hồ. Hãy tưởng tượng rằng thời gian buổi chiều được đặt lên trên thời gian buổi sáng tương ứng của nó: 13 nằm bên cạnh 1, vì vậy 13 và 1 giống nhau hoặc *tương đồng* (trên đồng hồ).

**Ví dụ 7.** Trong ví dụ này ta sẽ giải một bài toán liên quan tới số phức; mục đích là minh họa một sự liên hệ giữa cái mà ta gọi là số thực và cái mà Descarates gọi là ảo. Bài toán là: Cho số phức $2+i$, và chúng ta ký hiệu $a_n$ và $b_n$ là phần thực và phần ảo của $(2+i)^n$, trong đó $n$ là một số nguyên không âm. Vấn đề là tính tổng sau đây:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n b_n}{7^n} = \frac{a_0 b_0}{7^0} + \frac{a_1 b_1}{7^1} + \cdots$$

Bước làm quen:

- Câu hỏi đầu tiên là: $a_n$ và $b_n$ là gì? Thì là phần thực và phần ảo của $(2+i)^n$, tức là ta có $(2+i)^n = a_n + ib_n$.
- Chú ý rằng $S$ có vô cùng tận các số $\frac{a_n b_n}{7^n}$ gộp lại, vậy thì $S$ phải là một số vô cùng lớn. Lời giải nên chăng là $\infty$?
- Suy nghĩ đầu tiên rất tự nhiên là hãy tìm $a_n$ và $b_n$ trước. Điều đó có vẻ là điều hợp lý để làm. $(2+i)^n$ liên quan tới lũy thừa của một số ảo ? Mà lũy thừa của một số ảo thì chỉ có thể là sử dụng công thức de Moirve[†]. Để làm được điều này, chúng ta cần chuyển số của chúng ta $2+i$ sang dạng cực:

$$2+i = \sqrt{5}(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \tag{31.25}$$

  Sau đó, ta có thể xác định $(2+i)^n$ và từ đó $a_n$, $b_n$ sẽ hiện ra:

$$(2+i)^n = (\sqrt{5})^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \Longrightarrow a_n = (\sqrt{5})^n \cos n\theta,\ \ b_n = (\sqrt{5})^n \sin n\theta$$

- Bây giờ tổng $S$ được xác định một cách rõ ràng bởi:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{5})^n \cos n\theta (\sqrt{5})^n \sin n\theta}{7^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n \sin 2n\theta$$

  Nhiệm vụ ta bây giờ là tấn công em $S$ này.

Bây giờ đến phần thú vị: *chúng ta rời bỏ thế giới thực và di chuyển vào thế giới ảo* bằng cách thay thế $\sin 2n\theta$ bằng phần ảo của $e^{i2n\theta}$, và vì thế $S$ trở thành:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n \mathrm{Im}\, e^{i2n\theta} \tag{31.26}$$

[†]Công thức de Moirve:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) \tag{31.24}$$

Vì tổng của các phần ảo bằng phần ảo của tổng, (Nếu không rõ, một ví dụ sẽ rất hữu ích: $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$. Do đó, tổng của các phần ảo $(b_1 + b_2)$ bằng phần ảo của tổng.), chúng ta viết $S$ như sau:

$$S = \frac{1}{2}\text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n (e^{i2\theta})^n$$

Số hạng màu đỏ là gì? Đó là một dãy hình học, với dạng $1, a, a^2, \dots$ với $a = (5/7)e^{i2\theta}$, và chúng ta biết tổng của nó là $1/(1-a)$:

$$S = \frac{1}{2}\text{Im} \frac{1}{1 - \frac{5}{7}e^{i2\theta}}$$

Chúng ta biết $e^{i\theta}$, do đó chúng ta biết bình phương của nó là $e^{i2\theta}$, do đó biểu thức ở trên đơn giản chỉ là $7/16$. Chi tiết như sau. Đầu tiên, chúng ta tìm phần ảo của $\frac{1}{1-\frac{5}{7}e^{i2\theta}}$ bằng cách:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 - \frac{5}{7}e^{i2\theta}} &= \frac{7}{7 - 5(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} && (e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha) \\
&= \frac{7[7 - 5\cos 2\theta + i5\sin 2\theta)]}{(7 - 5\cos 2\theta)^2 + (5\sin 2\theta)^2} && (\text{loại bỏ } i \text{ ở mẫu số})
\end{aligned}$$

Sau đó, phần ảo được xác định bởi:

$$\text{Im} \frac{1}{1 - \frac{5}{7}e^{i2\theta}} = \frac{35\sin 2\theta}{74 - 70\cos 2\theta}$$

Do đó, $S$ được đơn giản hóa thành (chú ý $\theta$ xác định ở Eq. (31.25)):

$$S = \frac{1}{2}\frac{35\sin 2\theta}{74 - 70\cos 2\theta} = \dots = \frac{7}{16} = 0.4375$$

Đã giải xong bài toán, giờ ta chuyển qua bước đánh giá:

- Bước đột phá trong giải bài này là lúc *chúng ta rời bỏ thế giới thực và di chuyển vào thế giới ảo* bằng cách thay thế $\sin 2n\theta$ bằng phần ảo của $e^{i2n\theta}$. Tại sao biết mà làm vậy? Cái này là do số hạng $(^5/_7)^n \sin 2n\theta$: một đứa là lũy thừa, một đứa là sin; chúng không thích sống chung với nhau, nên ta biến thằng sin thành lũy thừa;

- Có cách nào hay hơn không? Cái chúng ta cần là tích $a_n b_n$, chứ không nhất thiết là phải quen biết từng đứa $a_n$ và $b_n$. Mà ta biết $(2+i)^n = a_n + ib_n$. Làm sao $a_n b_n$ xuất hiện từ phương trình này? Bình phương 2 vế:

  $$(2+i)^{2n} = a_n^2 + 2i a_n b_n - b_n^2 \implies a_n b_n = \frac{1}{2}\text{Im}(2+i)^{2n}$$

  Mà $(2+i)^{2n}$ thì là,

  $$(2+i)^{2n} = 5^n(\cos 2n\theta + i\sin 2n\theta) = 5^n e^{i2n\theta}$$

  Do đó,

  $$a_n b_n = \frac{1}{2}\text{Im}(5^n e^{i2n\theta})$$

  Với cách giải này, số phức xuất hiện một cách tự nhiên, và ta không cần phải biết $a_n$ và $b_n$. Không phải rất tuyệt sao?

- Mà tại sao tổng của vô cùng các số hạng mà lại cho ra số nhỏ tí là $0.4375$?

Để hiểu nó, thì ta xét tổng sau:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \tag{31.27}$$

trong đó số hạng đầu tiên là 1/2, số hạng tiếp theo là $1/4 = (1/2)(1/2)$, số tiếp theo là $1/8 = (1/4)(1/2)$, ... Tức là số hạng $n$ bằng số hạng trước nó $n-1$ nhân với 1/2. $S$ là bao nhiêu? Dùng máy tính, gõ vài dòng lệnh ta có ngay Bảng 31.2: mới 20 số hạng đầu mà $S = 0.9999990463$, và hơn nữa mỗi khi ta thêm một số hạng vào $S$ nó tiến gần hơn tới 1. Không cần tí nào hiểu biết về Toán ta cũng thấy $S$ tiến đến 1. Làm sao diễn tả điều này? Thì này,

$$S = 1 \quad \text{khi } n \to \infty$$

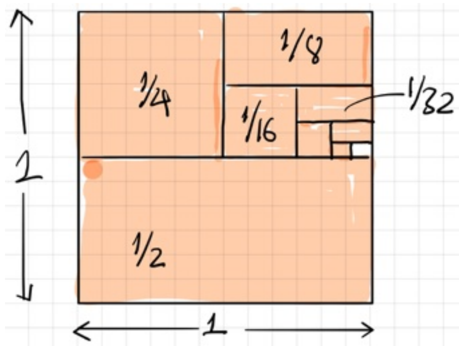
Quê mùa quá Phính, dân sành điệu phải viết vậy nè,

$$\lim_{n\to\infty} S = 1$$

Đó chỉ là kí hiệu, tuy quan trọng (để hiểu các nhà Toán học muốn nói gì), nó không quá quan trọng. Mà tại sao $S = 1$ khi $n$ rất rất lớn? Vẽ hình sẽ hiểu: xem Hình 31.5.

| $n$ | $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ |
|---|---|
| 1 | 0.5 |
| 2 | 0.75 |
| 3 | 0.875 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| 10 | 0.9990234375 |
| 20 | 0.9999990463 |

Bảng 31.2: $S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$.




Hình 31.5: Minh họa hình học của tổng $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$.

Mặc dù chúng ta có bằng chứng số học và hình học cho thấy tổng $S$ bằng một, chúng ta vẫn cần một chứng minh toán học. Chúng ta cần thực hiện một số thủ thuật đại số ở đây. Ý tưởng là: chúng ta không đi tới vô cùng (nó ở đâu?), vì vậy chúng ta *chỉ xem xét $n$ số hạng trong tổng*, sau đó chúng ta xem *diễn biến của tổng này khi chúng ta để $n$ tiến tới vô cùng*. Đó là lý do tại sao các nhà toán học giới thiệu *số hạng riêng lẻ* $S_n = \sum_{i=1}^{n} {}^1\!/_{2^i}$. Với biểu tượng này, họ bắt đầu thực hiện một số phép biến đổi đại số cho $S_n$ như bình thường (vì $n$ chỉ là một số hữu hạn) và $S_n$ sẽ tiết lộ bí mật của nó cho họ. Đầu tiên, họ nhân $S_n$ với 1/2 và đặt $S_n$ và $(1/2)S_n$ cùng nhau để thấy sự kết nối:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2}S_n &= \qquad\;\; \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Tiếp theo thì sao? Nhiều số hạng giống nhau trong $S_n$ và một nửa của nó, vì vậy tự nhiên là trừ chúng đi để loại bỏ các số hạng chung:

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \Longrightarrow \boxed{S_n = 1 - \frac{1}{2^n}}$$

Công thức này đúng không? Thay $n = 20$ vào, và ta có ngay $S_{20} = 0.9999990463$; trùng khớp với kết quả do máy tính cọng từng số cho, xin tham khảo lại Bảng 31.2. Bởi vì dãy số bao gồm vô hạn các số hạng, chúng ta nên xem xét trường hợp khi $n$ rất lớn, tức là $n \to \infty$. Đối với $n$ như vậy, số hạng $1/2^n$ – là nghịch đảo của một số lớn cực kỳ – phải là siêu nhỏ, và do đó $S_n$ tiến tới một, có nghĩa là $S$ cũng tiến tới một.

Không có gì đặc biệt về $1/2, 1/4, \ldots$ trong dãy số. Do đó, chúng ta giờ xét dãy số hình học sau đây, với số hạng đầu tiên là $a$ và tỷ số $r$:

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

Làm tương tự, ta có

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}(1-r^n) \tag{31.28}$$

Và trong trường hợp $r < 1$, khi $n \to \infty$, ta có

$$\boxed{a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}} \tag{31.29}$$

Dãy hình học có rất nhiều ứng dụng trong toán học. Sau đây là một ví dụ. Chúng ta có thể sử dụng dãy hình học để chứng minh rằng một số thập phân lặp lại (có cái tên kêu là số thập phân vô hạn tuần hoàn) là một số hữu tỷ. Ví dụ cho số $0.222\ldots$, ta có thể dùng Eq. (31.29) để biến nó thành một số hữu tỷ†:

$$\begin{aligned}
0.22222222\ldots &= 0.2 + 0.02 + 0.002 + \cdots \\
&= \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \cdots && (a = 2/10, r = 1/10 < 1) \\
&= \frac{2}{10}\Big/\frac{9}{10} = \frac{2}{9} && (\text{sử dụng Eq. (31.29)})
\end{aligned}$$

Và tương tự, chúng ta có điều này

$$0.99999\ldots = 0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots = \frac{9}{10}\Big/\frac{9}{10} = 1 \tag{31.30}$$

Gì thế này? Sao $0.99999\ldots$ lại là 1? Bạn có thể gọi tên một số lớn hơn $0.999\ldots$ và nhỏ hơn 1 không? Nếu không, hai số này là giống nhau.

Ghi chú

Trong ví dụ 7, mình đã xài tới công thức Euler:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \tag{31.31}$$

Đây là công thức yêu thích của Roger Penrose (sinh 1931), nhà Toán học và vật lý người Anh. Tại sao? Vì công thức này cho ta thấy sự liên hệ (không ngờ) giữa các hàm lượng giác (mà dính tới các tam giác) và hàm mũ. Đó là vẻ đẹp, còn nó có ích gì? Có chứ, nó cho phép ta, thay vì làm việc với mấy chú lượng giác khó chịu, thì làm với cô nàng hàm mũ dễ thương: đạo hàm của $e^x$ cũng chính là $e^x$. Nó chính là hàm duy nhất mà đạo hàm bằng chính nó.

**Ví dụ 8.** Một hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng là các số nguyên dương (đơn vị tính là cm) có diện tích là $A$ (đơn vị tính là cm$^2$) và chu vi là $P$ (đơn vị tính là cm). Câu hỏi là liệu $A+P$ có thể bằng 102 không? Để giải quyết vấn đề này, hãy đặt $a$ và $b$ lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật, trong đó $a$ và $b$ là các số nguyên dương. Do đó, $A = ab$, $P = 2(a+b)$, và $A + P = ab + 2(a+b)$. Vì thế câu hỏi liệu $A + P$ có thể bằng 102 không tương đương với liệu phương trình

$$ab + 2(a+b) = 102 \tag{31.32}$$

có nghiệm nguyên dương hay không.

†Có bạn sẽ không đồng ý với mình, vì bạn sẽ làm thế này. Đặt $x = 0.222\ldots$, vậy ta có $10x = 2.222\ldots$, do đó $9x = 2$.

Làm sao giải Eq. (31.32) vốn là một phương trình nhưng lại có tới hai ẩn số? Không lẽ ta phải thử cho tất cả các giá trị có thể của $a$ $(1, 2, 3, \ldots)$ và $b$, và xem có cặp số nào thỏa mãn phương trình? Có một cách tốt hơn, và cái mẹo là biến Eq. (31.32) thành $f(a, b)g(a, b) = p$, trong đó $p$ là một số nguyên dương. Với dạng này, ta có thể dễ dàng đoán giá trị của $f(a, b)$ và $g(a, b)$. (Ví dụ nếu ta có $f(a, b)g(a, b) = 8$ thì chỉ có các khả năng sau $f = 1, g = 8$, $f = 2, g = 4$, ...) Giờ thì ta mát xa vế trái của Eq. (31.32) như sau:

$$ab + 2a + 2b = 102 \iff a(b + 2) + 2b + 4 - 4 = 102 \iff (a + 2)(b + 2) = 106 \qquad (31.33)$$

Vế trái là tích của hai số, vậy thì vế phải cũng nên là tích của hai số, do đó ta viết $106 = 53 \times 2$. Như vậy, phương trình trên trở thành:

$$(a + 2)(b + 2) = 53 \times 2 \qquad (31.34)$$

Nếu như bạn suy nghĩ thế này: phương trình trên phải tương đương với $a + 2 = 53$ và $b + 2 = 2$. Thế là $b = 0$, một điều vô lý. Câu trả lời cho bài toán là: $A + P$ không thể bằng 102. Bạn may mắn thôi. Bạn phải giải thích thế này: vì 53 là một số nguyên tố, nên chỉ có 1 cách viết $53 = 1 \times 53$ thôi. Nếu ta thay 102 bởi 104, thì ta có phương trình

$$(a + 2)(b + 2) = 108 = 54 \times 2 = (2 \times 27) \times 2 = 27 \times 4$$

Vậy thì phương trình trên có hai nghiệm là $a = 25, b = 2$.

Bước đánh giá:

- Đây là một bài liên quan tới việc giải phương trình nghiệm nguyên;

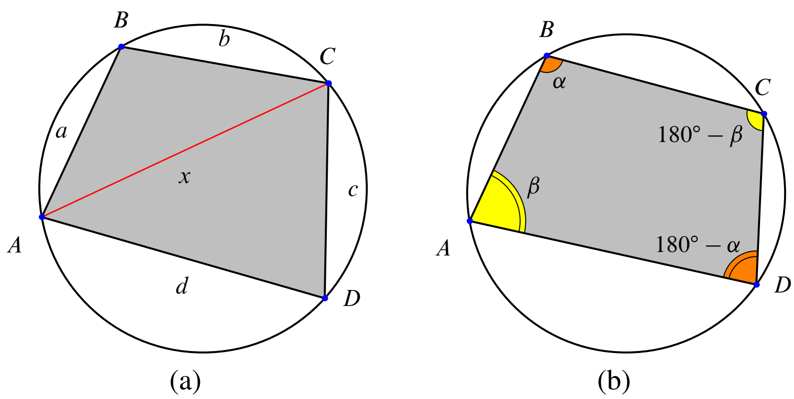
- Chỉ thêm 0 vào một biểu thức (thêm 4 rồi trừ 4) mà ta có thể biến $ab + 2a + 2b = 102$ thành $(a + 2)(b + 2) = 106$. Dù là tương đương, cái chú sau rất lợi hại. Tương tự, chúng ta có thể nhìn con số $3 - 2\sqrt{2}$ theo nhiều cách khác nhau. Ví dụ, bạn có thể xem nó là $0.17157$, hoàn toàn đúng, nhưng không toán tí nào. Một nhà toán học sẽ nhìn nó như thế này

$$3 - 2\sqrt{2} = (2 + 1) - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + 1^2 = (\sqrt{2} - 1)^2$$

  Nhờ có cái nhìn như vậy, việc tính $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ dễ như ăn kẹo:

$$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

**Ví dụ 9.** Xét tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong một hình tròn với độ dài các cạnh là $a, b, c, d$. Câu hỏi: tính đường chéo $x$ (Hình 31.6a).




Hình 31.6: Tứ giác nội tiếp: tính đường chéo (a) và hai góc đối diện cọng lại 180°, chứng minh ở phần 33.2.6.

Áp dụng định lý cosin cho hai tam giác $ABC$ và $ADC$, ta có

$$\cos B = \frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}, \quad \cos D = \frac{c^2+d^2-x^2}{2cd}$$

Nhưng góc $B$ và góc $D$ cọng lại bằng $\pi$ (Hình 31.6b, cần phải chứng minh, nhưng không bàn ở đây), cho nên $\cos B + \cos D = 0$, vậy ta có:

$$\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab} + \frac{c^2+d^2-x^2}{2cd} = 0$$

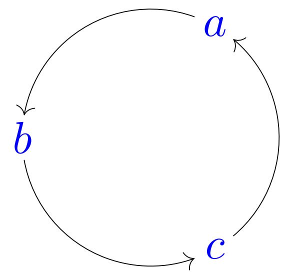
Giờ thì dùng đại số thôi:

$$x^2 = \frac{(a^2+b^2)cd + (c^2+d^2)ab}{ab+cd}$$

Dừng ở đây được chưa? Nếu dừng tại đây thì giống như đi tới quán bar mà phải dừng ở cửa vì chưa đủ tuổi, tiếc lắm thay. Hãy xem các nhà Toán học làm ảo thuật nè. Trong công thức tính $x^2$ ta có $ab+cd$. Cái gì đây? Ta có 4 số $a,b,c,d$, và nếu ta chọn hai cặp, một là $ab$ thì cặp còn lại phải là $cd$. Sau khi cọng chúng lại ta có $ab+cd$. Nhưng mà, ta có những cặp khác, chính xác là hai cặp nữa $(ac,bd)$ và $(ad,bc)$. Do đó, $x^2$ phải nên là:

$$\boxed{x^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$

Không tin? Xin mời kiểm tra: $(ac+bd)(ad+bc) \stackrel{?}{=} (a^2+b^2)cd + (c^2+d^2)ab$. Nhưng mà, làm sao giải thích được công thức này? Trước hết, mẫu số của $x^2$ là một đại lượng bậc 4, trong khi mẫu số là bậc hai, nên công thức này ok. Ngoài ra, ta xét trường hợp điểm $D$ trùng với $C$, khi đó $c=0$ và $x=d$. Thay $c=0$ vào công thức của $x^2$, quả thật ta thu được $x^2=d^2$. Ở đây ta có khái niệm *cyclic permutation* cho 3 số $a,b,c$: $a\mapsto b$, $b\mapsto c$, $c\mapsto a$ (xem hình bên). Ví dụ, trong biểu thức $a^2b+b^2c+c^2a$, ta bắt đầu với $a^2b$ và ta thu được số hạng tiếp theo bằng cách tuần hoàn qua $a,b,c$ như được hiển thị trong hình vẽ: $b^2c$, rồi sau đó từ $b^2c$ ta có $c^2a$. Giờ thì các nhà toán học viết $a^2b+b^2c+c^2a$ đơn giản $\sum_{\text{cyc}} a^2b$.




**Ví dụ 10.** Tìm kiếm sự an toàn tài chính là một vấn đề mà người lớn nào cũng quan tâm. Và quan trọng trong bất kỳ xem xét nào về tiền bạc là khái niệm về lãi suất. Việc tính phí cho việc mượn tiền đã tồn tại từ thời cổ đại. Ví dụ, một tấm bảng sét từ Mesopotamia, có niên đại khoảng 100 trước Công nguyên, đưa ra vấn đề sau: cần bao lâu để một số tiền ban đầu gấp đôi nếu đầu tư với lãi suất 20%, cộng dồn hàng năm?

Sau đây chúng ta sẽ xem Jacob Bernoulli nghiên cứu về lãi suất kép như thế nào. Bạn sẽ thấy các công cụ toán ông dùng không quá phức tạp.

Hãy tưởng tượng rằng bạn đã gửi \$1 000 vào tài khoản tiết kiệm tại một ngân hàng mà trả lãi suất cực kỳ hào phóng là 100 phần trăm, cộng dồn hàng năm. Một năm sau, tài khoản của bạn sẽ có giá trị là \$2 000 - số tiền gửi ban đầu \$1 000 cộng với 100 phần trăm lãi suất trên nó, tương đương với \$1 000 nữa. Sau năm thứ hai, bạn sẽ có \$2 000 + \$2 000. Đây chính là cách lãi kép hoạt động.

Nhưng liệu đó có phải là điều tốt nhất mà chúng ta có thể nhận được không? Nếu chúng ta nhận lãi suất hàng tháng thì sao? Tỷ lệ lãi suất bây giờ tất nhiên là $1/12$. Do đó, tiền của chúng ta trong ngân hàng sau tháng đầu và tháng thứ hai là:

$$\begin{aligned}
&\text{Tháng 1:} \quad 1000 + \frac{1}{12}\times 1000 = \left(1+\frac{1}{12}\right)\times 1000\\
&\text{Tháng 2:} \quad \left(1+\frac{1}{12}\right)\times 1000 + \left(\frac{1}{12}\right)\times\left(1+\frac{1}{12}\right)\times 1000 = \left(1+\frac{1}{12}\right)\times\left(1+\frac{1}{12}\right)\times 1000
\end{aligned}$$

Và bạn đã thấy cái quy luật cho công thức, do đó số tiền sau 12 tháng là:

$$\underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{12}\right)\times\left(1+\frac{1}{12}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{12}\right)\right]}_{\text{12 lần}}\times 1000 = \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}\times 1000 = \$2\,613{,}035\,29$$

Như vậy, lãi suất hàng tháng tốt hơn so với cộng dồn hàng năm. Hãy thử tham lam hơn và thử với cách tính lãi phân hàng ngày, hàng giờ và hàng phút. Đặt câu hỏi 'nếu như' và nghiên cứu các câu hỏi này là một thói quen tốt. Nó đã dẫn đến sự phát triển của toán học mới trong quá khứ!

Các tính toán tương ứng được cho trong Bảng 31.3. Mình đã dùng máy tính để tính các con số trong bảng này.

Bảng 31.3: Số tiền nhận được với việc tính lãi hàng năm, hàng tháng, hàng ngày, hàng giờ và hàng phút.

| | Công thức | Kết quả |
|---|---|---|
| hàng năm | $(1+1)\times 1000$ | 2000 |
| hàng tháng | $(1+1/12)^{12}\times 1000$ | 2613.035290224676 |
| hàng ngày | $(1+1/365)^{365}\times 1000$ | 2714.567482021973 |
| hàng giờ | $(1+1/(365\times 24))^{365\times 24}\times 1000$ | 2718.1266916179075 |
| hàng phút | $(1+1/(365\times 24\times 60))^{365\times 24\times 60}\times 1000$ | 2718.2792426663555 |

Từ bảng này, chúng ta có thể thấy số tiền tăng từ \$2 000 và ổn định ở \$2 718,279 242 6. Điều thú vị về lãi suất là càng thường xuyên lãi suất được cộng dồn, số tiền của bạn càng không tăng nhiều trong mỗi giai đoạn (so sánh $1+1$ so với $(1+1/12)$ chẳng hạn). Tuy nhiên, sau một năm, nó vẫn đạt được một giá trị đáng kể, vì nó được nhân qua nhiều giai đoạn. Những gì mình đã trình bày chính xác đã được Jacob Bernoulli thực hiện vào năm 1683. Nhưng làm thế nào ông tính $a=(1+1/(365\times 24\times 60))^{365\times 24\times 60}\times 1000$? Liệu ông có tính như thế này không

$$a=(1+0.0000019)^{525\,600}=\underbrace{1.0000019\times 1.0000019\times\cdots\times 1.0000019}_{525\,600\text{ lần}}$$

Không, dĩ nhiên là không! Vậy ông tính thế nào? Bạn có nhớ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ không? Ông dùng một món võ công phát triển từ cái đẳng thức bình thường đó: định lý nhị thức Eq. (39.13) trình bày ở phần 39.8. Định lý nhị thức cho phép ta khai triển $(a+b)^n$ cho bất cứ $n$ nào (ví dụ $n=897$) như sau

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n}a^0b^n \qquad (31.35)$$

Nếu nhìn vào Bảng 31.3 ta thấy số tiền luôn có dạng $(1+1/n)^n\times 1000$. Bây giờ ta tập trung vào $(1+1/n)^n$ và dùng Eq. (31.35) với $a=1$ and $b=1/n$:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}1\times\left(\frac{1}{n}\right)^k\\ &= 1+\frac{n!}{(n-1)!n}+\frac{n!}{2!(n-2)!n^2}+\frac{n!}{3!(n-3)!n^3}+\frac{n!}{4!(n-4)!n^4}\cdots\end{aligned}$$

Bây giờ chú ý rằng ta chỉ quan tâm cho trường hợp $n\to\infty$ thôi, do đó, ta mát xa biểu thức trên như sau:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}1\times\left(\frac{1}{n}\right)^k\\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{6}{n}+\frac{11}{n^2}-\frac{6}{n^3}\right)+\cdots\end{aligned}$$

Và như thế, khi $n$ rất rất lớn, tất cả các số hạng màu đỏ tiến dần về một vì các số liên quan đến $n$ tiến dần về không (ví dụ $1/n$ hay $3/n^2$ đều siêu nhỏ), ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots \tag{31.36}$$

Như vậy Jacob tính $a = (1+1/(365\times24\times60))^{365\times24\times60}$ xấp xỉ như sau:

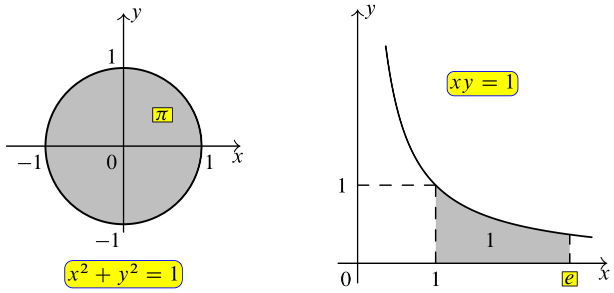
$$(1+1/(365\times24\times60))^{365\times24\times60} \approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!} = 2.718055555$$

Một tính toán tương đối đơn giản: chỉ nhân, chia và cộng. Nếu muốn độ chính xác cao hơn, ta chỉ việc thêm các số hạng tiếp theo (ví như $1/7!, 1/8!, \ldots$).

Vào năm 1731 Euler đã giới thiệu ký hiệu $e$ để đại diện cho con số $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$:

$$\boxed{e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \tag{31.37}$$

Trong toán học, có ba số vô tỷ nổi tiếng nhất và $e$ là một trong số họ. Chúng là $\pi$, tỉ lệ vàng $\phi = 0.5(1+\sqrt{5})$ và $e$. Cả ba con số này đều có thể tìm thấy trong hình học: $\pi$ là diện tích đường tròn đơn vị, còn $e$ liên quan tới diện tích hyperbol (Hình 31.7). Tỉ lệ vàng thì liên quan tới ngũ giác đều (phần 34.2.2).




Hình 31.7: Hai số nổi tiếng nhất toán học $\pi$ và $e$ đều liên quan tới các đường conic.

Con số $e$ trông bình dân này chính là cơ số cho logarit tự nhiên, cho tăng trưởng mũ. Ví dụ

$$N(t) = N_0 e^{rt} \tag{31.38}$$

cho phép ta tính dân số với tốc độ tăng trưởng $r$ sau thời gian $t$. Dĩ nhiên, lúc học giải tích các bạn sẽ thấy $e$ xuất hiện một cách hoàn toàn khác, không liên quan gì đến tiền nong. Nhưng mà Jacob Bernoulli đã tìm ra $e$ bình dân như thế đấy, với các võ công cũng bình dân.

Nếu dân số hiện tại là $N_0$, tốc độ tăng trưởng là $r$, hỏi sao bao nhiêu lâu thì dân số gấp đôi? Rõ ràng là ta chỉ cần dùng Eq. (31.38): tìm $t$ sao cho $2N_0 = N_0e^{rt}$. Vấn đề là làm sao giải phương trình này cho $t$? Giờ hãy quên dân số đi, quên $2N_0 = N_0e^{rt}$ đi, và tập trung vào chú này: $2^x = 3$ với $x$ đóng vai trò của $rt$ và 2 thay cho $e$; 2 thì dễ hơn $e = 2.718\ldots$ Nhưng ta vẫn chưa biết cách giải $2^x = 3$. Vậy thì hãy quay lại với cô em quen thuộc này: $x^2 = 3$. Ô hay, cái này thì ta biết: $x = \sqrt{3}$. Ta viết thế này (chú ý chỉ xét $x > 0$)

$$x^2 = 3 \Longleftrightarrow x = \sqrt{3} = \text{ROOT2}(3)$$

Nếu vậy thì ta cũng bắt chước và làm cho $2^x = 3$:

$$2^x = 3 \Longleftrightarrow x = \text{LOG2}(3)$$

Ta chưa biết tí gì về anh chàng LOG2 nhưng nó rất giống anh chàng ROOT2. Ở điểm nào? Anh chàng ROOT2 làm ngược lại những gì $\square^2$ làm: ví dụ, nếu ta cho 4 vào cái máy $\square^2$, nó cho ra

$4^2 = 16$, ta đem 16 bỏ vào cái máy ngược ROOT2 nó cho ta lại con số 4: $\sqrt{16} = 4$. Tương tự, nếu ta cho 3 vào cái máy $2^{\square}$ ta có $2^3 = 8$, rồi cho 8 này vào LOG2 ta có ngay 3. Như vậy ta đã phát hiện ra

$$\text{LOG2}(8) = 3$$

Ký hiệu của ta không đẹp bằng ký hiệu log nên ta chạy theo người khác và viết

$$\log_2 8 = 3$$

Logarit là vậy đó, nó chính là kẻ đối đầu của $a^x$ như căn bậc hai là kẻ đối đầu của $x^2$. Ta có thể tóm tắt như sau:

$$\begin{aligned} x^{\color{red}2} &= {\color{blue}4} \Longrightarrow x = \sqrt[\color{red}2]{\color{blue}4} \\ {\color{red}2}^x &= {\color{blue}4} \Longrightarrow x = \log_{\color{red}2} {\color{blue}4} \end{aligned} \tag{31.39}$$

Sau khi biết logarit là gì, việc tìm ra các quy luật của nó không khó. Ví dụ,

$$\log_2 8 = 3, \quad \log_2 16 = 4, \quad \log_2 8 \times 16 = 7$$

Mà $7 = 3 + 4$ cho nên

$$\log_2 8 \times 16 = \log_2 8 + \log_2 16$$

Hoan hô! Bạn đã phát hiện ra $\log_2 ab = \log_2 a + \log_2 b$ rồi đó. Rồi cho $b = a$, bạn có $\log_2 a^2 = 2\log_2 a$, lại thêm một quy luật nữa. Dĩ nhiên không có gì đặc biệt với cơ số 2, những gì ta mới phát hiện vẫn đúng cho cơ số khác (như là 10). Và cứ thế.

Rồi khi học giải tích chúng ta lại gặp một cặp như nước với lửa nữa: đạo hàm và tích phân: đạo hàm của $x^2$ là $2x$, và tích phân của $2x$ cho ta lại $x^2$. Há chẳng thú vị sao?

Đó là cách các nhà Toán học nhìn cọng và trừ: $a - b = a + (-b)$. Tương tự, nhân và chia: $a/b = a \times (1/b)$. Như thế, thay vì phải nhớ 4 phép tính, giờ ta chỉ cần quan tâm 2 thôi: cọng và nhân.

**Ví dụ 11.** Tính giới hạn của ${}^{x^n}/_{n!}$ khi $n \to \infty$. Tại sao phải quan tâm đến điều này? Vì nó liên quan đến định lý Taylor, một vấn đề quan trọng trong giải tích. Bước làm quen:

- Hãy làm quen với giới hạn này với một con số cụ thể, chẳng hạn $x = 2$, và $n = 8$. Khi đó ta có $2^8/8! = 0.0063$, thử vài giá trị nữa $n = 10, 11$, ta đoán:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

- Làm sao chứng minh điều này? Thay vì tính $2^8/8!$ dùng máy tính, ta tính tay như sau (vì dùng máy tính thì ta chỉ thu được 1 con số vô tri vô giác, còn tự tính tay ta sẽ thấy những điều hay ho):

$$\frac{2^8}{8!} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 8} = {\color{blue}\frac{2}{1} \times \frac{2}{2}} \times {\color{red}\frac{2}{3} \times \frac{2}{4} \times \cdots \times \frac{2}{8}} \tag{31.40}$$

  Quả thật ta thấy điều thú vị: trừ hai số hạng đầu thì còn lại mẫu số đều lớn hơn tử số! Ta có hai nhóm rõ rệt, ta tô 2 màu cho chúng. Vì các số màu đỏ đều nhỏ hơn một, chúng ta đang nhân một hằng số (màu xanh) lặp đi lặp lại với các số nhỏ hơn một, và vì vậy ${}^{2^8}/_{8!}$ là một số gần 0.

- Rõ ràng là lập luận này vẫn đúng cho $n = 9, 10, 11, \ldots$ và nó cho ta thấy khi $n \to \infty$ thì ${}^{2^n}/_{n!}$ sẽ tiến đến 0.

- Nhưng đó chưa phải là chứng minh toán học, dù ta đã chắc chắn về kết quả này. Muốn chứng minh một cách chính xác, ta lại mát xa ${}^{2^n}/_{n!}$ tí nữa:

$$\frac{2^n}{n!} = \underbrace{{\color{blue}\frac{2}{1} \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{4}}}_{\text{4 thành phần}} \times \underbrace{{\color{red}\frac{2}{5} \times \frac{2}{6} \times \cdots \times \frac{2}{n}}}_{n-4 \text{ thành phần}}$$

Điều tốt là ở dạng mới này, tất cả các thành phần màu đỏ đều nhỏ hơn $1/2$, vì vậy chúng ta ngay lập tức có:

$$\frac{2^n}{n!} < \underbrace{\left(\frac{2}{1}\times\frac{2}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}\right)}_{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} = 2^4k\frac{1}{2^n}$$

Bây giờ, rõ ràng rằng giới hạn là 0:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} < \lim_{n\to\infty} 2^4k\frac{1}{2^n} = 2^4k\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 2^4k\frac{1}{\lim_{n\to\infty}2^n} = 2^4k\frac{1}{\infty} = 0$$

Bao nhiêu công sức thì ta cũng chỉ chứng minh rằng với $x = 2$ thì $x^n/n! \to 0$ khi $n\to\infty$. Có gì đặc biệt với $x = 2$ chăng? Không! Rõ ràng những gì ta mới thu được cũng áp dụng cho $x = 3, 4, \ldots$ Còn $x = -2, -3, -4, \ldots$ thì sao? Nhìn chằm chằm vào Eq. (31.40), ta thấy ta chỉ cần thay 2 bởi $-2$, mọi chuyện không đổi. Do đó cho các số nguyên âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn 1 thì vẫn có $x^n/n! \to 0$ khi $n\to\infty$. Nếu bạn chưa rõ thì chi tiết như sau, chỉ cần thay 2 bởi $-2$, và chú ý rằng $(-2)(-2)\cdots(-2) = (-1)^n\times 2\times 2\cdots\times 2$:

$$\frac{(-2)^n}{n!} = (-1)^n\times\frac{2}{1}\times\frac{2}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{6}\times\cdots\times\frac{2}{n}$$

Hừ! Cái thằng $(-1)^n$ lúc thì là 1 cho $n$ chẵn, lúc thì $-1$ cho $n$ lẻ, mà ta nào có biết $n$ là chẵn hay lẻ. Làm sao cho bay đi chú này? Trị tuyệt đối, chứ còn ai vào đây nữa:

$$\left|\frac{(-2)^n}{n!}\right| = \frac{2}{1}\times\frac{2}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{6}\times\cdots\times\frac{2}{n} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^n}{n!}\right| = 0$$

Mà nếu như vậy, ta có ngay: $\lim_{n\to\infty} 2^n/n! = 0$. (Mình xin bỏ qua bước này.)

Nhưng với $x = 3.123$ thì răng? Đừng lo lắng. Ta không cần phải làm lại từ đầu, chỉ cần *biến bài toán thành bài đã biết*: ta so 3.123 với 4, là số nguyên nhỏ nhất mà lớn hơn 3.123, mà 4 là một số nguyên–cái ta đã biết. Chi tiết rất đơn giản: $3.123 < 4$, $3.123^2 < 4^2$, và $3.123^n < 4^n$. Và thế là,

$$\frac{3.123^n}{n!} < \frac{4^n}{n!}$$

Ta có: $a < b$, mà $b$ thì tiến đến 0, vậy $a$ cũng phải tiến đến 0 thôi, không còn sự lựa chọn nào khác. Ta đã chứng minh xong, rằng

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0, \quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{31.41}$$

Sao nói cho tất cả số thực $x$? Ta chưa nói gì về những chú $x$ mà $|x| < 1$ mà. Thử tính $(0.1)^8$ bạn sẽ hiểu ngay vì răng ta không cần quan tâm cho những chú 'tí hon' này.

Nếu bạn đọc sách thì thấy, cho bài này, các nhà Toán học lại chứng minh như sau: Cho $a$ là một số nguyên mà $|a| > 1$, ta viết $a^n/n!$ như sau:

$$\frac{a^n}{n!} = \underbrace{\frac{a}{1}\times\frac{a}{2}\times\cdots\times\frac{a}{2a}}_{2a \text{ thành phần}}\times\underbrace{\frac{a}{2a+1}\times\frac{a}{2a+1}\times\cdots\times\frac{a}{n}}_{n-2a \text{ thành phần}}$$

Vì vậy,

$$\frac{a^n}{n!} < k\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2a} = 4^ak\frac{1}{2^n}, \quad k = \frac{a}{1}\times\frac{a}{2}\times\cdots\times\frac{a}{2a}$$

Do $\lim_{n\to\infty} 4^ak^1/2^n = 0$, theo phép kiểm tra so sánh, ta suy ra $\lim_{n\to\infty} a^n/n! = 0$.

Xét số thực $a$, ta lại có $a < \lceil a\rceil$ và $a^n < (\lceil a\rceil)^n$; với $\lceil x\rceil$–gọi là hàm trần–là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng $x$[†]. Mà ta đã chứng minh với số nguyên ($\lceil a\rceil$ là một số nguyên), ta có $\lim_{n\to\infty} a^n/n! = 0$. Vậy $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ cho mọi số thực $x$.

[†]Nếu $x = 3.123$ thì ta so nó với 4: $3.123^n < 4^n$. Giờ trong chứng minh các nhà toán học dùng $a$ nên họ phải so với $\lceil a\rceil$. Mà $\lceil a\rceil$ từ mô chui ra? Thì là con của các nhà toán học chứ mô, họ đẻ ra chúng khi họ muốn!

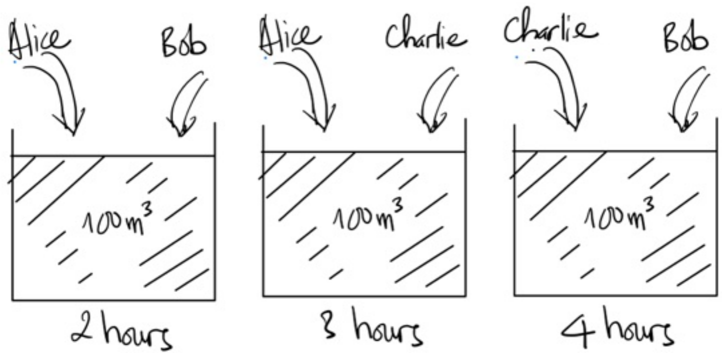
Đại loại như vậy. Ý mình muốn nói là: chứng minh này ngắn gọn, súc tích, không giải thích từ mô chui ra chứng minh này! Các bạn trẻ nên nhớ đằng sau những chứng minh *hoàn hảo* như vậy là không biết bao nhiêu giấy, mực, cà phê, mồ hôi, và những mò mẫm như mình trình bày ở trên (thử với $x = 2$, ...). Đừng vì những chứng minh trình bày trong sách mà nghĩ các nhà toán học là những vị thần, chứng minh đến với họ một cách tự nhiên. Ý thức được điều này rất quan trọng, nó cho ta–những người phình phường–một niềm tin rằng ta cũng làm toán được.

**Ví dụ 12.** Hãy xem xét bài toán lời văn (*word problems*) này: "Để hoàn thành công việc, Alice và Bob mất 2 giờ, Alice và Charlie mất 3 giờ và Bob và Charlie mất 4 giờ. Nếu cả ba người cùng làm việc thì mất bao lâu?"

Bước làm quen:

- Có *ba câu* (ví dụ, Alice và Bob mất 2 giờ là một câu hay một thông tin) có thể được dịch thành *ba phương trình*, và giải chúng sẽ cho ta ba ẩn số. Đây là cách các bài toán lời văn hoạt động: đặt $X$ cho cái cần tìm, tìm ra một phương trình cho $X$, và cuối cùng giải nó. Câu hỏi là làm thế nào để dịch đúng.

- Rất nhiều sinh viên Đại học Mỹ đã trả lời là 4.5 giờ cho bài toán này. Bạn có thấy tại sao đó phải là sai không? Nếu không, bạn nên *phát triển thói quen đoán một giải pháp hợp lý mà không cần giải quyết nó*. Paul Dirac (1902 - 1984), một nhà vật lý lý thuyết người Anh được coi là một trong những nhà vật lý quan trọng nhất của thế kỷ 20, đã từng nói: "Tôi coi mình hiểu một phương trình khi tôi có thể dự đoán các tính chất của các giải pháp của nó, mà không cần thực sự giải quyết nó".




Hình 31.8: Alice, Bob và Charlie đổ bê tông vào một container. Tại sao là 100? Ý tưởng là không sử dụng các số nhỏ như 1, 2, ... để tránh làm việc với phân số. Nếu bạn thích, việc chọn 60 cũng ok. Nhưng mình nghĩ 100 là một con số đẹp.

Bước tấn công. Có nhiều cách để dịch từng câu đã cho thành các phương trình. Nhưng có lẽ dễ dàng hơn nếu chúng ta nghĩ về một công việc cụ thể, chẳng hạn như đổ bê tông vào một container có thể tích 100 $m^3$ (xem Hình 31.8). Hãy ký hiệu bằng $A$, $B$ và $C$ số lượng bê tông (đơn vị: $m^3$) mà Alice, Bob và Charlie có thể đổ vào container trong 1 giờ[§]. Với điều này, dễ dàng dịch câu "để hoàn thành một công việc, cần mất Alice và Bob 2 giờ" thành $2A + 2B = 100$. Do đó, chúng ta có hệ thống phương trình sau[†]

$$\begin{aligned} 2A + 2B &= 100 \\ 3A + 3C &= 100 \\ 4B + 4C &= 100 \end{aligned} \tag{31.42}$$

[§]Bạn có thể đặt tên họ là $x$, $y$, $z$ hoặc bất kỳ tên nào khác.

[†]Chúng ta đã đưa ra giả thiết rằng hiệu suất của Alice, Bob và Charlie là không đổi, mặc dù có thể có khi làm việc với Bob, Charlie có thể làm việc chăm chỉ hơn so với Alice. Do đó, việc giải quyết các bài toán từ vựng (hoặc thực tế) đòi hỏi chúng ta phải bỏ qua những điều không quan trọng để làm cho bài toán trở nên quản lý được.

Chúng ta có một hệ thống ba phương trình tuyến tính, đó là lý do tại sao chúng ta gọi nó là hệ thống phương trình tuyến tính. Giải phương trình này có nghĩa là tìm ra ba số $A, B, C$ sao cho khi thay chúng vào hệ thống, chúng ta thu được ba mệnh đề đúng. Làm thế nào chúng ta sẽ giải quyết nó? Chúng ta biết cách giải $ax + b = 0$, vì vậy kế hoạch là *loại bỏ/loại trừ hai ẩn số và chúng ta chỉ còn lại một ẩn số*. Để loại bỏ hai ẩn số, trước tiên chúng ta loại bỏ một ẩn số. Để làm điều đó, chúng ta có thể sử dụng bất kỳ phương trình nào, ví dụ như $B + C = 25$, viết ẩn số cần loại bỏ dưới dạng của ẩn số khác: ví dụ như $C = 25 - B$. Bây giờ $C$ đã biến mất.

Chúng ta có thể bắt đầu loại bỏ bất kỳ ẩn số nào, mình sẽ bắt đầu bằng $C$: từ phương trình thứ ba, chúng ta có thể lấy $C = 25 - B$, đặt nó vào phương trình thứ hai của Eq. (31.42) chúng ta có $3A - 3B = 25$. Phương trình mới này và phương trình đầu tiên tạo ra hệ thống mới (chỉ với hai ẩn số $A, B$) mà chúng ta cần giải. Chúng ta lại thực hiện bước khử biến một lần nữa: từ $2A+2B = 100$ chúng ta có $B = 50-A$ (nghĩa là chúng ta đang loại bỏ $B$), đặt nó vào $3A-3B = 25$: $A = 175/6$. Bây giờ chúng ta đi ngược lại để giải quyết $B$ và $C$: $B = 50 - A = 50 - 175/6 = 125/6$ và $C = 25 - B = 25 - 125/6$. Như vậy, kết quả là $A = 175/6$, $B = 125/6$ và $C = 25/24$.

Sau đó, nếu thời gian cần thiết cho cả ba người làm việc cùng nhau để đổ bê tông vào container là $t$, thì lượng bê tông sẽ là $(A + B + C)t$. Do đó, chúng ta có

$$(A+B+C)t = 100 \Longrightarrow t = \frac{100}{A+B+C} = \frac{24}{13} \approx 1.85 \text{ giờ}$$

Bước đánh giá:

- Lời giải này là hợp lý vì nó nhỏ hơn hai giờ mà Alice và Bob mất; Charlie phải đóng góp chút gì chứ mặc dù anh ấy chậm hơn hai bạn còn lại một chút. Rất nhiều sinh viên Đại học Mỹ đã trả lời là 4.5 giờ cho bài toán này. Đó là những người học vẹt!

- Người kỹ sư hay nhà khoa học có lẽ sẽ dừng ở đây vì bài toán đã giải xong, nhưng mà các nhà Toán học thì không như vậy; họ sẽ còn tiếp tục đặt câu hỏi. Ví dụ, phương trình $ax^2+bx+c = 0$ có thể có hai nghiệm, vậy thì ai bảo đảm các nghiệm $A = 175/6$, $B = 125/6$ và $C = 25/24$ tìm ra là nghiệm duy nhất của Eq. (31.42)?

- Ngoài ra, các nhà toán học sẽ làm bước quen thuộc: tổng quát hóa. Rõ ràng Eq. (31.42) chỉ là một ví dụ về một hệ thống các phương trình tuyến tính. Trong những hệ thống này, có $n$ phương trình cho $n$ ẩn số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ trong đó tất cả các phương trình đều tuyến tính theo các $x_i$ ($i = 1, 2, \ldots$); chúng ta sẽ không thấy các thành phần phi tuyến tính như $x_i x_j$ hay $x_i^2$ hay $\sin x_i$. Sau đây là vài ví dụ cho $n = 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}, \quad \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 2 \\ 4x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}, \quad \begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 7x_4 &= 3 \\ 5x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

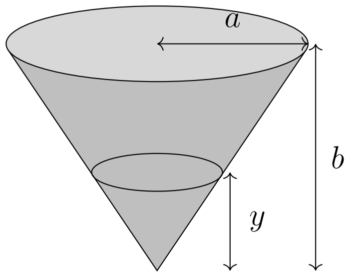
Rõ ràng là thay vì dùng $x_1, x_2, \ldots$ ta hoàn toàn có thể dùng $a_1, a_2, \ldots$. Do đó việc giải hệ tuyến tính hoàn toàn phụ thuộc các hệ số (màu đỏ) thôi. Vì vậy, ta có thể viết các hệ số vào một bảng như sau (cho phương trình với 4 ẩn ở trên)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{31.43}$$

Và việc giải hệ phương trình trở thành cọng/trừ các hàng của $\mathbf{A}$ (đại loại thế). Sau đó, các nhà toán học thấy họ có thể thao tác với mảng này tương tự như với các số. Họ có thể cộng chúng, nhân chúng, trừ chúng. Và họ đặt tên cho nó: $\mathbf{A}$ là một *ma trận*. Và thế là ra đời một nhánh toán gọi là *đại số tuyến tính*. Khi một người kỹ sư xây dựng sử dụng một phần mềm phần tử hữu hạn (ví như SAP) để tính toán thiết kế một tòa nhà cao tầng thì máy tính phải giải một hệ tuyến tính với số nghiệm có thể lên tới 100 000, trong chưa đầy một phút!

- Tuy các bài toán quan trọng đều có $n$ rất lớn, việc tìm hiểu khi nào thì hệ tuyến tính có nghiệm, và nghiệm duy nhất hay không lại dễ dàng hơn với trường hợp $n = 2$: ta có thể dùng hình học (giải tích) để xem xét nghiệm của hệ, lúc đó nghiệm của hệ là giao điểm của hai đường thẳng!

**Ví dụ 12.** Hãy làm một bài liên quan tới đạo hàm; bài này trích từ sách *How to solve it* của Polya. Bài toán như sau: Nước đang chảy vào một chiếc phễu với tốc độ $r$ (xem hình bên). Phễu này có hình dạng của một hình nón vuông, với đáy ngang và đỉnh hướng xuống. Bán kính của đáy là $a$, độ cao của phễu là $b$. Tìm tốc độ tăng của mặt nước khi độ sâu của nước là $y$.




Bước làm quen:

- Ta biết gì? Ta biết $a, b$ (hình dạng của phễu), $y$ (chiều cao mặt nước) và $r$. Chẳng hạn $a = 4$ cm, $b = 2$ cm, $y = 1$ cm và $r = 2$ cm$^3$/phút.

- Ta cần tính gì? Bài toán liên quan tới mức nước dâng lên với một tốc độ như thế nào; cụ thể là lúc mức nước là $y$.

- Hình nón khó quá, ta thay cái phễu nón bằng cái phễu hình trụ, bán kính vẫn là $a$. Giả sử $r = 2$ cm$^3$/phút. Như vậy sau một phút, lượng nước chảy thêm vào là 2 cm$^3$. Và lượng nước này có hình trụ với thể tích là $\pi a^2 \Delta y$, trong đó $\Delta y$ là mức nước tăng lên. Từ đó, $\Delta y = {}^2/_{\pi a^2}$ (đơn vị là cm). Trong 1 phút nước tăng lên một đoạn $\Delta y$, vậy tốc độ của nó là ${}^2/_{\pi a^2}$ cm/phút. Kết quả này có hợp lý không? Nhìn vào cái công thức sẽ cho ta câu trả lời: tốc độ tỉ lệ nghịch với bình phương của $a$, phễu to thì tốc độ chậm, có lý.

Giờ thì ta có thể đối diện cái phễu hình nón rồi. Ta sẽ làm gần như y chang trường hợp phễu hình trụ, chỉ khác 1 điều (và rất quan trọng): tốc độ của mực nước giờ không còn là hằng số! Cho nên ta không thể xét một khoảng thời gian 1 phút. Thay vào đó ta xét một khoảng thời gian vô cùng bé gọi là $dt$. Trong khoảng thời gian đó, lượng nước mới chảy vào trong phễu sẽ là $rdt$, và nó sẽ chiếm một không gian có hình trụ với đáy có bán kính $x = ({}^a/_b)y$, và chiều cao $dy$. Do đó, ta có phương trình:

$$rdt = \pi \left(\frac{a}{b}\right)^2 y^2 dy$$

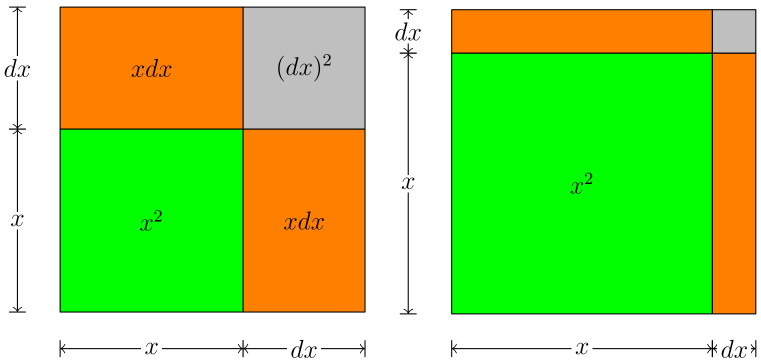
Bài toán cần chi? Tốc độ, mà tốc độ là quãng đường chia thời gian. Đáp án vì thế là:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{r}{y^2}}$$

Đây là cách nhà Vật lý và kỹ sư thích dùng, họ xài thoải mái $dy$ và $dt$ như thể đây là những con số thực bình thường. Công thức này ok không? Tốc độ mực nước tỉ lệ thuận với $r$ (nước chảy vào phễu càng nhanh thì mực nước dâng lên càng nhanh), tỉ lệ nghịch với bình phương của $y$ (khi $y$ gần $b$ thì tốc độ là nhỏ nhất).

Tại sao đạo hàm của $x^2$ lại là $2x$? Hình 31.9 cho bạn một câu trả lời dễ hiểu, dùng cái $dx$ siêu nhỏ này: xét hình vuông cạnh $x$, diện tích hình vuông là $x^2$ (hàm ta đang quan tâm), giờ đạo hàm liên quan tới sự thay đổi, nên ta cho cạnh $x$ dài thêm một đoạn siêu nhỏ $dx$, diện tích mới là $x^2 + 2xdx + (dx)^2$, nhưng $dx$ là rất nhỏ nên $(dx)^2$ lại càng nhỏ[†], do đó diện tích mới là $x^2 + 2xdx$, diện tích như vậy đã thay đổi một đại lượng $2xdx$, và từ đó đạo hàm là $2x$.

[†]Thử $dx = 10^{-5}$ thì $dx^2 = 10^{-10}$, coi như là 0.



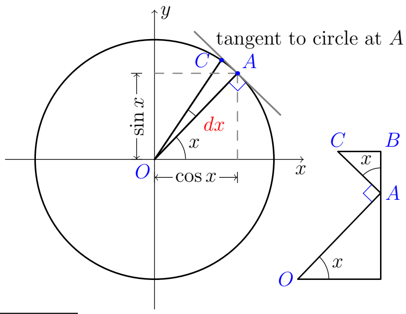

Hình 31.9: Giải thích hình học của đạo hàm của $x^2$. Sự thay đổi $(dx)^2$ rất nhỏ so với $2xdx$ và do đó nó sẽ tiến dần về 0 khi $dx$ tiến gần về 0.

Đằng sau Hình 31.9 là giới hạn, như giải thích dưới đây:

$$\begin{aligned}(x^2)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x} && \text{(thuần túy đại số)}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) && (\text{đại số, } \Delta x\neq 0)\\ &= 2x \text{ (khi } \Delta x \text{ tiến đến 0)}\end{aligned} \tag{31.44}$$

Cái $dx$ của Leibnitz là cái $\Delta x$ khi nó tiến đến 0.

Hình bên trình bày cách Newton tính đạo hàm của $\sin x$ dùng hình học và $dx$. Ông xét một đường tròn đơn vị và điểm $A$ có tọa độ $(\cos x, \sin x)$, với $x$ theo radian. Để tính đạo hàm, dĩ nhiên Newton xét $dx$ là sự thay đổi siêu nhỏ của góc $x$. Điểm $A$ di chuyển tới vị trí $C$ với $|AC| = dx$ (chú ý $dx$ là siêu nhỏ nên $C$ có thể xem là vẫn ở trên đường tròn) và $AC \perp OA$ vì $AC$ tiếp xúc với đường tròn. Sau đó, $d(\sin x) = |AB|$ và trong tam giác vuông $ABC$ ta có $|AB| = dx\cos x$. Vậy,




$$d(\sin x) = (\cos x)dx \Longrightarrow \boxed{\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x} \tag{31.45}$$

Tương tự, Newton tìm ra đạo hàm $\cos x$: $d(\cos x) = -|BC| = -\sin x dx$. Dấu trừ là vì khi $dx > 0$ thì $\cos x$ giảm. Lưu ý rằng góc được tính bằng radian. Nếu không phải như vậy, tức là ta dùng độ, thì $|AC| = (\pi/180)dx$, và đạo hàm của $\sin x$ sẽ là $(\pi/180)\cos x$ thay vì chỉ đơn giản $\cos x$. Đó là lí do các nhà Toán học chuyển qua dùng radian; việc này bắt đầu với Roger Cotes (1682 – 1716) vào năm 1714.

**Ví dụ 13.** Xét hàm $f(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$, được xác định bởi $f(x) = 4^x/4^x+2$. Tính tổng sau đây

$$S = f\left(\frac{1}{40}\right) + f\left(\frac{2}{40}\right) + \cdots + f\left(\frac{39}{40}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Đây là một câu hỏi trong kỳ thi JEE-Advanced năm 2021. Joint Entrance Examination–Advanced (JEE-Advanced) là một kỳ thi học thuật hàng năm được tổ chức tại Ấn Độ.

Giả sử chúng ta không đang tham gia bất kỳ kỳ thi nào và mục tiêu cuối cùng là tính tổng, thì nó rất dễ dàng. Viết vài dòng code và bạn sẽ thấy rằng $S = 19$. Nhưng nếu chúng ta thực sự phải làm điều này mà không có máy tính, chúng ta sẽ làm gì? Chúng ta chú ý đến biểu thức của $S$ và chúng ta quan sát một sự đều đặn:

$$S = f\left(\frac{1}{40}\right) + f\left(\frac{2}{40}\right) + \cdots + f\left(\frac{38}{40}\right) + f\left(\frac{39}{40}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Các cặp có cùng màu cộng lại thành một (ví dụ, $1/40+39/40 = 1, 2/40+38/40 = 1, 3/40+37/40 = 1$ vv). Vì vậy, ta sẽ tính $f(x) + f(1-x)$, và *hy vọng rằng điều gì đó tốt đẹp sẽ xảy ra*. Để kiểm tra ý tưởng này, chúng ta tính $f(0) + f(1)$ (vì các tổng này rất dễ), và nó cho chúng ta giá trị 1: rất hứa hẹn. Tiếp theo là $f(x) + f(1-x)$[†]:

$$f(x) + f(1-x) = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{4^{1-x}}{4^{1-x} + 2} = \cdots = 1$$

Tổng cũng bằng 1. Sau đó, $S$ bao gồm 19 tổng dạng $f(x) + f(1-x)$, đó chẳng là gì ngoài 1, cộng với $f(20/40)$ trừ đi $f(1/2)$. Kết quả cuối cùng đơn giản là 19. Bước đánh giá:

- Rõ ràng là bài này bị ảnh hưởng bởi lời giải mà Gauss dùng cho bài $1 + 2 + \cdots + 100$. Nếu bạn đã biết bài đó thì bài JEE này không có gì khó.
- Nếu không biết bài toán Gauss thì một chút nhận xét là điều phải có.
- Bây giờ bạn có thể thử bài toán trong một cuộc thi toán ở Canada vào năm 1995: cho hàm số $f(x) = {}^{9^x}/_{9^x+3}$, hãy tính $S = \sum_{n=1}^{1995} f(n/1996)$.

**Ví dụ 14.** Đây là một bài toán về hàm hợp. Bài toán như sau:

$$f_0(x) = \frac{x}{x+1}, \quad f_{n+1}(x) = (f_0 \circ f_n)(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Tìm hàm $f_n(x)$. Làm thế nào chúng ta sẽ giải quyết nó? Chúng ta có một quy tắc để tìm $f_{n+1}(x)$ cho số nguyên dương. Hãy thử tính vài cái như $f_1(x), f_2(x), \ldots$ để xem chúng ta sẽ có gì:

$$\begin{aligned}
n = 0: &\quad f_{\color{red}1}(x) = (f_0 \circ f_0)(x) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{x}{{\color{red}2}x + 1} \\
n = 1: &\quad f_{\color{red}2}(x) = (f_0 \circ f_1)(x) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1} = \frac{x}{{\color{red}3}x + 1} \\
n = 2: &\quad f_{\color{red}3}(x) = (f_0 \circ f_3)(x) = \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1} + 1} = \frac{x}{{\color{red}4}x + 1}
\end{aligned}$$

Những gì chúng ta vừa làm là bắt đầu từ $f_0(x) = {}^{x}/_{x+1}$, sử dụng $f_{n+1}(x) = (f_0 \circ f_n)(x)$, chúng ta tính $f_1(x)$, sau đó sử dụng $f_1(x)$ để tính $f_2(x)$ và cứ tiếp tục. May mắn cho chúng ta, chúng ta thấy một quy luật[††]. Quan sát các số màu đỏ trong mỗi phương trình và chúng ta có thể viết

$$f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x + 1}$$

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh công thức này bằng ... chứng minh bằng quy nạp (không còn cách nào tốt bằng). Công thức này hoạt động với $n = 0$. Giờ chúng ta giả sử nó hoạt động với $n = k$:

$$f_k(x) = \frac{x}{(k+1)x + 1}$$

Và chúng ta sẽ chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$, tức là

$$f_{k+1}(x) = \frac{x}{(k+2)x + 1}$$

Bạn có thể kiểm tra điều này.

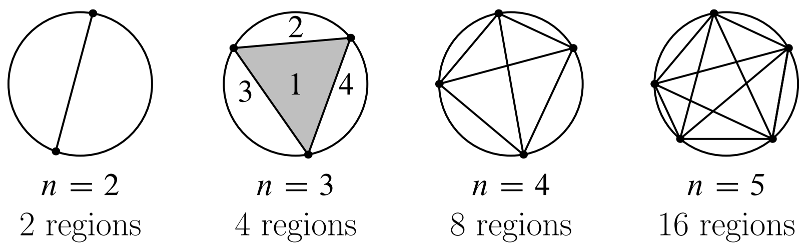
[†] Chỉ cần sử dụng quy tắc $a^{y-z} = {}^{a^y}/_{a^z}$, sau đó $4^{1-x} = {}^{4}/_{4^x}$.

[††] Phải có quy luật. Tại sao? Vì đây là một bài kiểm tra! Nó phải được trả lời trong thời gian ngắn.

## 31.10 Phỏng đoán

Chúng ta hay có thói quen, chỉ dựa vào một vài thông tin, đã đoán già đoán non. Và các nhà toán học cũng không ngoại lệ, dù điều này có lợi cho sự phát triển của toán học. Ví dụ, vào ngày 7 tháng 6 năm 1742, dựa trên sự thật rằng $8 = 5 + 3, 24 = 19 + 5, 64 = 23 + 41$, nhà toán học người Đức Christian Goldbach đã viết thư cho Leonhard Euler trong đó ông đưa ra giả thuyết sau: "*Mọi số chẵn dương có thể được viết dưới dạng tổng của hai số nguyên tố*". Tới bây giờ (năm 2023) chưa có ai chứng minh rằng các ngoại lệ không thể tồn tại. Hơn nữa, cho đến nay, chưa có ai tìm thấy một số chẵn nào mà câu tuyên bố này không đúng. Phỏng đoán này đã trở thành phỏng đoán Goldbach và là một trong những vấn đề chưa giải quyết lâu đời và nổi tiếng nhất trong lý thuyết số.

Nếu chúng ta có thể tìm ra một *ví dụ phủ định*, chỉ cần một, cho một giả thuyết thì chúng ta đã chứng minh nó là sai. Để minh họa điểm này, mình trình bày ví dụ sau được lấy từ cuốn sách thú vị "*Proofs: A Long-Form Mathematics Textbook*" của Jay Cummings. Vấn đề là: giả sử chúng ta đang nghiên cứu có bao nhiêu miền được tạo ra nếu đặt $n$ điểm ngẫu nhiên trên một vòng tròn và sau đó nối chúng bằng các đoạn thẳng. Chúng ta bắt đầu với $n = 2, 3, 4, 5$ và đếm số khu vực. Kết quả được cho trong hình Hình 31.10 gợi ý rằng số miền có thể là $2^{n-1}$, điều này hình thành giả thuyết của chúng ta. Tuy nhiên, giả thuyết này không đúng. Khi chúng ta đặt 6 điểm trên một vòng tròn và đếm số miền, chúng ta thấy chỉ có 31 miền, không phải 32 như được gợi ý bởi $2^{n-1}$; do đó, đã phủ định giả thuyết.




Hình 31.10: A circle with $n$ random points on it; two points are connected by a line. These lines make regions–space bounded by closed curves.

Đây là một tình huống dễ dàng bởi vì chúng ta có thể tìm một ví dụ phủ định cho một giá trị nhỏ của $n$. Chuyện sẽ trở nên khó khăn hơn khi giả thuyết này đúng cho tất cả các giá trị của $n$ mà chúng ta có thể kiểm chứng, nhưng chúng ta vẫn chưa biết cách chứng minh nó. Đó là tình huống với giả thuyết Goldbach. Ví dụ này cũng cho thấy tại sao các nhà toán học ám ảnh với hai từ chứng minh. Chúng ta không thể đơn giản tin vào điều gì đó chỉ vì nó trông đúng hoặc vì nó đúng trong vài trường hợp cụ thể. Chúng ta cần chứng minh.

Câu chuyện hài sau[†] cho ta thấy các nhà toán học cẩn thận với những giả thuyết như thế nào:

> *Một nhà toán học, một nhà vật lý và một kỹ sư đang du lịch bằng tàu hỏa qua Scotland khi họ nhìn thấy một con cừu đen qua cửa sổ toa tàu. "À," người kỹ sư nói, "Tôi thấy rằng cừu Scotland màu đen." "Hmm," nhà vật lý nói, "Ông muốn nói là một số con cừu Scotland có màu đen." "Không," nhà toán học nói, "Tất cả những gì chúng ta biết là có ít nhất một con cừu ở Scotland và ít nhất một bên của con cừu đó là màu đen!"*

## 31.11 Toán học có đáng sợ như đồn đại không?

Sự lo lắng về toán học, còn được gọi là sợ hãi toán học, là sự căng thẳng về khả năng của một người nào đó trong việc làm toán. Nỗi sợ Toán học, theo một số nghiên cứu, không phải do trải nghiệm cá nhân mà do sự ảnh hưởng từ cha mẹ, giáo viên và sách giáo trình mà họ sử dụng. Vậy

[†]Nguồn: https://www.math.utah.edu/~cherk/mathjokes.html.

nên, đối với những bạn trẻ nghĩ rằng bạn có ám ảnh về toán học, đừng hoảng sợ. Đó không phải là lỗi của bạn.

Để minh họa vấn đề của sách giáo trình và giáo viên, mình trích dẫn phần mở đầu của cuốn sách kinh điển năm 1910 có tên là *Calculus Made Easy* của kỹ sư điện người Anh Silvanus Phillips Thompson (1851 - 1916):

> *Vì rằng có rất nhiêu người ngốc có thể tính toán, thật đáng ngạc nhiên khi người ta nghĩ rằng nó nên được coi là một nhiệm vụ khó khăn hoặc chán ngán đối với bất kỳ kẻ dốt nào khác để học cách thống trị các thủ thuật tương tự. Một số thủ thuật giải tích thì rất dễ dàng. Và một số khác thì quả thật rất khó khăn. Những kẻ dốt viết sách giáo trình về toán học cao cấp - và họ thường là những kẻ dốt thông minh - hiếm khi thèm mất công để chỉ cho bạn thấy những phép tính dễ dàng như thế nào. Ngược lại, họ dường như muốn để bạn thấy về sự thông minh vượt trội của họ bằng cách trình bày nó một cách khó khăn nhất. Với bản thân mình, tôi là một kẻ rất ngốc nghếch, tôi đã phải tự học lại những khó khăn, và bây giờ tôi xin giới thiệu đến những kẻ ngốc nghếch khác những phần không khó. Học chúng một cách kỹ lưỡng, và phần còn lại sẽ đến. Những gì một kẻ dốt có thể làm, kẻ dốt khác cũng có thể làm được.*

Và quan điểm của Thompson về sách giáo trình đã được chia sẻ bởi Cornelius Lanczos (1893-1974), một nhà toán học và nhà vật lý người Hungary-Mỹ, người đã viết trong lời tựa của cuốn sách nổi tiếng của ông *The Variational Principles of Mechanics* những từ này:

> *Nhiều sách khoa học ngày nay được viết bằng một ngôn ngữ thần bí, như thể để tạo ấn tượng cho người đọc về sự không thoải mái khi họ luôn ở trong sự hiện diện của một siêu nhân. Cuốn sách hiện tại được viết trong tinh thần khiêm tốn và được viết cho những người khiêm tốn.*

Khi nói về giáo viên, nhà vật lý đoạt giải Nobel Richard Feynman từng nói "Nếu bạn thấy khoa học nhàm chán, bạn đang học từ một giáo viên sai". Ông ám chỉ rằng nếu bạn có một giáo viên tốt, bạn có thể học bất kỳ chủ đề nào.

Được rồi. Như Thompson đã nói **What one fool can do, another can**–nó làm được, mình cũng làm được. Đó là một câu nói đơn giản nhưng có một tác động lớn đối với những người bước qua nó. Nó đã thúc đẩy nhiều người bắt đầu học tích phân, bao gồm cả Feynman. Và tất cả chúng ta có thể bắt đầu học toán bằng nó.

Ngày 5 tháng 4 năm 2023

# Chương 32

# Bin, bác hai và diện tích hình chữ nhật

MÌNH có một cháu trai tên Bin đang học lớp 7. Bin gọi mình bằng bác hai. Hôm nọ, lúc ngồi trên xe đi đâu đó, mình (vì không biết hỏi gì khác) hỏi Bin: "Diện tích là gì hả Bin?" Bin trả lời: "diện tích là $S$". Mình nói không phải nhưng cu cậu cứ lặp đi lặp lại như vậy. Thấy thế, mình hỏi rứa diện tích hình chữ nhật tính sao. Bin trả lời ngay: "cái này con biết bác hai, là dài nhân rộng". Bin luôn vậy, lễ phép và dễ thương.

Như vậy Bin chỉ biết công thức tính diện tích hình chữ nhật (và diện tích của thêm nhiều hình khác–kể cả đại ca hình tròn), nhưng Bin không biết diện tích là gì. Đây là một tình trạng phổ biến ở nước mình. Để giúp Bin, mình hỏi: "Giữa Bin và bác hai, ai cao hơn?" Bin trả lời: "con cao hơn." Mình (hơi buồn tí) hỏi ngay: "Làm sao con biết con cao hơn bác hai?"Bin trả lời: "Thì khi hai bác cháu đứng cạnh nhau, con thấy bác lùn hơn, nên con cao hơn."

Mình nói "nhưng mà bác thấy bác cao hơn". Thấy Bin ngây người, mình nói ngay "mắt bác bị lé, nhìn thấy bác cao hơn." Như vậy Bin đã hiểu không thể dùng mắt để so sánh giữa hai người ai cao hơn[†]. Phải dùng một cách khác mà không ai phản đối cả. Và dùng chiều cao là cách mà tất cả chúng ta đều đồng ý. Dùng một thước dây, đo chiều cao của Bin, và của bác hai, ai có số lớn hơn thì cao hơn. Chấm hết!

(Xin bàn thêm một tí. Chúng ta muốn chiều cao là một thuộc tính nội tại của mỗi con người; nội tại nghĩa là chiều cao không phụ thuộc vào cách nhìn của ai cả. Ai cũng phải đồng ý Bin cao 170 cm.)

Như vậy, Bin sẽ được gắn một số vào người để nói lên chiều cao của nó. Điều này cũng tương tự như mỗi chúng ta đều gắn với số tuổi của mình. Điều khác biệt là số tuổi là số nguyên dương trong khi chiều cao là số thực. Nhưng đó lại là một vấn đề khác, không phải đề tài mình muốn bàn ở đây.

Tới đây là đủ để chuyển qua đề tài diện tích, mình lại hỏi tiếp:

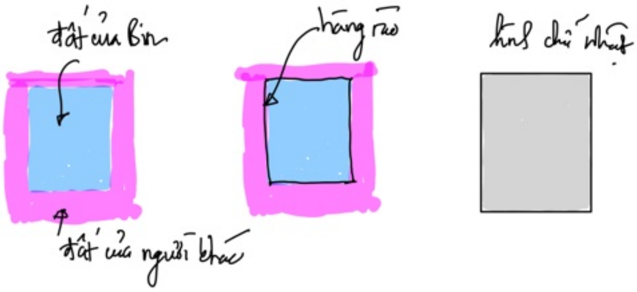
"Giả sử Bin có một mảnh đất và bác cũng có một mảnh đất. Câu hỏi đặt ra là làm sao biết mảnh đất nào rộng hơn?" Bài này khó hơn bài chiều cao nhiều vì chúng ta không thể đem hai mảnh đất đặt cạnh nhau (vì Bin ở Sài gòn còn mình ở Huế) và so sánh. Có khi mảnh đất to quá, mắt không thể nhìn hết.

Tuy khó hơn là vậy cách giải quyết bài này hoàn toàn tương tự cách giải bài chiều cao: mỗi mảnh đất cũng sẽ được gắn cho một số (thực) dương nói lên nó rộng bao nhiêu. Số thực đó có tên gọi là *diện tích*. Như vậy, diện tích là một số nói lên một miếng đất rộng thế nào. Bin hỏi: "sao nghe giống cò đất vậy bác hai?" Ừm, kệ nó, dễ hiểu là được rồi, mình trả lời cho qua chuyện.

Mà nè, Phính, định nghĩa cái diện tích cho nó hoành tráng một tí đi. Mình sẽ cố gắng. Tưởng tượng mảnh đất của Bin được tô màu như hình bên trái ở Hình 32.1, và đất của người khác được tô một màu khác. Đất thì thường chỉ có một màu thôi nên giải pháp tốt hơn là dùng hàng rào (hình giữa ở Hình 32.1). Và từ đó chúng ta có hình chữ nhật (hình phải ở Hình 32.1). Hình chữ

[†]Chỉ với hai con ngươi chúng ta không bao giờ biết tới sự tồn tại của vi khuẩn. Phải nhờ tới kính hiển vi, chúng ta mới phát hiện ra chúng. Cho nên, dùng mắt thường thì chưa đủ.

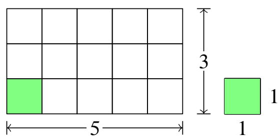
nhật là một khái niệm trừu tượng và vì vậy nó có ứng dụng cho rất nhiều trường hợp (không chỉ mảnh đất của Bin): tấm pin năng lượng mặt trời cũng là một hình chữ nhật hay màn hình TV là một hình chữ nhật.




Hình 32.1

Bây giờ chúng ta có thể định nghĩa thế nào là diện tích một hình chữ nhật. Diện tích hình chữ nhật là một con số nói lên tổng số không gian bên trong hình chữ nhật (là phần tô xám trong Hình 32.1). Rồi chúng ta có thể tiến thêm một bước định nghĩa diện tích của một hình phẳng bất kỳ. Và bắt đầu từ đây các nhà Toán học không còn dùng câu chuyện mảnh đất và diện tích của nó nữa.

Biết diện tích của một mảnh đất là gì rồi, bước tiếp theo là làm sao đo nó. May cho mình là mảnh đất của Bin hình chữ nhật, chứ không phải kiểu đất nở hậu hay nở mông má gì đó. Mặc dù vậy thật không dễ để tìm ra cách đo diện tích một mảnh đất hình chữ nhật. Trong những trường hợp như thế này cách tốt nhất là xem chúng ta đã xử lý bài tương tự như thế nào. "Làm sao con đo chiều cao của con, Bin?" mình hỏi. "Con dùng thước dây để đo", Bin đáp. Mình hỏi: "có gì đặc biệt trên thước dây?", và Bin trả lời "trên một thước dây có nhiều vạch chia". Mình giải thích, mỗi vạch chia thông thường là một cm. Nếu chiều cao của Bin tương ứng với 170 vạch như vậy thì Bin cao 170 cm hay là một mét bảy mươi (cm). Như vậy để đo chiều cao của một người, chúng ta chọn một cái làm chuẩn gọi là *chiều dài đơn vị* (ví dụ là một cm) và xem chiều cao của chúng ta tương ứng với bao nhiêu chiều dài đơn vị này.




Để đo diện tích của một hình chữ nhật, vì vậy, là một sự so sánh với cái gọi là *diện tích đơn vị*. Ví dụ, chúng ta có thể chọn diện tích đơn vị là một hình vuông có diện tích một đơn vị. Như hình bên cạnh, diện tích đơn vị là cái hình vuông tô xanh–có cạnh dài một đơn vị (đơn vị gì thì không quan trọng lắm về mặt Toán học, vì có người thì dùng cm, có người dùng km). Và vì hình chữ nhật bằng 15 lần hình vuông này, ta nói diện tích hình chữ nhật này là 15 lần diện tích hình vuông. Mà diện tích hình vuông là một (chính xác là một đơn vị diện tích mà có thể là cm$^2$ hay km$^2$) nên cuối cùng diện tích hình chữ nhật $5 \times 3$ là $15$: Bin nói đúng, diện tích hình chữ nhật đúng là dài nhân rộng.

Sau diện tích hình chữ nhật, chúng ta bây giờ sẽ giải quyết bài toán diện tích hình tam giác. Làm thế nào đây? Nếu nhìn vào cuộc sống ta thấy khi một người đã có vốn thì họ kinh doanh tương đối dễ dàng: họ làm về khách sạn, họ kinh doanh bất động sản vv. Trong toán học cũng vậy, nên nhớ là chúng ta bây giờ đã có vốn: cách tính diện tích hình chữ nhật[†]. Và chúng ta phải bắt đầu từ đó. Rất đơn giản: chúng ta chia một hình chữ nhật thành 2 hình tam giác vuông (Hình 32.2a), và thế là chúng ta đã phát hiện ra công thức tính diện tích một tam giác vuông cạnh $a, b$: $(1/2)ab$. Nối tiếp thành công này, chúng ta hỏi ngay: nếu tam giác không vuông thì diện tích tính thế nào? Thì từ tam giác không vuông chúng ta làm cho xuất hiện tam giác vuông: chỉ cần vẽ thêm một đường là xong (Hình 32.2b). Từ một tam giác ($\triangle ABC$), bây giờ ta có hai tam giác

[†]Có thể nói hay ho hơn như thế này: *Không có gì mới dưới mặt trời. Tất cả đã từng được thực hiện trước đây.* Khi các bạn làm một cái gì và gặp khó khăn thì nên nghĩ xem có gì tương tự đã làm trước đây chưa.

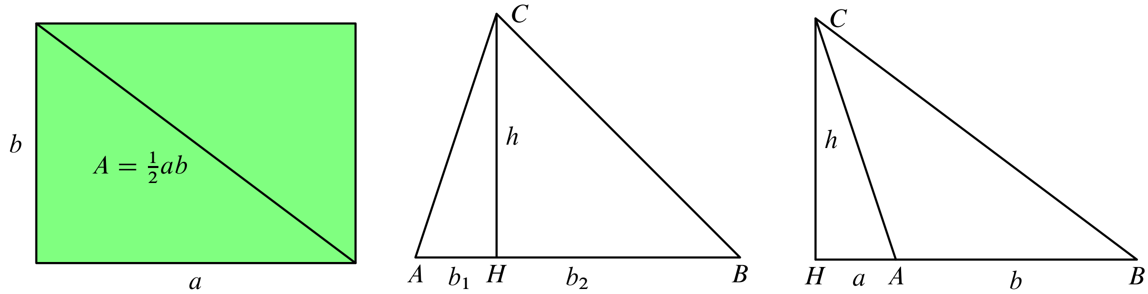
vuông $\triangle AHC$, $\triangle HBC$ với diện tích lần lượt là $(1/2)b_1h$ và $(1/2)b_2h$, do đó diện tích tam giác $ABC$ sẽ là tổng của hai diện tích này, tức là

$$\frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h = \frac{1}{2}bh \tag{32.1}$$

Nhưng mà nếu $C$ nằm ở vị trí như trong Hình 32.2c thì sao? Thì cũng vậy thôi†; công thức diện tích tam giác vẫn là rộng nhân cao rồi chia đôi. Nếu ta thay chiều cao $h$ bởi $|BC|\sin B$ thì ta lại có một công thức khác tính diện tích tam giác khi ta biết hai cạnh và góc xen giữa chúng:

$$A = \frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|\sin B = \frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\sin A = \frac{1}{2}|AC|\cdot|CB|\sin A \tag{32.2}$$

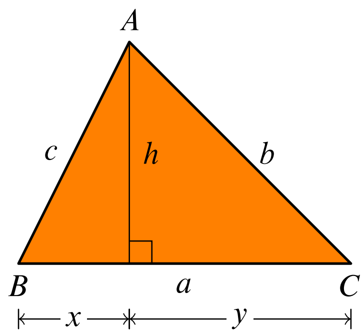
Kí hiệu $|AB|$ là cho chiều dài của đoạn thẳng $AB$.




(a) (b) (c)

Hình 32.2: Công thức diện tích tam giác: một nửa tích của chiều rộng và chiều cao (cách nói văn vẻ cho rộng nhân cao rồi chia đôi).

**Công thức Heron**. Thường thì ta biết độ dài 3 cạnh của một tam giác, trong trường hợp đó, diện tích tam giác tính làm sao? Không lẽ phải đi tính chiều cao? Ta muốn một công thức diện tích theo ba cạnh của tam giác! Và Heron (hoặc Hero) của Alexandria đã tìm ra công thức đó, và trình bày trong cuốn sách của ông, *Metrica*, viết vào khoảng năm 60 sau Công nguyên. Bây giờ mình trình bày một cách tìm ra công thức Heron dựa trên định lý Pythagoras.




Thứ nhất, diện tích được tính bằng công thức quen thuộc "nửa độ dài đáy nhân với chiều cao": $A = (1/2)ah$. Thứ hai, chiều cao $h$ được tính theo $a, b, c$. Xem hình vẽ, có 3 phương trình để xác định $x, y, h$:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= a \\ x^2 + h^2 &= c^2 \\ y^2 + h^2 &= b^2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = \frac{a}{2} - \frac{b^2 - c^2}{2a}, \quad y = \frac{a}{2} + \frac{b^2 - c^2}{2a}, \quad h^2 = c^2 - x^2$$

Vì chúng ta đã có $h^2$, hãy tính $4A^2$:

$$\begin{aligned} 4A^2 &= a^2(c^2 - x^2) = a^2(c - x)(c + x) = a^2\left(c - \frac{a}{2} + \frac{b^2 - c^2}{2a}\right)\left(c + \frac{a}{2} - \frac{b^2 - c^2}{2a}\right) \\ &= a^2\left(\frac{2ac - a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\left(\frac{2ac + a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right) \\ \Longrightarrow A^2 &= \frac{1}{16}[b^2 - (a - c)^2][(a + c)^2 - b^2] = (b + a - c)(b - a + c)(a + c + b)(a + c - b) \end{aligned}$$

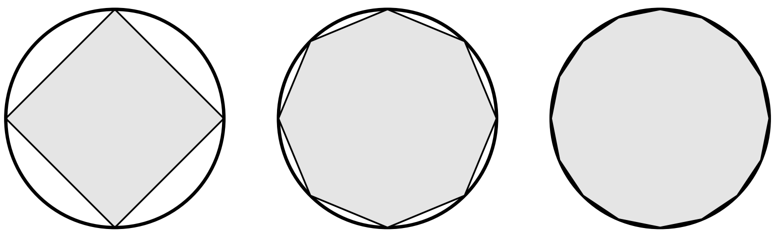
†Nhưng thay vì tổng hai diện tích thì giờ là hiệu của hai diện tích.

Nếu chúng ta giới thiệu $s = 0.5(a + b + c)$–nửa chu vi của tam giác–thì công thức Heron được biểu diễn như sau[†]:

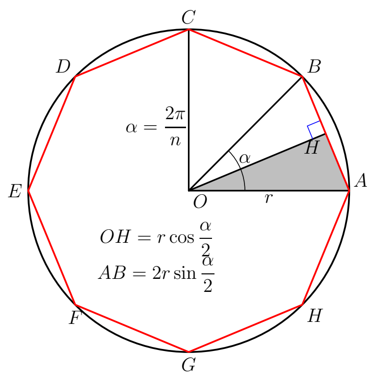
$$\boxed{A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \tag{32.3}$$

Biểu thức cuối cùng của $A$ là đối xứng đối với $a, b, c$ (có $s - a$, có $s - b$, và có $s - c$, không có cạnh nào bị bỏ sót, và không có ai bị thiên vị), một công thức tuyệt đẹp, và vì vậy nó phải đúng! Nếu ta tìm ra $A = \sqrt{s(s-2a)(s-b)(s-c)}$, thì đó chắc chắn là sai. Nhưng làm thế nào chúng ta biết chắc rằng nó đúng? Hãy kiểm tra với một tam giác mà chúng ta biết chắc chắn diện tích của nó. Công thức Heron cho ta một cách để đo diện tích của bất kỳ tam giác nào. Chúng ta chỉ cần lấy ba độ dài cạnh và đưa chúng vào công thức Heron, và diện tích sẽ xuất hiện ngay lập tức. Ví dụ, diện tích của một tam giác có các cạnh là 3, 5 và 6 sẽ là $\sqrt{56}$.

Sau diện tích tam giác thì mọi chuyện trở nên đơn giản. Ví dụ để tính diện tích của một đa giác, chúng ta chỉ cần chia nó thành nhiều tam giác. Đơn giản như vậy đó. Đời không như là mơ: diện tích hình tròn thì tính làm sao? Cho hình có biên cong thì chúng ta phải cần những bộ óc thiên tài, như của Exodus và Archimedes. Một phương pháp để tìm diện tích hình cong là chia nhỏ nó thành nhiều hình đơn giản (hình chữ nhật chẳng hạn), cọng các diện tích này lại. Nhưng mà chúng ta phải chia rất rất nhiều hình (xem Hình 31.1). Đó chính là tiền đề của khái niệm tích phân mà Newton và Leibnitz phát triển ở thế kỷ 17.



Hình 32.3: Diện tích hình tròn có thể xấp xỉ bằng diện tích đa giác đều nội tiếp nó khi số cạnh của đa giác này ($n$) rất lớn. Trong hình mình minh họa cho ba trường hợp: $n = 4$, $n = 8$ và $n = 16$.




Bây giờ chúng ta sẽ tìm hiểu tại sao diện tích hình tròn bán kính $r$ là $\pi r^2$ và chu vi của nó là $2\pi r$, và $\pi$ là gì? Trước tiên chúng ta sẽ tính diện tích hình tròn bán kính $r$. Chúng ta làm theo nhà Toán học Hy lạp Exodus (330 trước Công nguyên): *xấp xỉ diện tích hình tròn bằng diện tích đa giác đều nội tiếp nó*. Nhìn vào Hình 32.3, chúng ta thấy rằng *khi ta dùng đa giác đều với số cạnh rất lớn thì diện tích đa giác đều này cũng chính là diện tích hình tròn cần tìm*. Diện tích đa giác đều? Cái này không khó vì nó liên quan đến diện tích tam giác (cái mà ta biết). Như ở hình bên, diện tích đa giác đều 8 cạnh $ABCDEFGH$ là tổng diện tích của các tam giác con (chẳng hạn $\triangle OAB$). Mà diện tích $\triangle OAB$ là $(1/2)OH \times AB$. Do đó, diện tích của đa giác đều 8 cạnh này, mà ta gán cho cái tên là $A_8$, là:

$$\begin{aligned} A_8 &= \frac{1}{2}OH \times AB + \frac{1}{2}OH \times BC + \cdots + \frac{1}{2}OH \times AH \\ &= \frac{1}{2}OH(AB + BC + \cdots + AH) = \frac{1}{2}OH \times C_8 \end{aligned} \tag{32.4}$$

với $C_8$ là chu vi của nó.

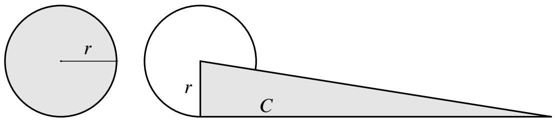
Dĩ nhiên là đa giác đều 8 cạnh thì không xấp xỉ gần đúng cho hình tròn, nên ta phải xét trường hợp khi số cạnh rất lớn. Khi số cạnh lớn ta có ngay $OH = r$ và chu vi của đa giác bằng chu vi

[†]Răng biết mà đưa $s$ như vậy? Thật ra thì ta bắt đầu với $p = a + b + c$, điều này là tự nhiên vì đó là chu vi và nó xuất hiện trong công thức. Sau đó ta sẽ có: $16A^2 = p(p-2a)(p-2b)(p-2c)$. Không đẹp lắm! Nếu $s = p/2$ thì các hệ số 2 sẽ bay đi và ta có công thức Heron.

hình tròn, do đó Eq. (32.4) cho ta diện tích hình tròn $A$:

$$\boxed{A = \frac{1}{2} r \times C} \tag{32.5}$$

Đây là một kết quả quan trọng. Nếu giờ chúng ta có thể tính chu vi hình tròn $C$ theo bán kính $r$, thay vào công thức trên ta sẽ có công thức tính diện tích hình tròn. Eq. (32.5) có ý nghĩa hình học như thế nào? Nếu chúng ta cắt hình tròn và làm thành một đoạn thẳng, nó sẽ có chiều dài là $C$. Ta làm một tam giác vuông với 2 cạnh là $r$ và $C$ như Hình 32.4, diện tích tam giác này là $(1/2)r \times C$, cũng chính là diện tích hình tròn. Diện tích hình tròn lại chính là diện tích của một tam giác; thật thú vị.




Hình 32.4: Ý nghĩa của Eq. (32.5).

Làm sao tính chu vi hình tròn? Vậy làm sao tính chu vi hình vuông? Ôi, Phính hỏi gì lạ rứa. Chu vi hình vuông cạnh $a$ là $C_{\text{square}} = a + a + a + a = 4a$. Nếu hình vuông này được phóng to lên hai lần thì chu vi mới là $2a + 2a + 2a + 2a = 8a$. Ta thấy ngay là tỉ số giữa chu vi và cạnh cho một hình vuông luôn là 4. Cho tam giác đều thì tỉ số này là 3. Và cho hình tròn thì tỉ số này là một số có kí hiệu là $\pi$: chu vi hình tròn bán kính $r$ (đường kính $d = 2r$) là $C = \pi d$. Như vậy $\pi$ là *tỉ số của chu vi một hình tròn với đường kính của nó*:

$$\pi = \frac{C}{d}, \quad \text{hay} \quad \boxed{C = 2\pi r} \tag{32.6}$$

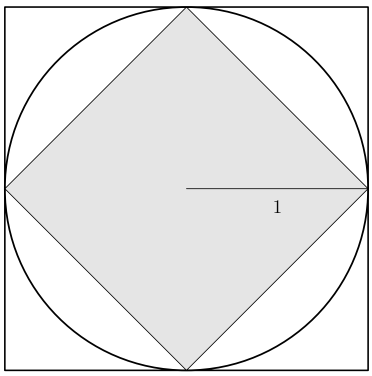
Thay Eq. (32.6) vào Eq. (32.5), ta thu được công thức tính diện tích hình tròn bán kính $r$:

$$\boxed{A = \pi r^2} \tag{32.7}$$

Làm sao tính $\pi$? Archimedes làm như sau: ông xét hình tròn đơn vị (tức là hình tròn có bán kính $r = 1$), và xét một hình vuông ngoại tiếp nó, và một hình vuông nội tiếp nó (Hình 32.5). Chu vi hình tròn này là $2\pi$, chu vi hình vuông lớn là 8, trong khi chu vi hình vuông nhỏ là $4\sqrt{2}$. Mà, chu vi hình tròn thì lớn hơn chu vi hình vuông nội tiếp, và nhỏ hơn chu vi hình vuông ngoại tiếp (tại sao?). Do đó,

$$4\sqrt{2} < 2\pi < 8 \Longleftrightarrow 2.82 < \pi < 4$$

Từ đó, chúng ta có thể hiểu tại sao người xưa cho rằng $\pi = 3$.




Hình 32.5: Cách Archimedes tính số $\pi$. Thật ra Archimedes tính với đa giác đều 6 cạnh, rồi 12 cạnh, cho tới 96 cạnh.

Dĩ nhiên với một thiên tài như Archimedes và ông có rất nhiều thời gian, ông không hài lòng với $\pi = 3$. Ông xét đa giác đều 6 cạnh, rồi 12 cạnh, cho tới 96 cạnh. Với đa giác đều 96 cạnh, Archimedes đã thu được:

$$96\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2}\right) < \pi < 96\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}\right)$$

Bây giờ, Archimedes đối mặt với một công việc nhàm chán: tính căn bậc hai mà không có máy tính, không có số thập phân (thậm chí không có số 0 vì những thứ này mãi sau này mới có). May cho ông là người Babylon biết cách tính căn bậc hai, và Archimedes tính ra $\pi$ như sau

$$3.14103195089053 < \pi < 3.1427145996453882 \tag{32.8}$$

Tức là $\pi \approx 3.14$: một thành tựu tuyệt vời! Từ đó, chúng ta có ngày 14 tháng 3 gọi là ngày Pi, và thật thú vị cũng là sinh nhật của Albert Einstein.

Số $\pi$ xuất hiện trong nhiều công thức toán học và vật lý. Ví dụ, trong toán học nó xuất hiện trong $e^{i\pi} + 1 = 0$, công thức đẹp nhất Toán học phát hiện bởi nhà Toán học vĩ đại Leonard Euler. Nhiều khi $\pi$ xuất hiện ở những nơi ít ai ngờ tới. Chẳng hạn, nó xuất hiện trong bài toán Basel với nội dung như sau: tính chính xác tổng của nghịch đảo bình phương của các số tự nhiên, tức là tổng chính xác của dãy số vô hạn:

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \cdots = ? \tag{32.9}$$

Không thể nào tin nổi khi Euler thông báo với thế giới, vào năm 1734, rằng $S = {}^{\pi^2}\!/_6$. Chính việc giải bài này đã làm Euler nổi tiếng. Có thể so sánh chuyện này với bàn thắng thứ hai của Maradona vào lưới đội tuyển Anh ở bán kết World Cup 1986. Lời giải tuyệt diệu của Euler sẽ được trình bày ở Chương 40.

Và trong vật lý, nó xuất hiện trong phương trình trường của thuyết tương đối của Einstein:

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{32.10}$$

Việc tính $\pi$ chính xác hơn luôn ám ảnh các nhà Toán học, ví dụ, Newton–cha đẻ của vi tích phân–tính $\pi$ như sau (xét hình tròn, dùng tích phân và dãy số vô hạn; nếu các bạn không tự mình làm được thì xin mời đọc tiếp, mình sẽ chứng minh công thức này):

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\frac{1}{8} - \frac{1}{40}\frac{1}{32} - \frac{1}{112}\frac{1}{128} - \frac{5}{1152}\frac{1}{512} - \cdots \tag{32.11}$$

và với phương pháp này, ông đã tính được $\pi$ với ít nhất 15 chữ số sau dấu thập phân. Tại một thời điểm, khi nhận xét về những xấp xỉ như thế, ông ngượng ngùng thú nhận (lúc ông 23 tuổi) khi viết, "Tôi xấu hổ phải nói bạn biết rằng tôi đã tính toán đến bao nhiêu chữ số, *bởi vì tôi không có việc gì khác làm vào thời điểm đó.*" (Dunham, 1991).

Sau đây là 100 con số đầu tiên của $\pi$:

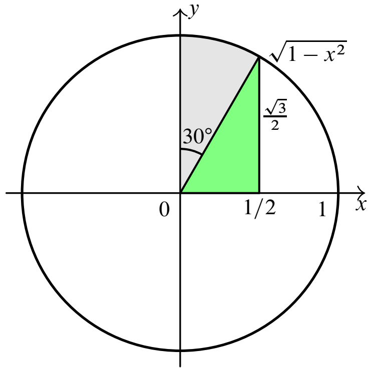
$$\begin{aligned}\pi = 3.&14159265358979323846264338327950288419716 \\ &9399375105820974944592307816406286208998628034825342117067 9\end{aligned}$$

Ngày nay các nhà Toán học sử dụng siêu máy tính và đã tính được 13 tỉ số sau dấu thập phân của $\pi$. Nhưng chúng ta sẽ không bao giờ có thể tính toán tất cả các chữ số của $\pi$ vì nó là một số vô tỉ (không phải số hữu tỉ), một số mà *tiếp tục mãi mãi mà không có một mẫu lặp lại nào*[†]. Tại sao

[†]Ngược lại, khai triển thập phân của một số hữu tỉ luôn kết thúc sau một số hữu hạn chữ số (ví dụ: $3/4 = 0.75$ hoặc thậm chí bắt đầu lặp lại một số hữu hạn cùng dãy các chữ số lặp đi lặp lại (ví dụ: $9/44 = 0.20454545\ldots$)

các nhà Toán học chỉ tìm ra 13 tỉ số của $\pi$ mà họ lại khẳng định số $\pi$ không bao giờ kết thúc? Bởi vì, vào năm 1760, Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) đã chứng minh $\pi$ là số vô tỉ. Đó là cái hay, cái đẹp của Toán học: chỉ cần dùng logic và lập luận, chúng ta có thể biết được những điều mà chúng ta không thể thấy và sờ mó được.

Giờ chúng ta sẽ xem Newton làm sao tìm ra Eq. (32.11). Ông dùng hai bảo đao do ông tìm ra: vi tích phân và nhị thức Newton. Trước hết, ông xét hình tròn đơn vị và tính diện tích của hình tô màu ở hình bên. Dùng tích phân, Newton biết diện tích này $A$ là $\int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}dx$. Nhưng từ hình học, ông cũng biết $A = \pi/12 + \sqrt{3}/8$ (tức là diện tích tam giác + diện tích cung tròn). Do đó,




$$\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}=\int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}dx \tag{32.12}$$

Tiếp theo Newton đem nhị thức Newton ra sử dụng:

$$(1-x^2)^{1/2}=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\cdots \tag{32.13}$$

Tức là ông thay $\sqrt{1-x^2}$ trong Eq. (32.12) bởi đa thức ở Eq. (32.13), và việc tích phân một đa thức thì dễ như ăn kẹo (không chỉ đối với Newton mà còn đối với chúng ta vì $\int x^n dx = x^{n+1}/n+1$):

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8} &= \int_0^{1/2}\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\frac{5}{128}x^8-\cdots\right)dx\\
\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8} &= \left[x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}-\frac{1}{8}\frac{x^5}{5}-\frac{1}{16}\frac{x^7}{7}-\frac{5}{128}\frac{x^9}{9}-\cdots\right]_0^{1/2}
\end{aligned}$$

Và đó là cách Newton tìm ra Eq. (32.11). Cuối cùng, Newton chỉ phải khai căn một lần (tính $\sqrt{3}$) và làm vài phép cọng trừ nhân chia là tìm ra $\pi$ với 15 số sau dấu thập phân. Ông hơn Archimedes vì ông *đứng trên vai những người khổng lồ*.

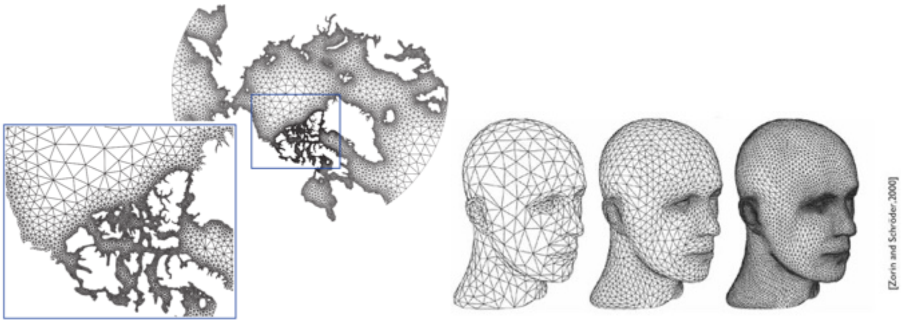
Nói về $\pi$ mà không nhắc tới Ramanujan thì thật thiếu sót, vào năm 1910 ông cho ta công thức sau cho $1/\pi$

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!}{(k!)^4}\frac{(1103+26390k)}{396^{4k}} \tag{32.14}$$

Chỉ với một số hạng (tức là $k=0$), chúng ta có $\pi = 3.14159273001330 55$! Mình không biết làm sao Ramanujan phát triển công thức này, nhưng mà nó hơn hẳn cách Newton tính $\pi$.

Mặc dù phương pháp của Archimedes không hiệu quả so với phép tích phân, ông và các nhà toán học Hy Lạp đã đúng khi tiến hướng về vô cực. Ý chính của việc tính một điều gì đó *hữu hạn*, chẳng hạn như diện tích của một hình cong, là chia nó thành nhiều phần nhỏ hơn, xử lý những phần này và khi số lượng phần tiến tới vô cùng, việc cộng chúng lại sẽ cho ra kết quả. Đây chính là điều Strogatz gọi là *Nguyên lý vô cực* trong cuốn sách của ông *The Power of Infinite*. Điều đáng chú ý là chúng ta thấy di sản của Archimedes trong thế giới hiện đại, ví dụ như trong Hình 32.6. Trong đồ họa máy tính và trong nhiều lĩnh vực kỹ thuật và khoa học, bất kỳ hình dạng nào cũng được xấp xỉ bằng một tập hợp các tam giác (đôi khi cũng sử dụng tứ giác). Sự khác biệt là chúng ta không tiến tới vô cùng trong quá trình này, vì chúng ta đang tìm một sự xấp xỉ. Lưu ý rằng những gì Archimedes làm là cố gắng để đạt được một câu trả lời chính xác.

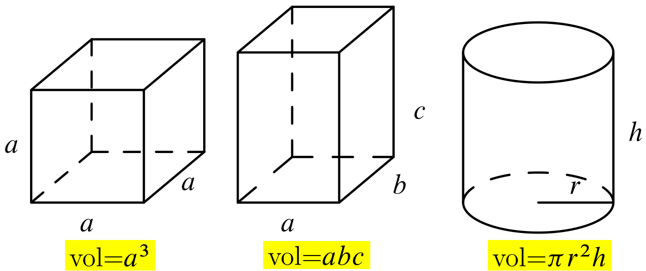
Sau diện tích là thể tích của các hình học 3D đơn giản (Hình 32.7). Cũng như các công thức diện tích, chúng ta không nên chấp nhận chúng, mà phải hiểu từ đâu các công thức thể tích xuất hiện. Vì đằng sau các công thức này là những ý tưởng toán học thú vị, liên quan đến vi tích phân.



(a) 2D (b) 3D

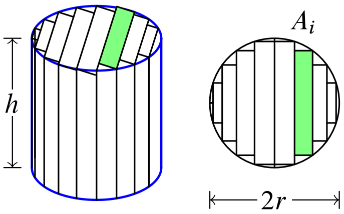
Hình 32.6: Di sản của Archimedes trong thế giới hiện đại: sử dụng tam giác và khối tứ diện để xấp xỉ bất kỳ hình 2D và đối tượng 3D nào.

Chúng ta bắt đầu với hình lập phương, và thể tích của một hình lập phương với cạnh $a$ là $a^3$. Tiếp đến là hình hộp chữ nhật: thể tích của một hình hộp chữ nhật với các cạnh $a, b, c$ là $abc$. Điều này rất đơn giản. Nhưng thể tích của một hình trụ là bao nhiêu? Một hình trụ là một đối tượng thú vị. Nó có phần tròn và nó cũng có phần thẳng.



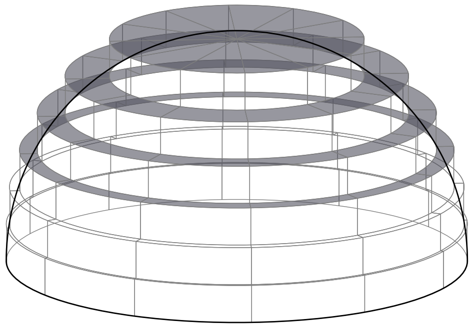

Hình 32.7: Thể tích của một hình lập phương, một hình hộp chữ nhật và một hình trụ. Thể tích của những hình thể này luôn là: diện tích đáy nhân với chiều cao.

Phương pháp tính thể tích của một hình trụ có chiều cao $h$ và bán kính $r$ là vẫn dùng nguyên lý vô cực: chia nó thành từng lát mỏng dọc (Hình 32.8). Mỗi lát là một hình hộp chữ nhật mỏng với chiều cao $h$ và diện tích đáy $A_i$, và có thể tích là $hA_i$. Thể tích của hình trụ là tổng thể tích của tất cả các hình hộp chữ nhật này khi số hình hộp tiến đến vô cực: $V = \lim_{n\to\infty} \sum_i^n hA_i = h \lim_{n\to\infty} \sum_i^n A_i$. Khi số lát càng lớn, tổng diện tích đáy của những hình chữ nhật này (tức $\sum_i A_i$) tiến dần đến diện tích đáy của hình trụ, tức là $\pi r^2$. Do đó, thể tích của hình trụ là $\pi r^2 h$: diện tích đáy nhân với chiều cao.

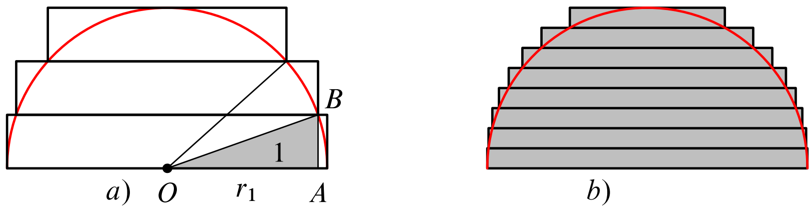



$$
\begin{aligned}
\text{vol} &= \sum \text{vol of cuboids} \\
&= \sum_{i=1}^{n} h \times A_i \\
&= h\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \\
&= h \times \pi r^2
\end{aligned}
$$

Hình 32.8: Phương pháp tiến dần để xác định thể tích của một hình trụ có bán kính $r$ và chiều cao $h$. Thể tích của hình trụ là $\pi r^2 h$: diện tích đáy nhân với chiều cao.



Cuối cùng, chúng ta xem xét về thể tích của một hình cầu có bán kính bằng một. Chiến lược của chúng ta là chia nửa trên của hình cầu này thành rất nhiều hình trụ có cùng chiều cao. Chúng ta đã biết thể tích của hình trụ bán kính $r$ và chiều cao $h$ là $\pi r^2 h$ và chúng ta chỉ cần cộng tất cả các thể tích này lại (xem hình bên cạnh). Khi số hình trụ là rất lớn thì tổng thể tích các hình trụ tiệm cận thể tích nửa hình cầu. Đó là ý chính. Còn lại chỉ là vấn đề kỹ thuật. Lưu ý rằng đây không phải là cách duy nhất để chia hình cầu: chúng ta cũng có thể sử dụng các hình trụ vừa vặn bên trong hình cầu. Nhưng điều này không quan trọng khi chúng ta xem xét $n \to \infty$.




Hình 32.9: Tính thể tích của một nửa hình cầu bán kính đơn vị. Bán cầu được chia thành $n$ hình trụ có chiều cao $AB = 1/n$. Trong (a) $n = 3$ và trong (b) $n = 8$. Các hình trụ được đánh số từ dưới lên, bắt đầu từ 0; hình trụ thứ $i$ có bán kính $r_i = \sqrt{1-(i/n)^2}$ từ định lý Pythagoras (cho tam giác vuông $OAB$ với $OB = 1$ và $OA = r_1$). Hình trụ thứ $i$, vì vậy, có thể tích là $\pi r_i^2(1/n)$. Nếu bạn còn thắc mắc về $r_i$ thì cứ cho $n = 3$, rồi tính $r_0, r_1, r_2$, từ đó bạn sẽ hiểu công thức tính $r_i$.

Tham khảo Hình 32.9a, hình trụ thứ $i$ có thể tích là $\pi r_i^2(1/n)$. Do đó, thể tích $V$ của hình cầu, tức hai lần tổng của thể tích của $n$ hình trụ khi $n$ rất lớn, là:

$$V = 2\lim_{n\to\infty} \pi \left[1 + \left(1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2\right) + \left(1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2\right) + \cdots + \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)\right]\frac{1}{n}$$

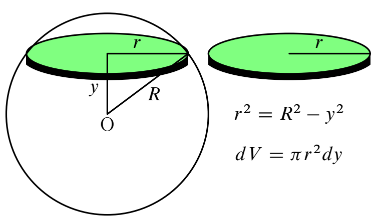
Bây giờ, chúng ta lại có một bài toán về đại số. Hãy mát xa một chút biểu thức trên và chúng ta sẽ thấy điều gì đó quen thuộc:

$$V = 2\pi \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[n - \frac{1}{n^2}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\right)\right]$$

Tổng của bình phương của $n-1$ số tự nhiên đầu tiên! Chúng ta biết cách tính tổng này, xem Eq. (36.17). Vì vậy, chúng ta có

$$V = 2\pi \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\right) = 2\pi\left[1 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right] = 2\pi\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} \tag{32.15}$$

Vì vậy, thể tích của một hình cầu bán kính $r$ là $(4/3)\pi r^3$.



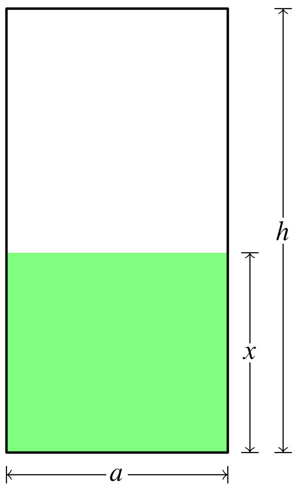

Bây giờ chúng ta cùng xem cách tính thể tích hình cầu dùng giải tích nhé. (Nếu bạn chưa học giải tích thì xin bỏ qua.) Chúng ta sẽ tính thể tích của một quả cầu bán kính $R$ như sau (xem hình). Chúng ta xem xét một lát mỏng có độ dày $dy$–cũng chính là một hình trụ–có thể tích là $\pi r^2 dy$, với $r^2 = R^2 - y^2$ trong đó $R$ là bán kính của quả cầu và $y$ là khoảng cách từ gốc đến lát mỏng. Do đó, tổng thể tích, tức là tổng của thể tích của tất cả các lát này, là:

$$V = 2\int_0^R \pi(R^2 - y^2)dy = \frac{4\pi R^3}{3}$$

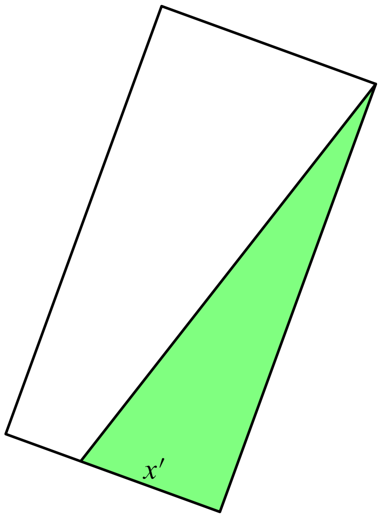
Chúng ta cần hệ số 2 vì chúng ta chỉ xem xét các lát của nửa trên của hình cầu.

Vậy cách nào có trước? Bạn thử trả lời đi. Archimedes đã biết công thức tính thể tích hình cầu 2 000 năm trước khi Newton và Leibnitz phát triển giải tích. Do đó cách tính Eq. (32.15) phải có trước. Như vậy, cái hồn của giải tích đã có từ thời Archimedes, cái ông và các nhà toán học thời ông thiếu là đại số với $x, y, z$, hệ thập phân với 10 con số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Newton và Leibniz có tất cả những thứ này. Bằng cách trình bày cách tính thể tích hình cầu không và có sử dụng giải tích, các bạn trẻ sẽ hiểu sâu hơn về tích phân: trong cái dấu $\int \square dx$ đó là tổng của rất nhiều đại lượng siêu nhỏ.

Giờ thì chúng ta sẽ giải câu đố trình bày ở Chương 33. Xin được nhắc lại rằng câu đố như sau: Có một cái thùng không có nắp và một ít rượu bên trong. "Rượu trong thùng nhiều hơn một nửa (thùng)," một người phụ nữ nói. "Không, không phải vậy," người đàn ông nói. "Nó ít hơn một nửa." Không cần bất kỳ công cụ đo lường nào và không cần rót rượu ra khỏi thùng, làm thế nào để dễ dàng xác định ai đúng?




(a) ban đầu




(b) sau khi nghiêng

Hình 32.10

Chúng ta có thể vẽ Hình 32.10a trong đó màu xanh tượng trưng cho rượu trong thùng, và chúng ta cần xác định liệu $x > 0.5h$ hay $x < 0.5h$. Để tìm ra lời giải thì chúng ta *phải động tay động chân*: và ở đây không có cách nào khác ngoài nghiêng thùng rượu như vẽ trong Hình 32.10b. *Do lượng rượu trước và sau khi ta nghiên thùng là không đổi*, ta có phương trình sau (chú ý là chúng ta đang áp dụng công thức diện tích hình chữ nhật và tam giác):

$$ax = \frac{1}{2}x'h \iff \boxed{a(2x) = x'h}$$

Nhưng ta biết $x' < a$ (đây là trường hợp trong Hình 32.10b) do đó $h$ phải lớn hơn $2x$. Và từ đó ta suy ra $x < 0.5h$. Cuối cùng lời giải cho câu đố: Nếu đáy của thùng rượu có thể nhìn thấy, thì thùng rượu ít hơn một nửa. Nếu đáy của thùng rượu vẫn hoàn toàn được che phủ bởi rượu, thì thùng rượu nhiều hơn một nửa.

Ghi chú: Tại sao phải nghiêng thùng cho tới khi rượu chạm mép thùng? Có ba khả năng: (1) nghiêng cho rượu đổ ra khỏi thùng (loại), (2) nghiêng sao cho rượu chưa chạm mép và (3) rượu chạm mép. Rõ ràng là (2) đòi hỏi tới hai ẩn số trong khi (3) thì chỉ có một ẩn là $x'$, ẩn kia thành $h$–cái ta đã biết.

Ngày 2 tháng 7 năm 2023

# Chương 33

# Hình học: Euclid và Elements

Có người đã từng nói rằng sách trên thiên hạ chia làm 3 loại:

1. Kinh Thánh
2. The Elements của Euclid, và
3. Phần còn lại.

Harry Porter mô? Lộc Đỉnh Ký đâu? Chiến tranh và Hòa bình where? Thì ... trong phần còn lại đó.

Không cần trí tuệ siêu đẳng của Einstein thì chúng ta cũng đoán được là người có nhận xét này hoặc là một nhà Toán học hay chí ít thì cũng là một fan hâm mộ của MFC[†]. (Nếu bạn buộc mình phải nói đó là ai thì xin thưa đó chính là Vũ Phính. Đùa tí thôi. Muốn lắm. Tiếc là mình không đủ tự tin để phán mạnh dạn như vậy).

Johannes Kepler (1571–1630)–nhà khoa học người Áo phát hiện ra 3 định luật về quỹ đạo các hành tinh–đã từng nói:

> *Ở đâu có vật chất ở đó có hình học.*

Tiếc là mình đã bỏ qua hình học lúc nhỏ. Mình nhớ hình học cấp hai chỉ là chứng minh tam giác đồng dạng. Nào là dùng cạnh-góc-cạnh nè, nào là góc-cạnh-góc... Thầy cô còn có phấn màu và cái bảng đen thật to để vẽ, mình không có, chỉ có 1 màu và tờ giấy A4 nhỏ xiu, làm hình học rất khó chịu. Một cái hình bé xíu mà chứa nào là tam giác, hình tròn, điểm, rồi cạnh nào bằng nhau, góc nào bằng nhau... Rất khó để biết cái gì có trước, cái gì chưa có.

Và đáng buồn nhất là không biết tại sao việc hai tam giác đồng dạng lại quan trọng đến vậy?

Giờ đây, ở tuổi 42, mình quyết định sẽ học lại hình học, từ con số 0. Có lẽ để vài bữa dạy cho 2 đứa con nhà mình. Và sau khi học như vậy mình mới thấy cái hay của hình học. Xin chia sẻ với các bạn trẻ vài điều về hình học.

Chương này chia ra làm ba phần. Ở phần 33.1, chúng ta cùng xem xét bức tranh tổng thể của hình học Euclid; ý nghĩa của nó là gì; tại sao mọi người quan tâm nó. Tiếp theo, ta đi vào chi tiết với một số định lý quan trọng của hình học Euclid (phần 33.2). Cuối cùng phần 33.3 trình bày một số bài tập hình học.

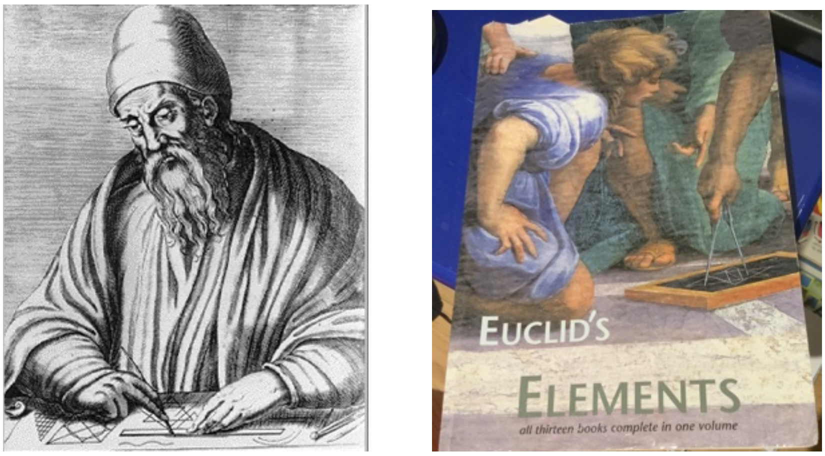
## 33.1 Bức tranh tổng thể của hình học phẳng

Dù có là gì thì cuốn *The Elements* của Euclid là một trong những quyển sách quan trọng nhất của nhân loại. Không bàn cãi! Nhiều nhà khoa học, như Nicolaus Copernicus, Johannes Kepler, Galileo Galilei, Albert Einstein, Bertrand Russell và Isaac Newton, đều bị ảnh hưởng bởi cuốn

[†]MFC=Maths Football Club

sách "The Elements". Trong cuốn tự truyện của mình, nhà Toán học, triết học người Anh Bertrand Russell (1872–1970) đã kể lại cuộc khủng hoảng thời trẻ của mình: 'Có một lối đi bộ băng qua những cánh đồng đến New Southgate, và tôi thường đến đó một mình để ngắm hoàng hôn và định tự tử. Tôi đã không, làm thế nào. bao giờ tự tử, vì tôi muốn biết nhiều hơn về toán học.' Wow, thật không thể tin nổi lại có một người yêu toán đến như vậy. Khi Russell mười một tuổi, anh trai Frank giới thiệu tác phẩm của Euclid cho ông, tác phẩm mà ông mô tả trong cuốn tự truyện của mình là *"một trong những sự kiện trọng đại của cuộc đời tôi, chói lọi như mối tình đầu"*. Albert Einstein thì nhớ lại một bản sao của *The Elements* và một la bàn từ trường là hai món quà có ảnh hưởng lớn đối với ông lúc còn là một cậu bé, nhấn mạnh *The Elements* như một 'cuốn sách hình học thiêng liêng bé nhỏ'.

Vậy Euclid này là ai mà dữ tợn vậy? Euclid (300 TCN) là một nhà toán học Hy Lạp cổ đại, người được coi là “cha đẻ của hình học" (Hình 33.3). Ông làm gì mà được cái danh hiệu mỹ miều (mà có lẽ lúc sống ông chưa được nghe) "cha đẻ của hình học"? Ông không làm gì hết, ông viết ra *The Elements*. Trong bộ sách gồm có 13 cuốn (mà giờ chúng ta gọi là chương, bản mình mua dày 500 trang, xem Hình 33.1b) này Euclid đã tổng hợp lại các kiến thức Toán học đương đại về hình học, đại số và số học.



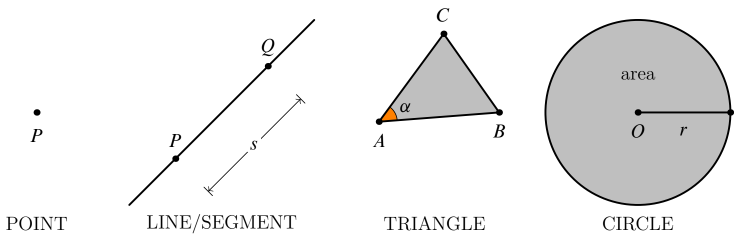

(a) (b)

Hình 33.1: Euclid và tuyệt phẩm *The elements*.

Cái đóng góp quan trọng của Euclid không phải là ghi chép lại các kết quả Toán học một cách rời rạc; thay vào đó ông đã trình bày chúng thành một hệ thống hình học hoàn chỉnh và khép kín. Hệ thống về cái gì? Về hình học. Mà hình học gồm có những đối tượng nào? Đây là câu hỏi đầu tiên Euclid phải trả lời. Như vậy Euclid bắt đầu kiệt tác đời mình bằng các định nghĩa. Ông định nghĩa: điểm là gì, đoạn thẳng là gì, đường thẳng là gì, góc vuông là gì... (Hình 33.2). Ông làm điều này trước hết để tất cả người đọc và ông cùng hiểu là chúng ta đang nói về cái gì. Nhưng mà hãy xem Euclid định nghĩa điểm nhé:

> *"Một điểm là cái không có phần."*

Cái gì thế này? Mình đã hơn 40 tuổi mà chưa bao giờ mình thấy 1 điểm nào cả! Bạn chỉ cho mình đâu là cái điểm thì mình xin khăn gói lên đường đến xem liền, dù nó có ở Hy Mã Lạp Sơn. Không ai, trong quá khứ, bây giờ, và 1000 năm nữa thấy điểm cả. Chúng ta có thể thấy một chấm (một chấm mực chẳng hạn), hay một chấm bút chì lên trang giấy. Như vậy điểm là một *khái niệm trừu tượng*–khái niệm không tồn tại trong thế giới thực. Nhưng từ mô mà các nhà Toán học nghĩ ra cái khái niệm điểm này? Từ cái chấm đó, các bạn. Từ cái chấm bình dị đó, nếu chúng ta không quan tâm tới kích thước thì sẽ có cái gọi là điểm. Nhưng tại sao lại không quan tâm tới kích thước của cái chấm? Rất đơn giản: vì như vậy thì quá phức tạp, và quan trọng nhất là các chấm sẽ hoàn toàn khác nhau! Chúng ta có thể là anh A 50kg, siêu mẫu B 30 kg hay ông C 80 kg nhưng chúng ta đều có 2 con mắt. Tương tự như vậy, không ai thấy được một đoạn thẳng như Euclid trình bày cả. Vì đoạn thẳng của Euclid không có bề dày, nó vô cùng mỏng.




Hình 33.2: Các đối tượng nghiên cứu của hình học Euclid.

Sau khi định nghĩa các đối tượng điểm, đoạn thẳng ... thì Euclid làm gì tiếp theo? Toán học là logic suy luận (dịch từ chữ deduction) theo kiểu "nếu A thì B"; ví dụ 'Tất cả đàn ông đều hút thuốc; Sherlock Holmes là một người đàn ông; do đó, Sherlock Holmes hút thuốc'. Suy luận là rút ra một kết luận từ một cái gì đó đã biết hoặc giả định đúng. Đây là kiểu lập luận mà chúng ta sử dụng trong hầu hết các bước của một lập luận toán học. Ví dụ, để giải $2x = 6$ cho $x$, chúng ta chia cả hai vế cho 2 để được $2x/2 = 6/2$ hoặc $x = 3$. Điều chúng ta biết hoặc giả định là $2x = 6$ và bạn có thể chia cả hai vế của một phương trình cho bất kỳ số khác không và phương trình vẫn đúng. Và từ đó, chúng ta suy ra rằng $x = 3$.

Như vậy chúng ta phải bắt đầu từ A, rồi dùng logic để suy ra B, rồi từ B (hoặc cả A/B) ra C. Rồi từ C (hay cả B,C) suy ra D. Và cứ thế cho tới khi tận thế thì dừng!

Euclid gọi A là các tiên đề (TD) và B (hay C, D) là định lý. Tiên đề là cái gì dễ hiểu mà chúng ta chấp nhận đúng; chúng là luật của cuộc chơi. Ông dùng 5 tiên đề như sau:

1. TD1. Hai điểm bất kỳ có thể nối với nhau bằng một đường thẳng.
2. TD2. Bất kỳ đoạn thẳng nào cũng có thể kéo dài vô hạn theo một đường thẳng.
3. TD3. Với bất kỳ đoạn thẳng nào, một đường tròn có thể được vẽ có bán kính là đoạn thẳng và một điểm cuối là tâm.
4. TD4. Tất cả các góc vuông đều bằng nhau
5. TD5. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng làm cho các góc trong cùng một phía nhỏ hơn hai góc vuông, nếu kéo dài đường thẳng này thì nó sẽ cắt ở cạnh có hai góc bé hơn hai góc vuông.

Viết xong TD5 mà mình cũng không hiểu Euclid muốn nói cái gì luôn. Đây là dấu hiệu TD5 là cái gì đó đặc biệt, không như mấy TD kia.

Ý nghĩa của các TD này là gì? TD1 nói rằng cứ có 2 điểm là có đường thẳng. Như vậy TD1 là về sự tồn tại của khái niệm đường thẳng. Euclid bảo đảm rằng ông sẽ không bị các triết gia làm phiền với câu hỏi: "Vì răng có đường thẳng, Euclid?" Euclid chỉ cần trả lời: răng chi mà răng, thì vì TD1, đó là luật chơi. Răng đá banh không có 12 cầu thủ? Không chỉ là luật chơi, cũng dễ thấy là TD là một sự thật dễ nhận biết (Trừ cái TD5 chết tiệt!): trên tờ giấy, chấm 2 điểm, dùng thước nối lại sẽ có 1 đường thẳng. Không dễ thì còn là gì?

TD2 thì về sự bao la của không gian. Trên tờ giấy A4 thì đường thẳng là hữu hạn, nhưng mà thử tưởng tượng là 2 điểm nằm trong không trung thì có thể kéo dài thoải mái (chưa tới biên giới của vũ trụ thì mỏi tay rồi nên TD2 cũng ok). TD3 rõ ràng là về sự tồn tại của hình tròn. Mà hình tròn thì Euclid và các nhà Toán học cổ thấy nhiều: mặt trăng nè, mặt trời nè, gợn sóng trên ao, tròng mắt nè.

TD4 thật vớ vẫn. Hai góc vuông thì bằng nhau, sao cần TD này? TD này bảo đảm rằng không gian là bình đẳng: góc vuông của anh bằng góc vuông của tui, dù chúng nằm ở vị trí nào đi nữa.

Còn TD5 thì răng, Vũ Phính? Cái này mình không chém hay bằng Jordan Ellenberg[†]. Jordan đã từng viết

[†]Jordan Stuart Ellenberg (sinh năm 1971) là một nhà toán học người Mỹ, là giáo sư toán học tại Đại học Wisconsin–Madison. Nghiên cứu của ông liên quan đến hình học số học. Ông cũng là tác giả của cả tiểu thuyết và phi hư cấu. Ellenberg là một thần đồng, người đã tự học đọc từ năm hai tuổi bằng cách xem Sesame Street.

*"TD5 là một TD xấu xí. Một tiên đề xấu xí giống như một vết nhơ ở góc sàn nhà; bản thân nó không cản đường bạn, nhưng nó làm bạn phát điên, và bạn phải tốn quá nhiều thời gian để cọ rửa và cọ rửa, và cố gắng làm cho bề mặt sạch và đẹp. Trong bối cảnh toán học, điều này có nghĩa là cố gắng chỉ ra rằng tiên đề thứ năm là hệ quả của tất cả những tiên đề khác. Nếu đúng như vậy, tiên đề này có thể bị loại bỏ khỏi danh sách (các tiên đề) của Euclid, khiến nó sáng bóng và nguyên sơ".*

Vì nó xấu xí nên nhiều nhà Toán học cố gắng làm đẹp nó. Ví dụ Playfair chứng minh TD5 tương đương với: "qua một điểm không thuộc đường thẳng cho trước có đúng một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho và đi qua điểm đã cho". Và cũng kể từ đây thay vì dùng TD5 của Euclid mọi người chuyển qua xài TD của Playfair–gọi là TD song song. Vì nó dễ phát biểu hơn.

Sau khi có các đối tượng (điểm, hình tròn,...), có luật chơi (5 tiên đề) thì Euclid bắt đầu have fun thôi. Ông dùng logic nếu A thì B và chứng minh cả trăm định lý. Một định lý là một hệ quả của các định nghĩa và tiên đề. Ví dụ, dùng TD5 ông chứng minh được rằng ba góc của một tam giác[††] cộng lại 180 độ. Tại sao 180 độ? 200 độ cho đẹp được không? Xin thưa đây không phải là số điện thoại mà muốn đổi là đổi! Một khi mọi thứ (định nghĩa và TD) đã chuẩn bị xong thì chúng ta không thể kiểm soát hành vi của các đối tượng hình học! Góc của một tam giác cọng lại chính xác 180 độ. Không thể khác hơn. Nếu bạn muốn 190 độ thì phải dùng kềm mà bóp méo cái tam giác đi. Nhưng đừng quên rằng lúc đó cái hình méo sẹo đó không còn là một tam giác của Euclid; và vì vậy nó không cần tuân theo quy luật của hình học Euclid. Vì lí do này mà nhiều triết gia cho rằng toán học là do con người phát hiện ra chứ không phải là sản phẩm do con người tạo ra. Mà ai tạo ra thì kệ cha nó, vì không liên quan tới mình.

| Các tiền đề<br>(sự thật hiển nhiên) | $\xrightarrow[\text{logic}]{}$ | Các định lý<br>(hệ quả) |
|---|---|---|

Hình 33.3: Bức tranh tổng thể của hình học Euclid.

Như vậy, hình học Euclid, nhìn một cách tổng thể, là một hệ thống bắt đầu với các tiền đề và dùng logic để tìm ra hệ quả của chúng (Hình 33.3).

Ngay cả Euclid cũng ruồng bỏ TD5, đứa con út của ông. Trong 23 định lý đầu tiên ông không dùng tới TD5. Chuyện này như ra trận đánh nhau, trong khi bốn anh trai đều được cưỡi ngựa cầm đao ra trận giết giặc, còn cậu út TD5 thì đứng nhìn thôi. Nhưng cuối cùng thì Euclid cũng phải dùng tới cậu út. Ông dùng nó để chứng minh góc của 1 tam giác cọng lại 180 độ. Có bao giờ bạn tự hỏi trong các định lý hình học cái nào quan trọng nhất? Nếu chưa thì xin thưa, nên có những câu hỏi như vậy. Để làm chi? Để cho vui. Theo mình thì đó chính là định lý Pythagore: $a^2 = b^2 + c^2$. Nó quan trọng vì chính nó cho phép chúng ta tính khoảng cách giữa 2 điểm trong không gian.

Vậy các nhà Toán học còn bận cọ rửa vết nhơ góc sàn (TD5) không? May cho họ là vào những năm 1820s thì Gauss, Bolyai, Lobachevsky, và Riemann đã cọ xong nó. Mấy vị này nói rằng hãy quên TD5 đi, thay vào đó dùng TD khác, ví dụ:

*"qua một điểm không thuộc đường thẳng cho trước KHÔNG CÓ một đường thẳng nào song song với đường thẳng đã cho và đi qua điểm đã cho".*

hoặc

[††]nếu bạn hỏi tam giác ở mô chui ra thì bạn rất good–tam giác thì từ 3 đường thẳng thôi.

> *"qua một điểm không thuộc đường thẳng cho trước có VÔ SỐ đường thẳng song song với đường thẳng đã cho và đi qua điểm đã cho".*

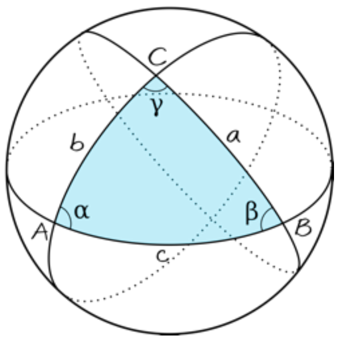
Và lúc làm như vậy họ đã tạo ra hệ thống hình học khác hệ thống của Euclid. Do đó, Gauss đặt tên cho hệ thống của Euclid là *Euclidean geometry* (hình học Euclid), và những cái khác là *non-Euclidean geometries* (hình học phi Euclid). Cái mà Gauss, Bolya và Lobachevsky tìm ra gọi là hình học hyperbolic còn hình học do Riemann tìm ra gọi là hình học eliiptic. Tại sao có hyperbolic và elliptic ở đây? Hỏi hay lắm. Nhưng mình không thể trả lời bạn ở đây.

Thì ra có nhiều hệ thống hình học, tùy thuộc vào luật chơi! Bức tranh tổng thể của hình học này được trình bày ở Hình 33.4: cứ thoải mái tạo ra các 'tiền đề' miễn sao chúng không mâu thuẫn lẫn nhau, chúng ta sẽ có nhiều hệ thống hình học khác nhau. Vậy thì hình học nào mô tả đúng không gian chúng ta đang sống? Câu này thì các nhà Toán học đách quan tâm. Chính các nhà Vật lý mới quan tâm. Và Einstein cho chúng ta biết không gian chúng ta sống tuân theo hình học phi Euclid, chứ không phải là hình học Euclid mà chúng ta quen biết.

Các giả thiết (do người tạo ra) $\xrightarrow[\text{logic}]{}$ Các định lý (hệ quả)

Hình 33.4: Bức tranh tổng thể của hình học phi Euclid.

Một điều rất thú vị và trớ trêu là: thật ra hình học phi Euclid đã tồn tại cùng với hình học Euclid ngay chính từ lúc Euclid viết *The Elements*! Ptolemy, vì nhu cầu giải quyết các bài toán thiên văn, đã phát triển lượng giác cầu (tiếng Anh là spherical trigonometry). Lượng giác cầu này nghiên cứu gì? Nghiên cứu các tam giác trên một hình cầu. Mà tam giác trên hình cầu thì góc cộng lại luôn lớn hơn 180 độ!!! Không là hình học phi Euclid thì là gì? Ô hay. Thế sao các nhà Toán học vĩ đại của chúng ta không biết, phải chờ mãi tới thế kỷ 18/19? Nguyên nhân là, dù là những người rất sáng tạo, các nhà Toán học cũng rất bảo thủ!




Vậy tại sao tới thế kỷ 18 thì các nhà Toán học thay đổi nhân sinh quan? Các bạn hỏi nhiều quá Phính này mệt rồi. Thôi các bạn đi tìm hiểu đi nhé.

Nhắc tới Bolya mà không nhắc tới câu chuyện hai cha con ông thì quả là thiếu sót. Sau khi phát hiện ra hình học hyperbolic, ông viết cho cha mình:

> *"Con đã phát hiện ra những điều kỳ diệu đến mức con vô cùng kinh ngạc, và sẽ là một điều xui xẻo vĩnh viễn nếu chúng bị mất. Khi cha, Cha thân yêu của con, nhìn thấy chúng, cha sẽ hiểu; hiện tại con không thể nói gì ngoại trừ điều này: rằng con đã tạo ra một vũ trụ mới kỳ lạ từ hư vô."*

Các bạn nên nhớ rằng cha của Bolya cũng là một nhà Toán học và làm việc với TD5 lâu rồi. Ông thậm chí còn khuyên con đừng đụng vào cái TD5 này:

> *"Con không được cố gắng tiếp cận tiên đề song song này. Cha biết con đường này đến tận cùng. Cha đã đi qua đêm không đáy này, nó đã dập tắt mọi ánh sáng và niềm vui trong cuộc đời cha. Cha cầu xin con, hãy để khoa học về sự song song một mình. .."*

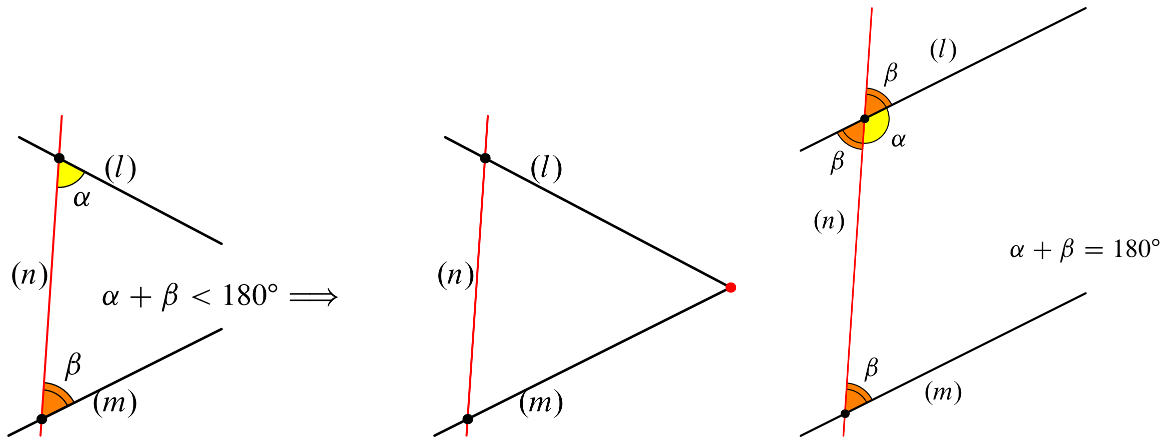
Như vậy con trai không phải lúc nào cũng nên nghe lời cha ☺.

## 33.2 Vài định lý quan trọng của hình học phẳng

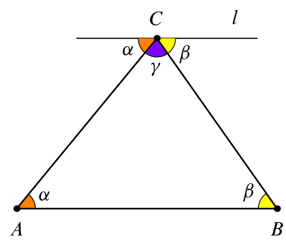
Phần này trình bày một số định lý cơ bản của hình học phẳng. Chúng ta bắt đầu với tiên đề 5 và hệ quả ở phần 33.2.1. Sau đó chúng ta xem xét góc trong của đa giác đều ở phần 33.2.2. Định lý tỉ lệ cơ bản sẽ được trình bày ở phần 33.2.3. Tam giác đồng dạng là chủ đề của phần 33.2.4. Phần 33.2.5 bàn về định lý Pythagoras nổi tiếng cho tam giác vuông. Sau đó, ta sẽ bàn các định lý về đường tròn (phần 33.2.6) và tiếp tuyến đường tròn (phần 33.2.7).

### 33.2.1 Tiên đề song song và hệ quả

Xin nhắc lại rằng TD5 phát biểu như sau (Hình 33.5a): Một đường thẳng $(n)$ cắt hai đường thẳng $(l)$ và $(m)$ sao cho các góc trong cùng một phía nhỏ hơn hai góc vuông (tức là $\alpha + \beta < 180°$), thì khi được kéo dài $(l)$ và $(m)$ sẽ cắt nhau ở phía có hai góc bé hơn hai góc vuông. Hệ quả của TD5: nếu $\alpha + \beta = 180°$ thì $(l)$ song song $(m)$: ta viết $(l) \parallel (m)$, xem Hình 33.5b. Thay vì nói $\alpha + \beta = 180°$ thì ta nói hai góc so le trong bằng nhau thì $(l) \parallel (m)$. Vì điều ngược lại cũng đúng, ta có: khi một đường thẳng cắt 2 đường thẳng khác, hai góc so le trong bằng nhau *khi và chỉ khi* hai đường này song song. Nếu ta giới thiệu thêm khái niệm góc đồng vị, thì ta lại có: hai đường thẳng song song khi và chỉ khi hai góc đồng vị bằng nhau.



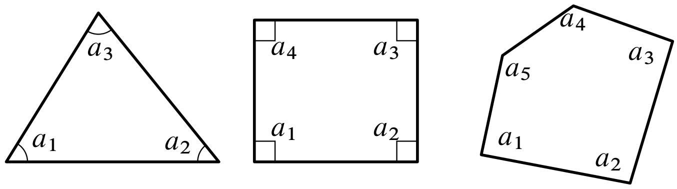

Hình 33.5: Tiên đề 5 và hệ quả. Trường hợp đặc biệt $\alpha = \beta = 90°$: hai đường thẳng $\perp$ (vuông góc) với 1 đường thẳng khác thì song song với nhau.




**Tổng các góc trong một tam giác là** $180°$. Giờ đây mình sẽ trình bày một tính chất đẹp của tam giác, đó là tổng các góc của một tam giác bằng $180°$. Mình muốn nhấn mạnh rằng kết quả này là một hệ quả của tiên đề song song. Nếu $\alpha, \beta$ và $\gamma$ là các góc của bất kỳ tam giác nào thì $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Để chứng minh kết quả này, hãy vẽ một đường $l$ đi qua điểm $C$, song song với đoạn $AB$. Sau đó, góc ở bên trái dưới $l$ là góc so le với góc $\alpha$ trong tam giác, nên nó bằng $\alpha$. Tương tự, góc bên phải dưới $l$ bằng $\beta$. Cuối cùng, ta xét các góc tại điểm $C$ mà tổng là $360°$, chúng ta có ngay $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

### 33.2.2 Góc trong các đa giác lồi

Góc nội của một đa giác là góc được tạo bởi hai cạnh của đa giác mà có một điểm chung. Một sự thật rất rõ ràng là tổng của ba góc nội của một tam giác là $180°$. Từ Hình 33.6, sự thật này được viết dưới dạng $a_1 + a_2 + a_3 = 180°$. Bây giờ chúng ta chuyển sang hình chữ nhật, rất rõ ràng rằng $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 360°$ vì mỗi góc là góc vuông (hoặc $90°$). Từ đây, chúng ta đoán rằng đối với đa giác lồi có $n$ cạnh, tổng của các góc là $180°(n - 2)$. Điều này được gọi là định lý góc nội tiếp. Ít nhất nó đúng đối với tam giác ($n = 3$, tổng góc là $(3 - 2)180° = 180°$) và hình chữ nhật ($n = 4$).




Hình 33.6: Tổng của các góc nội của một đa giác lồi có $n$ cạnh là $180°(n-2)$?

Có một cách chứng minh khác mà không sử dụng các góc ngoại. Ý tưởng là phân chia một đa giác thành các tam giác và sử dụng sự thật rằng tổng các góc của một tam giác là $180°$. Giả sử chúng ta có một đa giác có $n$ cạnh $A_1A_2...A_n$. Từ đỉnh $A_1$, chúng ta vẽ các đường chéo $A_1A_3, A_1A_4, \ldots, A_1A_{n-1}$. Có $n-3$ đường chéo như vậy làm cho $n-2$ tam giác. Vẽ một hình để thấy tất cả điều này. chúng ta có tổng góc nội:

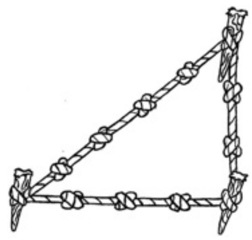
$$\boxed{a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (n-2)180°}$$

Đối với một đa giác đều $n$ cạnh, chúng ta có $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \alpha$, công thức trên sau đó cho chúng ta

$$\boxed{\text{Góc nội của đa giác đều } n \text{ cạnh: } \alpha = (1 - {}^2\!/_n)180°} \tag{33.1}$$

Chúng ta có thể đọc được gì từ công thức này? Đầu tiên, tất cả các góc nội của các đa giác đều là nhỏ hơn $180°$ (bởi vì chúng là $180°$ nhân với một hệ số nhỏ hơn một, tức là $1-2/n$). Thứ hai, một đa giác đều càng có nhiều cạnh thì góc nội của nó càng lớn†.

### 33.2.3 Định lý Thales hay định lý tỉ lệ cơ bản

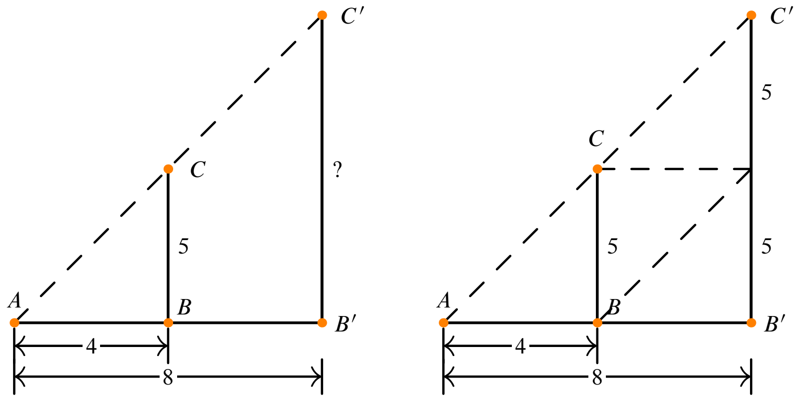


Thales sinh ra tại Miletus (ngày nay là Thổ Nhĩ Kỳ). Ông đã đi du lịch đến Babylon và Ai Cập, tính toán chiều cao của các kim tự tháp bằng cách đo đạc độ dài bóng của chúng trên mặt đất. Và từ đó chúng ta bắt đầu có hình học Euclid. Như vậy, người Babylon và Ai Cập đã xây dựng nhiều công trình (nổi tiếng nhất có lẽ là kim tự tháp), và họ chắc chắn có dùng hình học. Tuy nhiên họ không phải là các nhà toán học như Thales, Euclid ... Chẳng hạn, họ sử dụng tam giác $3-4-5$ để có một góc vuông (xem hình kế), nhưng họ không tổng quát hóa thành định lý Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$. Hình học như vậy phát triển từ thực tế, và học hình học cũng nên bắt đầu từ thực tế, như là đo chiều cao cây sồi trong trường như David Mumford, nhà toán học người Mỹ đoạt Huy chương Fields, đã viết

> *"Tôi đã cố gắng (không thành công) thuyết phục từng trường trung học mà con tôi đã theo học ra ngoài trong giờ học hình học để đo đạc chiều cao thật sự của cây sồi trong sân."*

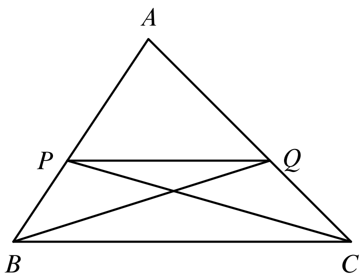
Thales chắc chắn là người đã chỉ cho chúng ta cách đo chiều cao của cây $B'C'$ mà không cần phải leo lên nó (xem Hình 33.7a). Hãy gọi $AB'$ là bóng của cây; chúng ta đặt một cây gậy thẳng đứng $BC$ sao cho $AB$ là bóng của cây gậy. Sau đó, chúng ta đo độ dài $AB$, chẳng hạn 4 mét, đo độ dài $AB'$, chẳng hạn 8 mét, và cây gậy $BC$, chẳng hạn 5 mét. Sao bao nhiêu đo đạc như vậy, liệu cuối cùng ta có thể tính $B'C'$ không? Bằng cách di chuyển $\triangle ABC$ ngang dọc theo $AB'$, rồi di chuyển lên sao cho $C$ trùng với $C'$ (Hình 33.7b), ta có ngay $B'C' = 5 + 5 = 10$. Con số 10 này có gì đặc biệt? Nó là hai lần năm, do đó $B'C' = 2BC$, khi $AB' = 2BC$. Và từ đó, ta có định lý Thales như sau.

†So sánh tam giác đều có góc $60°$ và hình vuông có góc $90°$.




(a) (b)

Hình 33.7: Thales đo chiều cao cây sồi $B'C'$ một cách gián tiếp.




Xem xét tam giác $ABC$ và đoạn thẳng $PQ$ cắt $AB$ và $AC$ sao cho $PQ \parallel BC$. Thales nói rằng $PQ$ cắt $AB$ và $AC$ theo tỉ lệ:

$$\text{nếu } PQ \parallel BC \text{ thì } \quad \frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|AQ|}{|QC|}, \quad \text{hay} \quad \frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|AQ|}{|AC|}$$

(Ký hiệu $|AB|$ là để chỉ chiều dài của $AB$; trong sách giáo khoa toán cấp 2, nó thường được viết là $AB$, không chính xác lắm vì đoạn thẳng và độ dài của nó là hai chuyện khác nhau). Để chứng minh định lý Thales, chúng ta cần một kết quả cơ bản về diện tích của một tam giác: diện tích là một nửa tích của đáy và chiều cao. Trước hết, ta *vẽ* thêm (chẳng có gì khác) $PC$ và $BQ$. Bây giờ, chúng ta có hai tam giác mới $PBQ$ và $QCP$ và chúng có cùng diện tích (vì chúng có cùng đáy $PQ$ và cùng chiều cao là khoảng cách từ $PQ$ đến $BC$). Tiếp theo, chúng ta xem xét các tam giác $APQ$ và $PBQ$, diện tích của chúng là

$$\text{diện tích } APQ = h \times |AP|, \quad \text{diện tích } PBQ = h \times |PB|$$

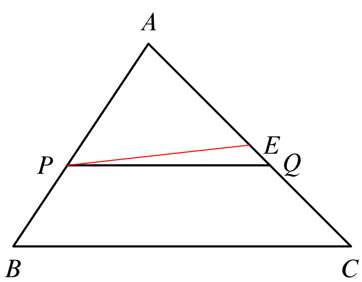
trong đó $h$ là khoảng cách từ $Q$ đến $AB$. Từ đó, chúng ta có:

$$\frac{\text{diện tích } \triangle APQ}{\text{diện tích } \triangle PBQ} = \frac{|AP|}{|PB|} \tag{33.2}$$

Tương tự, nếu chúng ta xem xét các tam giác $APQ$ và $PQC$, chúng ta thu được

$$\frac{\text{diện tích } \triangle APQ}{\text{diện tích } \triangle QCP} = \frac{|AQ|}{|QC|} \tag{33.3}$$

Từ Eqs. (33.2) and (33.3) và lưu ý rằng hai tam giác $PBQ$ và $QCP$ có cùng diện tích, chúng ta thu được điều chúng ta muốn chứng minh: $|AP|/|PB| = |AQ|/|QC|$. Một chút đại số sau đó cho chúng ta kết quả tương đương: $|AP|/|AB| = |AQ|/|AC|$.




Như vậy ta có: một đường thẳng song song suy ra các cạnh tỷ lệ. Ngược lại, các cạnh tỷ lệ có suy ra một đường thẳng song song không? Bài toán là: với $|AP|/|PB| = |AQ|/|QC|$, hãy chứng minh rằng $PQ \parallel BC$. Giới thiệu một đường thẳng $PE$ song song với $BC$. Mục tiêu là chỉ ra rằng $E$ chính là $Q$. Vì $PE \parallel BC$, chúng ta có (do kết quả mới chứng minh):

$$\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$$

Nhưng $|AP|/|PB| = |AQ|/|QC|$ (đã biết), vì vậy

$$\frac{|AQ|}{|QC|} = \frac{|AE|}{|EC|} \iff \frac{|AQ|}{|QC|} + 1 = \frac{|AE|}{|EC|} + 1 \iff \frac{|AC|}{|QC|} = \frac{|AC|}{|EC|} \iff |QC| = |EC|$$

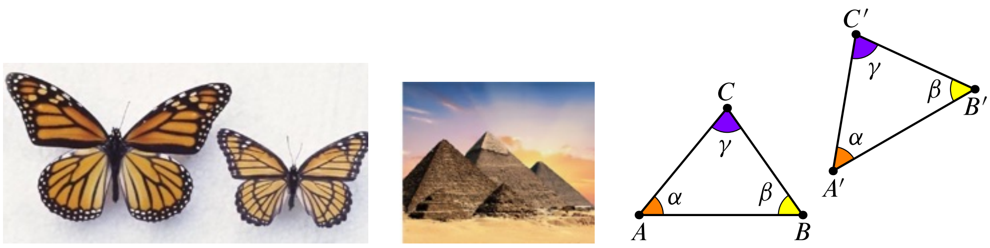
Tức là $E$ và $C$ là một. Do đó, định lý Thales hoàn chỉnh phát biểu như sau: (nó là đường hai chiều nhé)

$$\boxed{PQ \parallel BC \iff \frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|AQ|}{|QC|}, \quad \text{hay} \quad PQ \parallel BC \iff \frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|AQ|}{|AC|}} \tag{33.4}$$

Các bạn chú ý rằng ta có hai mệnh đề trong định lý tỉ lệ cơ bản nhé: mệnh đề (1) đi từ trái sang phải và cho phép ta sử dụng hai đường song song, trong khi đó mệnh đề (2) đi từ phải sang trái và cho ta một cách để kiểm tra xem hai đoạn thẳng có song song không. Bất kỳ định lý toán học nào mà hai chiều đều đúng như vậy thì các bạn phải dùng nó cả hai chiều.

### 33.2.4 Tương đẳng và đồng dạng

Trong đại số chúng ta so sánh các con số với nhau. Trong hình học chúng ta so sánh các hình với nhau. Trò chơi vẫn là vậy, chỉ có đối tượng thay đổi thôi. Khi so sánh hai hình thì ta gặp khái niệm đồng dạng: hình có hình dạng giống nhau như minh họa ở 33.8a and 33.8b. Vì tam giác là hình hai chiều cơ bản nhất, ta tập trung vào nó. Hãy tạo ra hai tam giác giống nhau bằng giấy. Bây giờ, tách chúng ra và xoay một tam giác. Những gì chúng ta thu được giống với hình Hình 33.8c. Rõ ràng, hai tam giác này *có cùng hình dạng và kích thước*. Nhà toán học gọi chúng là *các tam giác tương đẳng*. Euclid nói rằng hai hình học tương đẳng (ông sử dụng từ trùng khớp) khi một trong số chúng có thể được di chuyển để khớp hoàn toàn với cái kia.



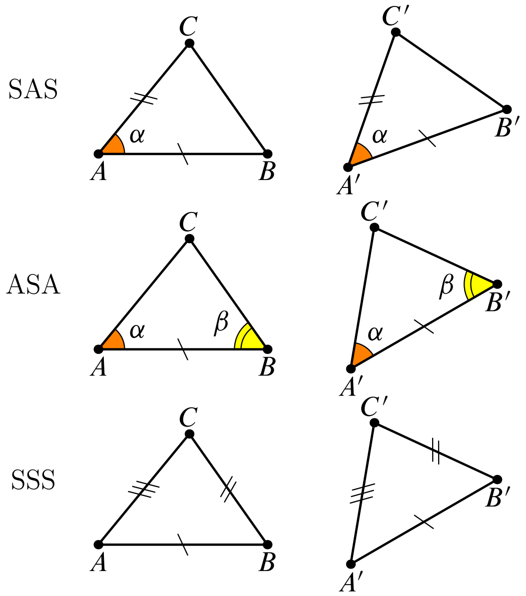

(a) (b) (c)

Hình 33.8: Hình đồng dạng trong tự nhiên, trong kỹ thuật và trong toán học.

Việc tiếp theo mà nhà toán học phải làm là phát triển các tiêu chí để xác định xem hai tam giác có tương đẳng hay không. Họ không muốn xây dựng tam giác vật lý và di chuyển chúng để kiểm tra điều này. Đó không phải là toán học! Tương tự như dấu bằng để nói $x = y$, ta cũng cần kí hiệu cho tính tương đẳng của hai tam giác. Để nói rằng hai tam giác $ABC$ và $A'B'C'$ tương đẳng, chúng ta viết $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Lưu ý rằng ta luôn viết các đỉnh của hai tam giác tương đẳng để các đỉnh và cạnh tương ứng có thể được đọc theo cách tự nhiên. Vì vậy, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ có nghĩa là

$$|AB| = |A'B'|, \ |BC| = |B'C'|, \ |CA| = |C'A'|, \quad \angle A = \angle A', \ \angle B = \angle B', \ \angle C = \angle C'$$

**Các kiểm tra tương đẳng**. Ba kiểm tra tương đẳng cho tam giác là SAS (cạnh-góc-cạnh), ASA (góc-cạnh-góc) và SSS (cạnh-cạnh-cạnh) như được hiển thị trong Hình 33.9. Thay vì chứng minh chúng, chúng ta coi chúng là các tiên đề. Mặc dù Euclid đã chứng minh SAS như một định lý, chứng minh của ông dựa trên chuyển động, điều này không dễ mô tả một cách chính xác trong toán học cơ bản. Đó là lý do tại sao chúng ta chấp nhận những kiểm tra này bằng lòng tin.

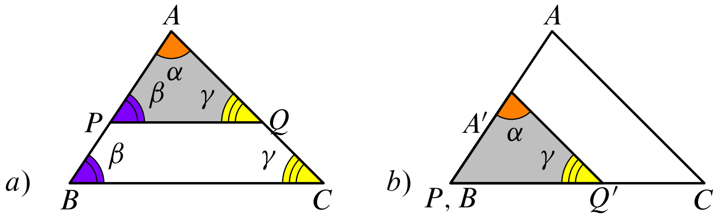



Hình 33.9: Các kiểm tra tương đẳng cho tam giác. Để sử dụng SAS, kiểm tra hai cạnh và góc xen kẽ giữa, không kiểm tra các góc khác.

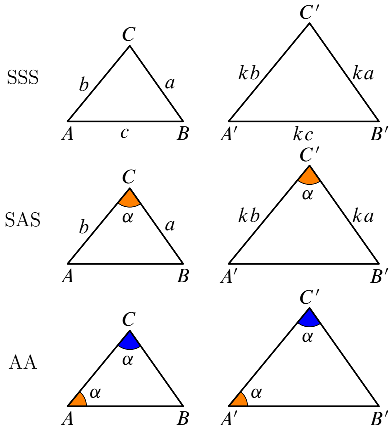
Sử dụng tương đẳng, chúng ta có thể suy ra nhiều sự thật thú vị. Ví dụ, trong một tam giác đều, có hai cạnh có độ dài bằng nhau, các góc đối diện với những cạnh này cũng bằng nhau. Một kết quả khác: các cạnh đối diện của một hình bình hành cũng bằng nhau. Chứng minh luôn tiến hành như sau: tìm hai tam giác đồng dạng, ví dụ sử dụng kiểm tra SAS, sau đó các góc không được sử dụng trong kiểm tra là bằng nhau. Bước khó khăn là làm cho hai tam giác xuất hiện!

**Tam giác đồng dạng**. Nếu chúng ta nhìn vào các tam giác $ABC$ và $APQ$ trong chứng minh của định lý Thales, chúng ta thấy rằng chúng có các góc bằng nhau (Hình 33.10a): chúng có một góc chung tại $A$, và hai góc còn lại cũng giống nhau vì $PQ \parallel BC$. Hai tam giác này *có cùng hình dạng*–ba góc bằng nhau–nhưng *không có cùng kích thước*. Chúng được gọi là *đồng dạng*, và được ký hiệu bởi $\triangle ABC \sim \triangle APQ$. Từ định lý Thales, chúng ta có $|AP|/|AB| = |AQ|/|AC| = k$, trong đó $k > 0$ là một số thực bất kỳ. Vì vậy, hai tam giác đồng dạng có các cạnh tỷ lệ (ít nhất là đối với hai cạnh). Vậy các cạnh còn lại thì như thế nào? Đó là câu hỏi chúng ta nên hỏi.

Để trả lời câu hỏi đó, chúng ta trượt $\triangle APQ$ dọc theo $AB$ sao cho $P$ trùng với $B$; chúng ta có tình huống như được hiển thị trong Hình 33.10b. Vì $A'Q' \parallel AC$, chúng ta có $k = |PA'|/|PA| = |PQ'|/|PC|$. Nhưng $|PQ'| = |PQ|$ (khi chúng ta di chuyển một tam giác, các cạnh của nó không thay đổi) và $|PC| = |BC|$. Do đó, $|PQ|/|BC|$ cũng là $k$.




Hình 33.10: Các tam giác đồng dạng ($APQ$ và $ABC$) có các góc bằng nhau, hoặc các cạnh của chúng tỷ lệ.

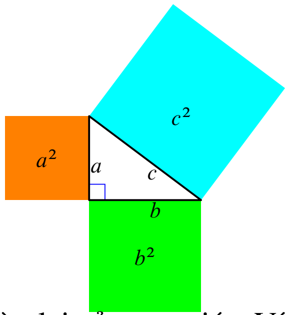



Để kết luận, hai tam giác đồng dạng nếu chúng có các góc bằng nhau, hoặc các cạnh của chúng tỷ lệ (tức là, nếu một tam giác có các cạnh $a, b$ và $c$, tam giác khác có các cạnh $ka, kb$, và $kc$ với $k > 0$ gọi là hệ số tỷ lệ). Khi $k = 1$, hai tam giác này tất nhiên là tương đẳng. Do đó, *tương đẳng là một trường hợp đặc biệt của đồng dạng*. Còn về diện tích của hai tam giác đồng dạng? Tỷ lệ diện tích là $k^2$. Một cách chứng minh dễ dàng[††] là sử dụng công thức Heron $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, với $s = 0.5(a+b+c)$, xem Eq. (37.23).

Bởi vì tương đẳng là một trường hợp đặc biệt của đồng dạng, ta cũng có ba kiểm tra đồng dạng: SSS (ba cạnh tỉ lệ), SAS (khi các cạnh tỷ lệ), và AA (vì tổng các góc là $180°$, nếu hai góc bằng nhau thì các góc còn lại cũng phải bằng nhau). Đối với tam giác vuông, kiểm tra AA trở thành kiểm tra A vì chúng ta chỉ cần kiểm tra tính bằng nhau của một góc nhọn duy nhất.

### 33.2.5 Định lý Pythagoras

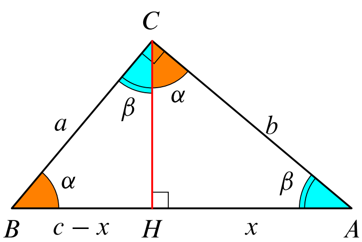
Nếu yêu cầu bất kỳ học sinh nào nêu tên một nhà toán học nổi tiếng, và thường thì các em sẽ chọn Pythagoras (nếu các em có thể nghĩ ra một cái tên). Danh tiếng ngày nay của Pythagoras dựa vào định lý mang tên ông: định lý Pythagoras. Chúng ta không biết liệu Pythagoras có thực sự chứng minh định lý hay không. Trên thực tế, chúng ta không biết liệu đó có phải là định lý của ông hay không. Nhưng ông được công nhận và tên ông trở nên nổi tiếng.



Định lý của Pythagoras là một mối quan hệ căn bản trong hình học Euclid giữa ba cạnh của một tam giác vuông. Nó nói rằng diện tích của hình vuông có cạnh là đường chéo (cạnh đối diện với góc vuông) bằng tổng diện tích của hai hình vuông có cạnh là hai cạnh còn lại. Định lý này có thể được viết dưới dạng một phương trình liên quan đến độ dài các cạnh $a$, $b$ và $c$, thường được gọi là "phương trình Pythagoras":

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{33.5}$$

trong đó $c$ là độ dài của đường chéo và $a$ và $b$ lần lượt là độ dài hai cạnh còn lại của tam giác. Ví dụ, trong một tam giác vuông nếu hai cạnh góc vuông là 3 và 4, thì độ dài của đường chéo là 5 (bởi vì $5^2 = 3^2 + 4^2$). Điều này tạo ra tam giác vuông nổi tiếng $3-4-5$.



Có rất nhiều chứng minh cho định lý này, có lẽ nhiều nhất cho một định lý. Bây giờ mình trình bày một chứng minh của định lý Pythagoras sử dụng các tam giác đồng dạng (cho các bạn làm quen). Hãy xem xét tam giác vuông $ABC$ với các cạnh $a, b$ và đường chéo $c$. Từ $C$, vẽ $CH$ vuông góc với $AB$, và đặt $AH = x$ (do đó $BH = c - x$). $CH$ này chia tam giác của chúng ta thành hai tam giác vuông nhỏ hơn $CBH$ và $ACH$. Điều gì đặc biệt về hai tam giác vuông này? Chúng đồng dạng với $\triangle ABC$ (dùng kiểm tra AA). Đây là một kỹ năng mà học sinh trung học phải có: thấy được sự đồng dạng của các tam giác. Phần còn lại là đại số (bạn không thể sống thiếu cái này), như chúng ta sẽ thấy.

Do đó, chúng ta có

$$\begin{aligned}
\triangle ABC \sim \triangle CBH &\implies \frac{|BC|}{|BH|} = \frac{|AB|}{|BC|} \implies \frac{a}{c-x} = \frac{c}{a} \\
\triangle ABC \sim \triangle ACH &\implies \frac{|AC|}{|AH|} = \frac{|AB|}{|AC|} \implies \frac{b}{x} = \frac{c}{b}
\end{aligned}$$

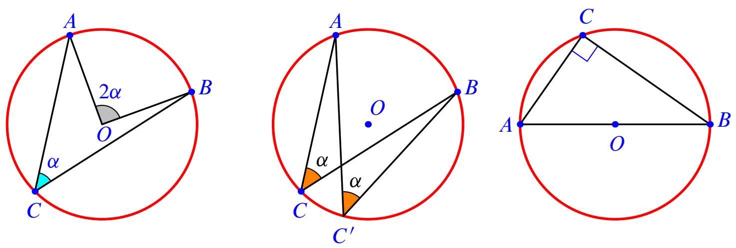
[††]Cách chứng minh khác là: xem xét một hình bình hành với các cạnh $a, b$; diện tích của nó là $ab$. Bây giờ, co giãn nó bằng một hệ số $k$. Diện tích của hình bình hành đã co giãn là $k^2ab$. Kết nối diện tích của một tam giác với diện tích của một hình bình hành sẽ cho chúng ta kết quả.

Từ hai biểu thức này, dễ dàng thu được $c^2 = a^2 + b^2$. Có trên 370 chứng minh cho định lý nổi tiếng này. Một trong những chứng minh này thậm chí được đóng góp bởi một tổng thống của Hoa Kỳ James Garfield (1831–1881), từ những thời kỳ tuyệt đẹp khi toán học hấp dẫn hơn dầu mỏ.

Định lý đảo của định lý Pythagoras có đúng không? Tức là, nếu ba cạnh của một tam giác thỏa $a^2 + b^2 = c^2$ thì nó có là một tam giác vuông không? Các bạn nghĩ thế nào? Chắc là phần lớn sẽ đoán đúng: định lý đảo đúng. Làm sao chứng minh? Giờ ta có $\triangle ABC$ với $a^2 + b^2 = c^2$ và cần chứng minh $\angle C = 90°$. Có một cách chứng minh một góc là bao nhiêu độ: tìm 2 tam giác đồng dạng, từ đó góc tương ứng sẽ bằng nhau. Vì vậy, ta sẽ dựng một tam giác mới $A'B'C'$ là tam giác vuông có hai cạnh là $a$ và $b$. Phính nè, ai bảo đảm là ta có thể dựng một tam giác như vậy? Chương 34 sẽ trả lời câu hỏi đó; xin các bạn yên tâm, chúng ta chỉ dùng năm tiên đề của Euclid thôi. Định lý Pythagoras cho tam giác vuông này cho ta $c^2 = a^2 + b^2$, như vậy tam giác vuông mới này đồng dạng với tam giác $ABC$ (tiêu chuẩn SSS), và như thế $\angle C$ của $\triangle ABC$ phải bằng góc $C'$ của tam giác $A'B'C'$, tức là 90°.

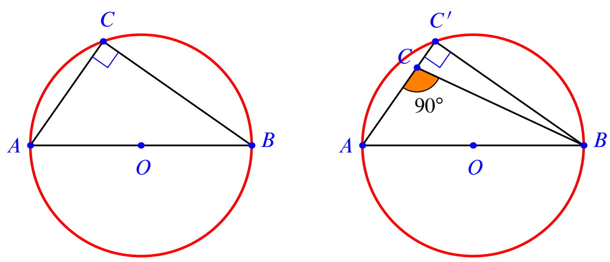
### 33.2.6 Các định lý về đường tròn

**Định lý góc ở tâm** nói rằng góc ở tâm giữa hai điểm $A$ và $B$ trên đường tròn luôn gấp đôi góc nội tiếp giữa hai điểm đó (hình bên trái trong Hình 33.11). Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn. Từ đó, chúng ta có hai kết quả trực tiếp (hoặc có thể gọi là các hệ quả như các nhà toán học thường nói) như được thể hiện ở hình ở giữa (các góc nội tiếp mở ra bởi cùng một cung bằng nhau) và hình bên phải trong hình đã nêu.




Hình 33.11: Định lý góc ở tâm: Định lý góc ở tâm nói rằng góc ở tâm giữa hai điểm $A$ và $B$ trên đường tròn luôn gấp đôi góc nội tiếp chắn cung $AB$ (hình bên trái). Góc nội tiếp có thể được định nghĩa bằng bất kỳ điểm nào trên cung ngoài $AB$ và hai điểm $A$ và $B$ (hình giữa). Làm thế nào để chứng minh định lý góc ở tâm? Đơn giản vẽ đường $OC$, và chúng ta có hai tam giác cân $OAC$ và $OCB$. Và trong trường hợp đặc biệt $AB$ là đường kính của đường tròn (tức là $2\alpha = 180°$), chúng ta có $C = 90°$ (hình phải).

**Định lý Thales và nghịch đảo của nó**. Hình bên phải trong Hình 33.11 thể hiện định lý Thales: nếu $AB$ là đường kính của một đường tròn và $C$ là một điểm bất kỳ trên đường tròn đó, thì góc $ACB$ là góc vuông. Như thường lệ trong toán học, chúng ta nên đặt câu hỏi: liệu nghịch đảo của định lý Thales có đúng hay không? Điều đó có nghĩa, với đường kính của một đường tròn $AB$, và góc $ACB$ bằng 90°, liệu $C$ có nằm trên đường tròn hay không?

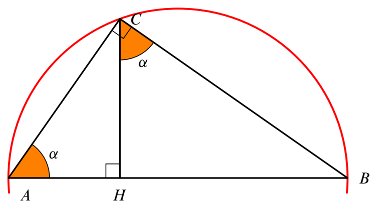



Hình 33.12: Chứng minh bằng phản chứng cho nghịch đảo của định lý Thales: trường hợp $C$ nằm bên trong đường tròn.

Nhưng rất may, nghịch đảo của định lý Thales cũng đúng. Euclid đã trình bày một chứng minh bằng phản chứng (Hình 33.12). Giả sử rằng $\angle ACB$ là 90° *nhưng $C$ không nằm trên đường* *tròn*. Nếu chúng ta có thể suy ra điều gì đó vô lý từ điều này, thì $C$ phải nằm trên đường tròn. Đó là bản chất của chứng minh bằng phản chứng. Có hai trường hợp: $C$ nằm bên trong đường tròn và nó nằm bên ngoài đường tròn. Hãy xem xét trường hợp đầu tiên trước. Kéo dài $AC$ sao cho nó cắt đường tròn tại $C'$. Định lý Thales sau đó nói cho chúng ta rằng $\angle AC'B = 90°$. Do đó, chúng ta có $BC \parallel BC'$ (vì cả hai đều vuông góc với $AC$). Tuy nhiên, hai đường thẳng song song này gặp nhau tại $B$! Mâu thuẫn với TD5: vì vậy, $C$ không thể nằm bên trong đường tròn. Trường hợp $C$ nằm bên ngoài đường tròn dành cho bạn như một bài tập.

Ta sử dụng định lý này theo hai chiều: nếu $C$ đã ở trên đường tròn, thì ta có thông tin $\angle C = 90°$. Ngược lại, nếu có $\angle C = 90°$ thì có một đường tròn đi qua $C$ với $AB$ là đường kính.

**Định lý trung bình nhân hay Định lý đường cao của tam giác vuông**. Xét một tam giác vuông $ABC$ với $\angle C = 90°$. (Bất kỳ tam giác vuông nào cũng có liên quan đến một đường tròn theo định lý Thales, nên mình cố ý đã vẽ một đường tròn, nhưng nó không cần thiết cho định lý). Từ $C$, kéo $CH \perp AB$: $CH$ được gọi là đường cao của cạnh huyền $AB$. Từ một tam giác vuông, giờ ta có thêm 2 tam giác vuông nữa. Và 2 tam giác mới này là bà con! Tam giác $HAC$ đồng dạng với tam giác $HCB$ (kiểm tra AA: một góc vuông, và chung góc $C$), vì vậy chúng ta có $|HC|/|HB| = |HA|/|HC|$. Do đó,




$$|HC|^2 = |HA| \cdot |HB| \Longrightarrow \boxed{|HC| = \sqrt{|HA| \cdot |HB|}} \tag{33.6}$$

Sau này, trong phần 37.3 ta sẽ biết $|HC|$ là trung bình nhân của $|HA|$ và $|HB$. Quan hệ $|HC|^2 = |HA| \cdot |HB|$ cho phép chúng ta dựng hình vuông, với thước và compa, có diện tích bằng với diện tích của một hình chữ nhật đã cho. Ngoài ra, $|HC| = \sqrt{HA \cdot HB}$ cho phép chúng ta xây dựng căn bậc hai của $a > 0$ bằng cách sử dụng thước và compa.

Còn gì cho ta khám phá nữa không? Còn chứ: tam giác $ABC$ đồng dạng với $\triangle ACH$, cho nên ta có $|AC|^2 = |AH| \cdot |AB|$.

**Bốn điểm trên một đường tròn**. Xem xét một đường tròn và bốn điểm $A, B, C$ và $D$ trên nó. Chúng ta có một tứ giác nội tiếp $ABCD$ (Tứ giác nội tiếp là một tứ giác mà tất cả đỉnh của nó đều nằm trên một đường tròn.) Thú vị rằng trong tứ giác này, các góc đối diện cộng lại bằng $180°$ (Hình 33.13a)[††]. Để chứng minh điều này, chúng ta cần phải tạo ra các tam giác (chúng ta biết nhiều hơn về tam giác hơn là về tứ giác). Vì vậy, chúng ta vẽ đường chéo $AC$ và $BD$ (Hình 33.13b). Trong tam giác $ACD$, chúng ta có $\alpha_1 + \alpha_2 + \angle D = 180°$. Nhưng $\angle ABD = \alpha_2$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau) và $\angle DBC = \alpha_1$. Do đó, $\angle B + \angle D = 180°$[†]. Nghịch đảo của định lý này: nếu tổng của hai góc đối diện là $180°$ thì tứ giác nội tiếp. Chứng minh? Phản chứng, hãy nhớ lại nghịch đảo của định lý Thales?

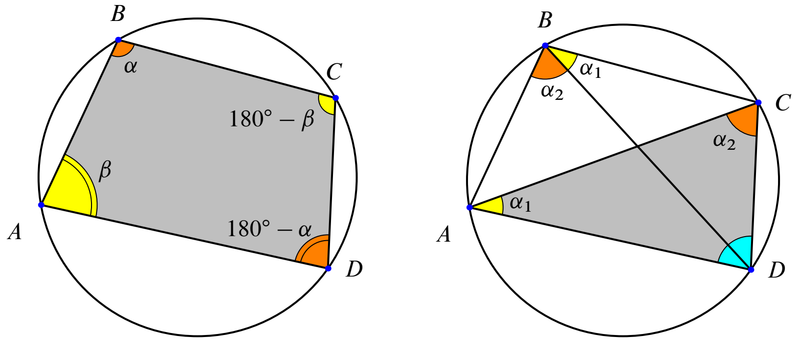
**Định lý cát tuyến cắt nhau**. Dây cung của một đường tròn (đôi khi chỉ được nói ngắn gọn là dây) là một đoạn thẳng mà cả hai đầu mút của nó đều nằm trên đường tròn. Nếu hai đường thẳng chứa hai dây cung $AB$ và $CD$ của một đường tròn (hai cát tuyến) cắt nhau tại $P$, thì (Hình 33.14a)

$$\boxed{|AP| \cdot |BP| = |CP| \cdot |DP|} \tag{33.7}$$

Chúng ta có thể sắp xếp lại phương trình này để có $|AP|/|DP| = |CP|/|BP|$. Điều này đưa ra ý tưởng làm thế nào chúng ta có thể chứng minh điều này, vì biểu thức mới này rõ ràng liên quan đến tỷ lệ giữa các cạnh của hai tam giác $APC$ và $DPB$. Vì vậy, chúng ta *vẽ thêm $BD$ và $AC$: bây giờ chúng ta có các tam giác trong bài toán!* Hai tam giác này đồng dạng (kiểm tra AAA), do đó các cạnh của chúng tỷ lệ. Nếu hai dây cắt nhau gặp nhau bên ngoài đường tròn (Hình 33.14b), kết quả vẫn còn đúng.

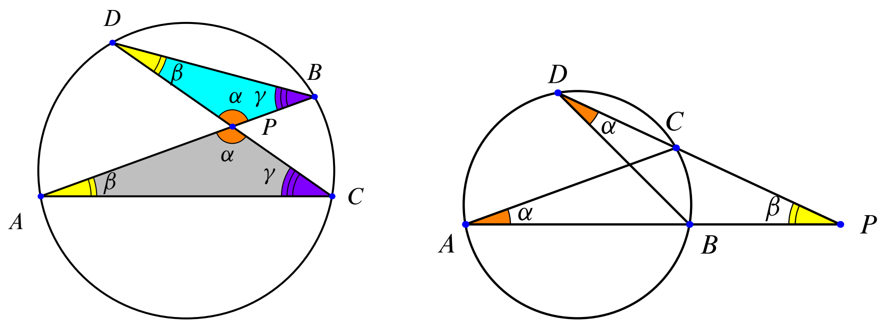
[††]Tại sao chúng ta biết điều này? Hãy tưởng tượng về một đường tròn và một hình chữ nhật với bốn đỉnh trên đường tròn, rõ ràng các góc đối diện cộng lại là $180°$. Hãy tổng quát hóa điều này.

[†]Hai góc còn lại gộp lại cũng $180°$ vì tổng bốn góc là $360°$. Hai cặp góc cư xử như nhau; ai cũng happy.




(a) (b)

Hình 33.13: Bốn điểm trên một đường tròn (hay tứ giác nội tiếp): các góc đối diện cộng lại bằng 180° (a) và chứng minh (b).




(a) (b)

Hình 33.14: Dây cung cắt nhau: $|AP| \cdot |BP| = |CP| \cdot |DP|$. Kết quả này cho thấy rằng tích $AP \cdot BP$ là một đại lượng bất biến (hằng số), vì nó không phụ thuộc vào vị trí của $A$ và $B$, với đường tròn đã cho và điểm $P$. Điều ngược lại cũng đúng. Tức là, nếu hai đoạn $AB$ and $CD$ cắt nhau tại $P$ và ta có $|AP| \cdot |BP| = |CP| \cdot |DP|$, thì bốn chú $A, B, C, D$ nằm trên một đường tròn. (Lại là một định lý để kiểm tra tứ giác nội tiếp).

Đại lượng $|PA| \cdot |PB|$ gọi là phương tích của điểm $P$, và định lý cát tuyến cắt nhau nói rằng phương tích này là bất biến! Tức là nó không phụ thuộc vào cát tuyến. Có một đường tròn, và một điểm $P$, các tuyến nào cũng cho ra cùng một phương tích của $P$.

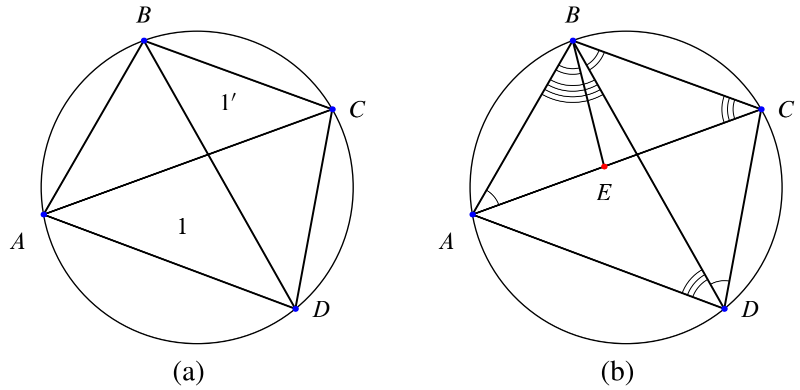
**Định lý Ptolemy**. Ptolemy (c. 100–c. 170) là nhà Toán học, thiên văn học Hy lạp cổ đại. Người đã viết, vào thế kỷ 2, cuốn *Almagest*, một trong những cuốn sách khoa học nổi tiếng nhất mọi thời đại. Giờ chúng ta hãy xem một định lý mang tên ông. Xét một đường tròn và một tứ giác nội tiếp $ABCD$ (Hình 33.15a). Ptolemy đã phát hiện ra sự thật sau:

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \tag{33.8}$$

điều này có nghĩa là tích của các đường chéo bằng tổng của tích của các cạnh đối diện. Làm thế nào để chứng minh điều này? Chắc chắn rằng chúng ta phải sử dụng các tam giác tương tự, nhưng không phải một cặp hai tam giác đồng dạng mà là hai cặp: vì chúng ta có $|AB| \cdot |BD|$ và $|BC| \cdot |AD|$. Nếu bạn nhìn vào Hình 33.15a, có hai cặp tam giác đồng dạng, ví dụ tam giác được đánh số là 1 và 1′. Nhưng chúng không đưa cho chúng ta điều chúng ta cần (tại sao?).

Điểm chính ở đây là tạo ra một điểm mới và do đó tam giác mới. Điểm mới phải nằm trên một trong hai đường chéo: chúng ta thêm điểm $E$ vào $AC$ sao cho $\angle ABE = \angle CBD$ (Hình 33.15b). Bây giờ, $\triangle ABE \sim \triangle DBC$ (kiểm tra AA), do đó chúng ta có

$$\frac{AE}{AB} = \frac{CD}{BD} \Longleftrightarrow |AE| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD|$$



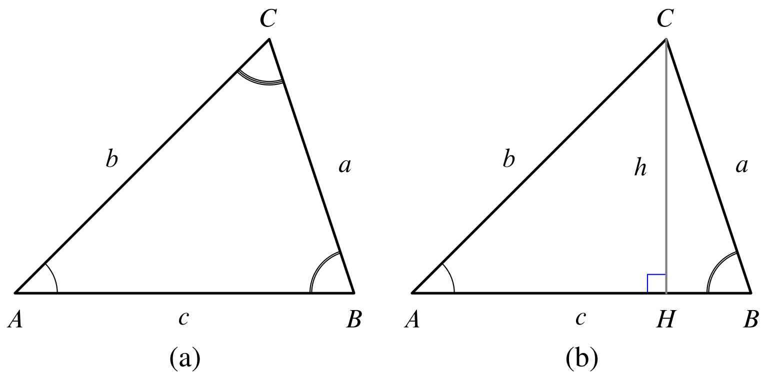

Hình 33.15: Định lý Ptolemy: $|AC|\cdot|BD| = |AB|\cdot|CD| + |BC|\cdot|AD|$ (a) và một cách chứng minh (b).

Bằng cách tương tự, chúng ta có $\triangle EBC \sim \triangle ABD$ (kiểm tra AA), do đó

$$\frac{EC}{BC} = \frac{AD}{BD} \Longleftrightarrow |EC|\cdot|BD| = |BC|\cdot|AD|$$

Cộng hai kết quả này lại và chúng ta đã chứng minh xong định lý Ptolemy. Và từ nó, ta có thể chứng minh định lý Pythagoras. Bằng cách biến tứ giác $ABCD$ thành hình chữ nhật (tức là ($|CD| = |AB|$, $|AD| = |BC|$, và $|BD| = |AC|$), định lý Ptolemy trở thành định lý Pythagoras. (Có thể Ptolemy xuất phát từ 1 hình chữ nhật nội tiếp 1 đường tròn và định lý Pythagoras, biến nó thành 1 tứ giác.)

Định lý Ptolemy không phải là bài toán hình học mà nó cung cấp một trong những đẳng thức lượng giác quan trọng nhất: $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, như trình bày dưới đây.



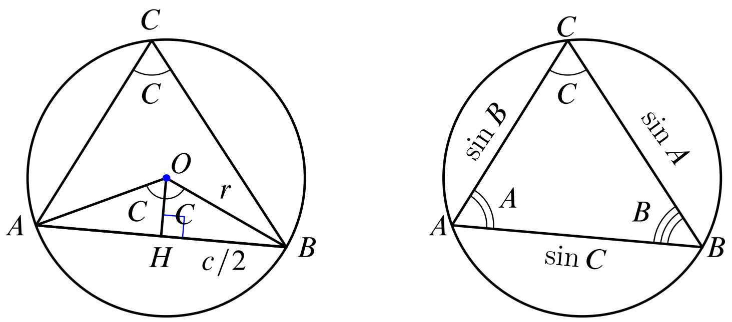

Hình 33.16: Proof of the generalized Pythagoras theorem (a), the sine law (b) and proof (c).

**Luật sin trong tam giác.** Cho tam giác với ba cạnh có độ dài lần lượt là $a, b, c$ và ba góc là $A, B, C$ (Hình 33.16a). Chúng ta có luật sin như sau:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \tag{33.9}$$

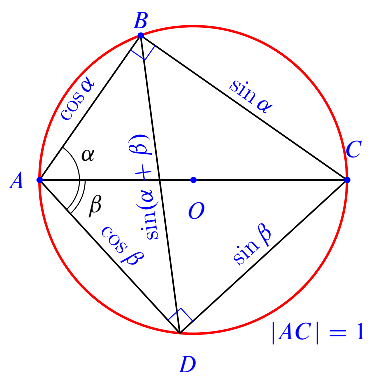
Chứng minh rất đơn giản: xem Hình 33.16b. Trong hai tam giác vuông $ACH$ và $BCH$, tính $h = b\sin A = a\sin B$. Vì vậy, $a/\sin A = b/\sin B$. Công thức sin có thể được sử dụng để tính các cạnh còn lại của tam giác khi biết hai góc và một cạnh - một kỹ thuật được biết đến là "triangulation".

Trong công thức sin, chúng ta có ${}^{a}/_{\sin A} = {}^{b}/_{\sin B} = {}^{c}/_{\sin C}$, nhưng con số ${}^{a}/_{\sin A}$ này là gì? Đó phải là độ dài của một đoạn thẳng nào đó (tại sao?). Và nó hóa ra là đường kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác. Kết quả này có nguồn gốc từ Ptolemy (xem hình trái ở Hình 33.17: xét tam giác vuông $OHB$, chúng ta có ngay lập tức $c/\sin C = 2r$). Bây giờ, nếu chúng ta giả sử $2r = 1$, thì chúng ta sẽ có điều được hiển thị trong sơ đồ bên phải. Sau đó, luật sin đơn giản là: mỗi cạnh của một tam giác nội tiếp trong một đường tròn có đường kính bằng 1 bằng với sin của góc đối diện.




Hình 33.17: Bằng chứng của công thức sine: $c/\sin C = 2r$ (bên trái) và khi $2r = 1$, những dây cung trở thành sine (bên phải). Chú ý: chúng ta có $\angle AOB = 2C$ nhờ vào định lý góc ở tâm.

**Khám phá công thức** $\sin(a+b)$ **bởi Ptolemy**. Với công thức sin và định lý Ptolemy, chúng ta giờ có thể giải thích sự khám phá công thức $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha + \sin\beta$. Để sử dụng định lý Ptolemy, ta xét một đường tròn và một tứ giác nội tiếp $ABCD$, với $|AC| = 1$ là đường kính (để có tam giác vuông). Hãy để $\angle CAB$ và $\angle DAC$ lần lượt là $\alpha$ và $\beta$. Vì $|AC| = 1$, tất cả các đoạn trong biểu đồ được kết nối với sin hoặc cosin. Ví dụ, $|BD| = \sin(\alpha+\beta)$ là do công thức sin (Hình 33.17). Và định lý Ptolemy cho chúng ta biết rằng $|AC|\cdot|BD| = |AB|\cdot|CD| + |BC|\cdot|AD|$, trở thành




$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha} \tag{33.10}$$

Và đẳng thức này là điểm xuất phát cho tất cả đẳng thức lượng giác, ví dụ:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \sin[90° - (\alpha+\beta)] = \sin[(90° - \alpha) - \beta] \\ &= \sin(90° - \alpha)\cos\beta - \sin\beta\cos(90° - \alpha) \\ &= \cos(\alpha)\cos\beta - \sin\beta\sin(\alpha)\end{aligned} \tag{33.11}$$

Và từ đó ta có $\cos(\alpha-\beta)$ bằng cách thay $\beta$ bởi $-\beta$, và chú ý $\cos x = \cos(-x)$, và $\sin(-x) = -\sin x$. Từ đó ta lại có thêm:

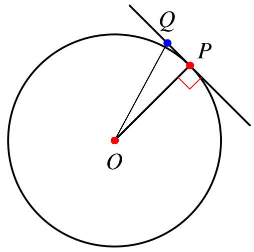
$$\left.\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\beta\sin\alpha\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

Hay viết lại dưới dạng tích bằng tổng, ta có:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2} \tag{33.12}$$

Và chúng ta sẽ tiếp tục câu chuyện với đẳng thức này ở Chương 60.

### 33.2.7 Tiếp tuyến đến đường tròn

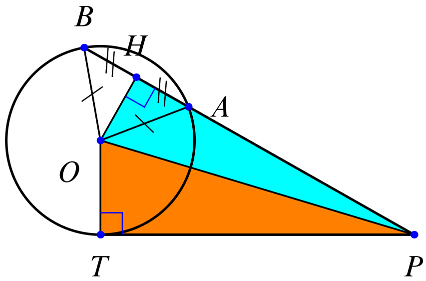



Cho một đường tròn và một đường thẳng, có ba trường hợp về vị trí tương đối giữa chúng: (1) đường thẳng không cắt đường tròn - điều này không có gì đặc biệt vì không còn gì để thảo luận, (2) đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm và (3) đường thẳng tiếp xúc với đường tròn tại đúng một điểm. Chúng ta quan tâm đến trường hợp cuối cùng vì nó đặc biệt. Chúng ta bắt đầu với một định nghĩa: *Đường tiếp tuyến đến một đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với đường tròn tại đúng một điểm* - điểm tiếp xúc ($P$ trong hình).

Làm cách nào để vẽ đường tiếp tuyến đến đường tròn tại $P$? Vẽ $OP$, sau đó vẽ một đường thẳng vuông góc với $OP$, đó chính là đường tiếp tuyến $(l)$. Nhưng tại sao? Hãy xét một điểm khác $Q$ trên đường thẳng này, vì $Q$ ở ngoài đường tròn nên $OQ > OP$: $OP$ là khoảng cách nhỏ nhất từ $O$ đến $(l)$, cho nên $OP \perp (l)$. Ta đã chứng minh khoảng cách vuông góc là khoảng cách ngắn nhất chưa? Nó là hệ quả của định lý Pythagoras: đoạn đối diện với góc vuông là cạnh dài nhất trong một tam giác vuông. Chứng minh dễ dàng: $a^2 + b^2 = c^2$, do đó $c^2 > a^2$ và $c^2 > b^2$.

**Định lý tiếp tuyến-cát tuyến**. Cho $P$ là một điểm ở bên ngoài đường tròn bán kính $R$, $PT$ là tiếp tuyến đến đường tròn và $PB$ là đường thẳng cắt đường tròn tại $A$ và $B$ (cát tuyến). Khi đó, định lý tiếp tuyến-cát tuyến nói rằng

$$\boxed{PT^2 = PA \cdot PB = PO^2 - R^2} \tag{33.13}$$

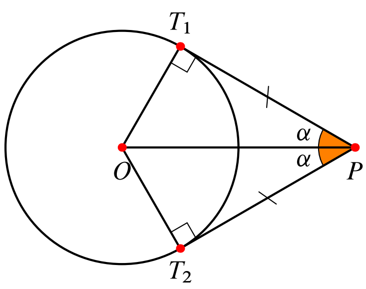



Nó đến từ Hình 33.14b. Hãy tưởng tượng rằng $PA$ đang được xoay theo chiều kim đồng hồ quanh $P$. Trong quá trình làm như vậy, các điểm $A, B$ gần nhau cho đến khi chúng gặp nhau tại một điểm duy nhất $T$: $PT$ sau đó là một đường tiếp tuyến, và chúng ta có $PA = PB = PT$. Để chứng minh định lý này, lưu ý rằng chúng ta cần $PT^2$ và điều đó nhắc chúng ta đến định lý Pythagoras liên quan đến tam giác vuông. Vì vậy, chúng ta vẽ tam giác $OTP$, một tam giác vuông (do $PT$ là tiếp tuyến đến đường tròn). Chúng ta cần một tam giác vuông khác: vẽ $OH$ vuông góc với $AB$: khi đó chúng ta có $HB = HA$ (các tam giác tương đẳng $OHB, OHA$). Bây giờ, định lý Pythagoras áp dụng cho ba tam giác vuông $OTP, OHP$ và $OHA$ cho chúng ta ($r$ là bán kính của đường tròn):

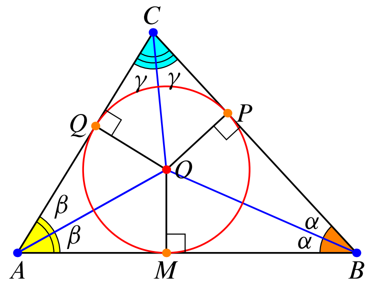
$$r^2 + PT^2 = OP^2, \quad PH^2 + OH^2 = OP^2, \quad OH^2 + HA^2 = r^2$$

Phần còn lại là đại số: từ hai phương trình đầu tiên, chúng ta có $r^2 + PT^2 = PH^2 + OH^2$ ($OP$ biến mất), sau đó sử dụng phương trình thứ ba cho $r^2$, chúng ta thu được ($r$ cũng biến mất)

$$PT^2 = PH^2 - HA^2 = (PH - HA)(PH + HA) = PA \cdot (PH + HB) = PA \cdot PB$$




Nếu chúng ta có một đường tròn và một điểm $P$ ở bên ngoài nó, chúng ta có thể có tối đa hai tiếp tuyến từ $P$ đến đường tròn: $PT_1$ và $PT_2$. Từ kết quả trên, chúng ta biết rằng $PT_1 = PT_2$ (cũng có thể biết do tính đối xứng). Và điều này có thể được chứng minh bằng định lý Pythagoras. Vậy, $\triangle OPT_1$ và $\triangle OPT_2$ là hai tam giác tương đẳng. Vì thế, hai góc đánh dấu ở $P$ bằng nhau. Ta nói, $OP$ phân chia $\angle T_1PT_1$ thành hai góc bằng nhau. Khi đó, ta nói rằng $OP$ là *đường phân giác* của $\angle T_1PT_2$. Kết quả này sẽ đưa chúng ta đến một tính chất thú vị khác của tam giác liên quan đến đường tròn nội tiếp. Một đường tròn nội tiếp là đường tròn lớn nhất bên trong một tam giác, tiếp xúc với ba cạnh của tam giác đó.



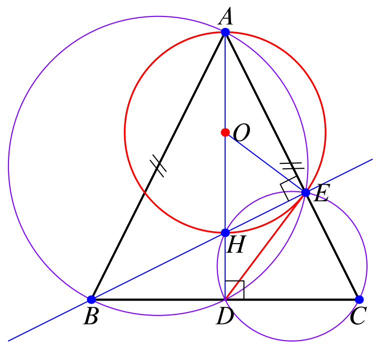

**Đường tròn nội tiếp trong tam giác**. Xem xét bài toán sau: cho một tam giác $\triangle ABC$, hãy vẽ đường tròn nội tiếp của nó chỉ dùng thước và compa. Chúng ta sẽ bàn kỹ về bài toán dựng hình ở Chương 34. Giả sử chúng ta có một đường tròn nội tiếp với tâm $O$ tiếp xúc với tam giác tại $P$, $Q$ và $M$, khi đó $AQ$, $AM$ là tiếp tuyến và $BP$, $BM$ cũng là tiếp tuyến. Do đó, $AO$ là đường phân giác của góc $\angle BAC$; $OB$ là đường phân giác của góc $\angle ABC$. Do đó, tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$ chính là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc của tam giác. Đường phân giác còn lại (của góc $\angle ACB$) có đi qua $O$ không? Dĩ nhiên có: đối xứng! (Chứng minh: hai tam giác vuông $COQ$ và $COP$ tương đẳng (kiểm tra SSS), vì vậy $\angle QCO = \angle OCP$.)

Chúng ta vừa chứng kiến một trong những ngạc nhiên thú vị nhất trong hình học: nhiều đường thẳng lại gặp nhau một cách đầy bất ngờ tại một điểm duy nhất. Và ta sẽ còn thấy thêm những thú vị như vậy trong Chương 34.

## 33.3 Một số bài toán hình cơ bản

**Bài 1.** Cho tam giác cân $ABC$ ($|AB| = |AC|$). Vẽ đường cao $AD$ và $BE$; chúng giao nhau tại $H$. Gọi $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $AHE$.

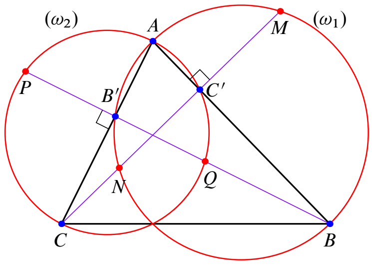
1. Chứng minh tứ giác $CHED$ nội tiếp.
2. Chứng minh bốn điểm $A, B, E, D$ nằm trên cùng một đường tròn.
3. Chứng minh $|ED| = |BC|/2$.
4. $DE$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AHE$.
5. Tính $|DE|$ cho biết $|DH| = 2$ và $|HA| = 6$ (đơn vị gì không quan trọng).




Câu một: Tứ giác nội tiếp? Chỉ cần kiểm tra hai góc đối diện, xem tổng có $180°$. Đường cao thì phải vẽ ngay góc vuông: góc $E$ và $D$–hai góc đối diện–đều là góc vuông. Xong. Câu hai: bốn điểm trên một đường tròn. Lại là hai điểm $E, D$ mà có góc vuông! Định lý Thales cho tam giác vuông $AEB$: ba điểm này ở trên đường tròn có đường kính là $AB$. Câu ba: Tam giác vuông $BEC$ cho ta biết $E$ ở trên đường tròn đường kính $BC$ tâm $D$, cho nên $|DE|$ là bán kính đường tròn này, chính là một nửa $|BC|$. Câu bốn: $DE$ là tiếp tuyến khi góc $OED$ là $90°$. Vậy thôi, chi tiết không khó. Tam giác $OED$ là tam giác vuông, định lý Pythagoras cho ta ngay $|DE| = \sqrt{|OD|^2 - |OE|^2} = 4$.

Nếu bạn đang thắc mắc mình dùng cái gì vẽ những hình trong chương này (và cả trong cuốn sách này), thì câu trả lời là: `Asymptote`. `Asymptote` là một ngôn ngữ đồ họa véc tơ rất thích hợp để vẽ hình trong dạy và học Toán. Ở Chương 38 mình sẽ trình bày cách dùng `Asymptote`.

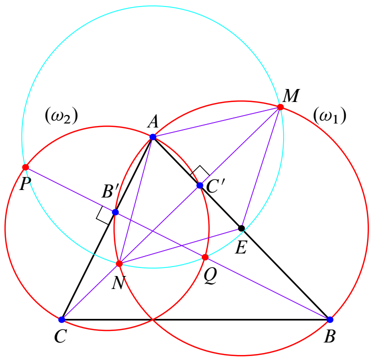
**Bài 2.** Cho một tam giác nhọn $ABC$. Gọi $(\omega_1)$ là đường tròn đường kính $AB$ và $(\omega_2)$ là đường tròn đường kính $AC$. Đường cao từ $BB'$ cắt $(\omega_2)$ lần lượt tại $P$ và $Q$. Tương tự, đường cao từ $CC'$ cắt $(\omega_1)$ lần lượt tại $M$ và $N$. Chứng minh $M, N, P, Q$ cùng thuộc 1 đường tròn. (Nguồn: *The Art and Craft of Problem Solving* của Paul Zeit.)




Trước tiên, tất nhiên là vẽ hình. Sau đó, có bao nhiêu cách để chứng minh 4 điểm nằm trên cùng một đường tròn? Có những cách sau đây:

- Kiểm tra xem tổng hai góc đối diện có bằng 180° không.
- Dùng định lý Ptolemy Eq. (33.8).
- Dùng định lý cát tuyến Eq. (33.7).
- Nếu có thể tìm ra một điểm mà khoảng cách từ nó đến 4 điểm $M, N, P, Q$ đều bằng nhau thì ta xong việc.

Cách nào đây? Cách thứ nhất nên dùng khi ta thấy 2 góc đối diện là hai góc vuông (như bài số 1). Ở đây không phải trường hợp này. Cách hai thì phải tính tích, tổng, có vẻ phức tạp. Và cách dùng định lý cát tuyến cũng vậy. Vậy ta thử cách cuối cùng: tìm tâm đường tròn qua 4 điểm $M, N, P, Q$.




Nếu bạn đã vẽ hình chính xác (như hình mình trình bày ở đây, dĩ nhiên vẽ bằng `Asymtptote`) thì không thể không có cảm giác rằng $|AP| = |AM|$. Cho nên ta đoán $A$ chính là tâm cần tìm. Dùng compa ta vẽ đường tròn tâm $A$, bán kính $|AM|$ thì sẽ thấy quả đúng là 4 điểm $M, N, P, Q$ nằm trên đường tròn này.

Giờ ta chứng minh: $|AM| = |AN|$. Gọi $E$ là trung điểm $AB$, ta có $|EM| = |EN|$, cho nên $\triangle EMN$ cân và đường cao $EC'$ cũng là trung tuyến. Vì thế, $|C'N| = |C'M|$. Từ đó, ta cũng suy ra được rằng $|AM| = |AN|$. Nãy giờ, ta chỉ dùng thông tin về $(\omega_1)$; nếu dùng thằng $(\omega_2)$, ta có điều tương tự: $|AP| = |AQ|$. Bài toán giờ trở thành, chứng minh $|AN| = |AQ|$.

Vì $\triangle ANB$ vuông tại $N$, ta có $|AN|^2 = |AC'| \cdot |AB|$ (còn nhớ định lý trung bình nhân chứ?). Tương tự, $|AQ|^2 = |AB'| \cdot |AC|$, mà định lý cát tuyến cho ta $|AC'| \cdot |AB| = |AB'| \cdot |AC|$ (vì $B, C, B', C'$ nằm trên 1 đường tròn, từ bài số 1).

Học hình học cho thật nhiều mà không giải được bài sau thì đúng là một chuyện không hợp lý. Bài toán như sau: Có một cái thùng không có nắp và một ít rượu bên trong. "Rượu trong thùng nhiều hơn một nửa (thùng)," một người phụ nữ nói. "Không, không phải vậy," người đàn ông nói. "Nó ít hơn một nửa." Không cần bất kỳ công cụ đo lường nào và không cần rót rượu ra khỏi thùng, làm thế nào để dễ dàng xác định ai đúng?

Lời giải mình sẽ trình bày ở Chương 32.

Ngày 26 tháng 3 năm 2023

# Chương 34

# Hình học: bài toán dựng hình

TRƯỚC khi bắt đầu làm bài toán dựng hình thì chúng ta phải nhận thức rõ là: mục đích không phải là ứng dụng thực tiễn nào cả! Nếu bạn bảo mình vẽ một hình lục giác đều thì mình sẽ gõ ngay *draw(polygon(6))* và có ngay một lục giác đều thật đẹp trên màn hình máy tính. Thế thôi. Có lẽ các nhà Toán học cổ Hy Lạp nghĩ ra trò chơi này (với 2 quy tắc là chỉ dùng thước và compa) chỉ để giải trí; khi mà thế giới còn thô sơ, không World Cup, không TV, không iPad thì mọi người vẽ đa giác đều cho qua thời gian vậy. Minh chứng? Nhà toán học người Đức Johann Gustav Hermes (1846 – 1912) mất 10 năm để vẽ hình đa giác đều 65 537 cạnh. Ông công bố công trình này vào năm 1894 trong một quyển sách dày 200 trang!

Thật ra thì luật chơi chỉ là thước thẳng và compa vì chúng ta phải dựa vào năm tiên đề (đã bàn trong phần 33.1). Và TD1 cho phép ta dùng thước thẳng, và TD 3 cho phép ta dùng compa. Ngoài ra không có TD nào tương đương với dùng thước có vạch cả!

## 34.1 Bài toán dựng hình: kiến thức cơ bản

Dựng hình là quá trình tạo ra các độ dài, góc và các hình học khác bằng cách chỉ sử dụng một thước kẻ và một compa. Quan trọng phải nhấn mạnh rằng dựng hình không phải là các vấn đề thực tế. Các học sinh hình học có thể sử dụng eke và thước kẻ (và thậm chí phần mềm) để xây dựng nhiều hình học với ít khó khăn hơn. Hơn nữa, chúng không phải là các vấn đề vật lý. Chúng hoàn toàn là các vấn đề lý thuyết.

Tất cả các phương pháp dựng hình bằng thước kẻ và thước cung bao gồm *việc lặp lại ứng dụng của năm phương pháp cơ bản* bằng cách sử dụng các điểm, đường thẳng và đường tròn đã được xây dựng. Các phương pháp dựng hình cơ bản này bao gồm:

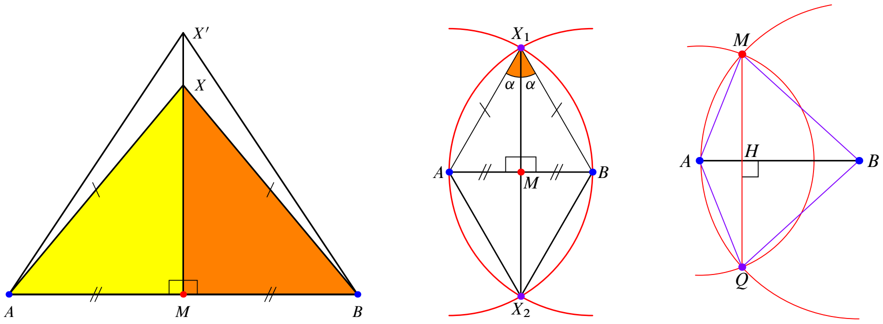
- Tạo đường thẳng qua hai điểm;
- Tạo đường tròn chứa một điểm và có tâm tại một điểm khác;
- Tạo điểm tại giao điểm của hai đường thẳng (không song song);
- Tạo một hoặc hai điểm tại giao điểm giữa một đường thẳng và một đường tròn (nếu chúng cắt nhau);
- Tạo một hoặc hai điểm tại giao điểm của hai đường tròn (nếu chúng cắt nhau).

Để làm một bài dựng hình thì chúng ta phải làm ba bước:

- *bước phân tích*, trong đó chúng ta *giả sử đã vẽ được hình cần vẽ*, rồi xem xét những gì chúng ta có, xem có gì đặc biệt.
- *bước dựng hình*, dựa trên phân tích ở bước 1 và
- *bước chứng minh*, chứng minh rằng hình này đúng như yêu cầu của bài toán.

### 34.1.1 Chia đôi đoạn thẳng

Cho một đoạn thẳng $AB$, tìm điểm $M$ trên nó sao cho $AM = BM$ (tức là tìm trung điểm của $AB$). Bước phân tích: giả sử rằng chúng ta có thể xây dựng điểm $M$ đó, sau đó tìm tính chất của nó và mối quan hệ với các hình đã tồn tại. Vì đây là hình học, chúng ta cần có các hình (tam giác, đường tròn, v.v.); hiện tại tờ giấy của ta rất đơn điệu vì chỉ có $AB$ và $M$. Do đó, hãy vẽ $MX \perp AB$, $AX$ và $BX$ (Hình 34.1a). Điều đặc biệt về $X$ là gì? Đó là: $AX = BX$ (vì sao? vì $\triangle XMA \cong \triangle XMB$ theo SAS). Do đó, $X$ là sự giao điểm của hai đường tròn: một có tâm tại $A$ với bán kính $AX$ và một có tâm tại $B$ với cùng bán kính. Nhưng chúng ta không biết $AX$! Đừng lo, chúng ta đã có $AB$. ☺




(a) (b) (c)

Hình 34.1: Chia đôi đoạn thẳng (a,b). Phương pháp xây dựng này có thể áp dụng để xây dựng một đường thẳng đi qua một điểm đã cho ($M$) và vuông góc với một đường thẳng $AB$ đã cho: vẽ đường tròn $(A, AM)$ và đường tròn $(B, BM)$, chúng cắt nhau tại 2 điểm $M, Q$, đoạn $MQ$ vuông góc với $AB$ vì $\triangle AHM \sim \triangle AHQ$ (c). Cuối cùng, do nếu 2 đường thẳng cùng $\perp$ với 1 đường thì song song, ta có thể dựng 1 đường thẳng qua 1 điểm và song song với 1 đường thẳng cho trước.

Vì vậy, các bước dựng hình là (Hình 34.1c):

- Vẽ một đường tròn có tâm tại $A$ với bán kính $AB$ (ai cho phép làm điều này? Tiên đề 3!);
- Vẽ một đường tròn có tâm tại $B$ với bán kính $AB$;
- Hai đường tròn này giao nhau tại hai điểm $X_1$ và $X_2$[†], sau đó lấy $X_1$ và $X_2$;
- Vẽ đoạn thẳng $X_1X_2$ (TD 1 cho phép), nó cắt $AB$ tại $M$.

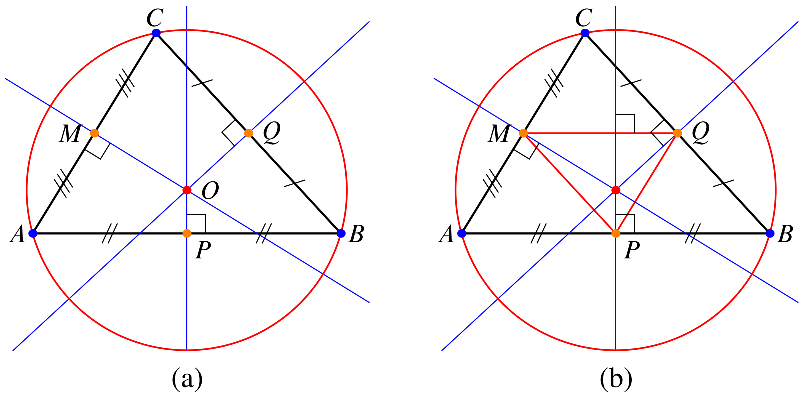
Đó chính là điểm mà chúng ta cần. Chắc không? Uhm, do đó, điều quan trọng không kém là việc chứng minh rằng xây dựng thực hiện được điều nói. Thật vậy, $\triangle X_2AX_1 \cong \triangle X_2BX_1$ (kiểm tra SSS), do đó chúng ta có các góc giống nhau tại $X_1$ như đã chỉ định, và điều này dẫn đến $\triangle X_1AM \cong X_1BM$ (SAS), kết quả là $|AM| = |BM|$.

Sau đây là một vài điều cần nhớ:

- Cho đoạn thẳng $AB$ thì $XM$ có tên là trung trực của $AB$ (chia đôi $AB$ và vuông góc với $AB$);
- Tam giác $ABX$ với $|AX| = |BX|$ gọi là tam giác cân. Tam giác cân có hai góc ở đáy bằng nhau;
- Tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác $ABC$ là giao điểm của 3 đường trung trực của ba cạnh (xem Hình 34.2a, chỉ cần áp dụng cách chia đôi 1 đoạn thẳng cho ba cạnh của $ABC$, ta sẽ tìm thấy tính chất này);

[†] Không có tiên đề nào cho cái này! Euclid bỏ sót chi tiết này.

- Nếu ngang đây mà dừng lại thì quá tiếc. Trong Hình 34.2a ta có 3 điểm $M, P, Q$, sẽ cho ta một tam giác, $\triangle MPQ$. Định lý tỉ lệ cho ta biết $MQ \parallel AB$, do đó trung trực của $AB$ chính là đường cao của $\triangle MPQ$ vẽ từ $P$. Và chúng ta đã phát hiện thêm một điều ngạc nhiên nữa: 3 đường cao của mọi tam giác gặp nhau tại một điểm. Điểm đó gọi là trực tâm (*orthocenter*) của tam giác.




Hình 34.2: Các đường thẳng gặp nhau tại một điểm trong tam giác: 3 đường trung trực gặp nhau tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác (a) và 3 đường cao gặp nhau tại trực tâm của tam giác. Thường ta dùng $H$ để chỉ trực tâm.

### 34.1.2 Chia đôi một góc

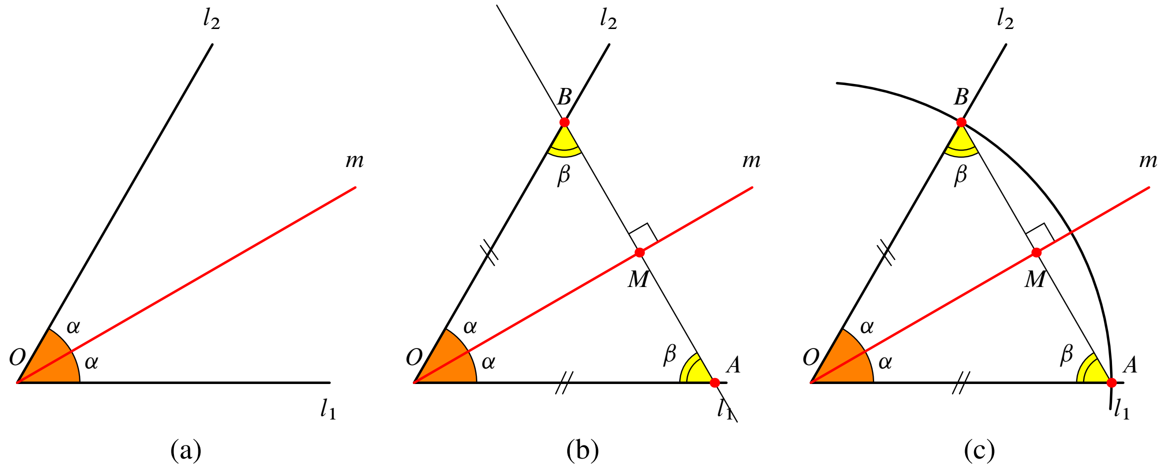
Bài toán chia đôi một góc cho trước: cho một góc, dựng một đường thẳng chia đôi góc này. Trong Hình 34.3a, góc $O$ là có sẵn và điều chúng ta cần dựng là đường thẳng $m$. Bước phân tích: để có một đường thẳng, chúng ta cần hai điểm, vì vậy chúng ta cần một điểm $M$ trên đường thẳng này (Hình 34.3b). Bây giờ, để làm cho đường thẳng $l_1$ và $l_2$ tham gia vào vấn đề, chúng ta vẽ một đường thẳng thông qua $M$ và $\perp m$. (Tại sao vuông góc? Điều này đặc biệt, vì nếu không, thì có vô số đường thẳng qua $M$.) Đường thẳng này cắt $l_1$ và $l_2$ lần lượt tại $A$ và $B$. Dễ dàng thấy rằng $|OA| = |OB|$ và $|BM| = |AM|$ (hai tam giác tương đẳng). Và bây giờ, chúng ta đảo quá trình và dựng $m$ như sau (Hình 34.3c)

- Vẽ một đường tròn có tâm tại $O$ với bất kỳ bán kính nào. Đường tròn này cắt $l_1$ tại $A$ và $l_2$ tại $B$;
- Chia đôi $AB$ (sử dụng phương pháp trước): lúc này chúng ta có $M$–trung điểm của $AB$;
- Vẽ $OM$–Đó chính là đường thẳng mà chúng ta đang tìm.

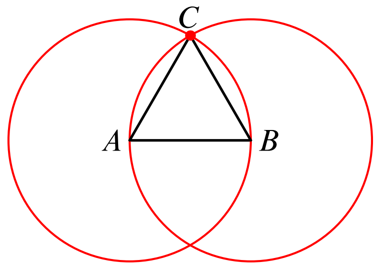
## 34.2 Dựng đa giác đều

Ngồi dùng thước kẻ và compa, nhưng dùng `Asymptote`, mình vẽ tam giác đều nội tiếp hình tròn, lục giác đều nội tiếp hình tròn. Một cảm giác thật thú vị khi chỉ xoay một vài compa và thế là, hình lục giác hiện ra trước mắt, hoàn toàn chính xác (Hình 34.4). Không cần kỹ sư lấy thước đo để kiểm tra 6 cạnh có bằng nhau không! Chắc chắn 100%.

### 34.2.1 Dựng tam giác đều và lục giác đều

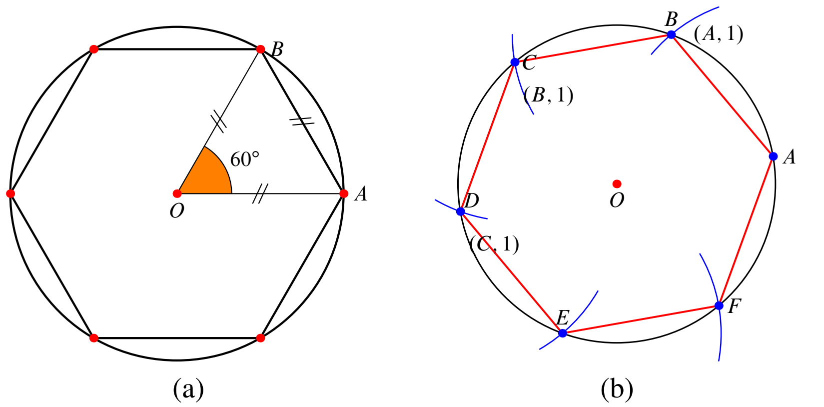



Hình 34.3: Chia đôi một góc.



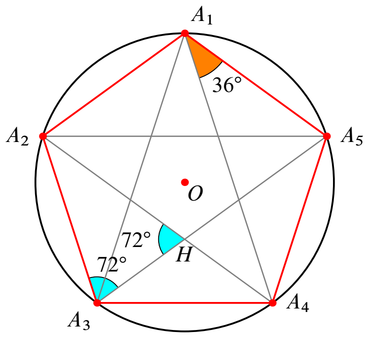

Chúng ta bắt đầu với đoạn thẳng $AB$, và cần xây dựng tam giác $ABC$ sao cho tất cả các cạnh có chiều dài bằng nhau (nghĩa là $|AB| = |BC| = |CA|$). Điểm quan trọng là: *điểm* $C$ *ở đâu?* Bước phân tích: giả sử ta đã vẽ được tam giác đều $ABC$ (hình bên), vì $|AC| = |AB|$, nên $C$ phải nằm trên đường tròn có tâm tại $A$ với bán kính là $AB$. Tương tự, vì $|BC| = |BA|$, nên $C$ nằm trên đường tròn có tâm tại $B$ với bán kính là $BA$. Bước dựng hình: chúng ta vẽ hai đường tròn này (và lý do tại sao chúng ta có thể làm điều này là do Tiên đề 3) và giao điểm của hai đường tròn này chính là $C$, sau đó vẽ $AC$ và $BC$, tam giác $ABC$ là tam giác cần dựng. Đây là cách Euclid xây dựng một tam giác đều. Bước chứng minh: quá rõ ràng.

Sau bài toán dựng tam giác đều là bài toán dựng hình vuông và hình lục giác đều. Ở đây mình chỉ bàn bài toán lục giác đều, và cho nó vui, ta sẽ dựng lúc giác đều nội tiếp một đường tròn đơn vị. Bước phân tích: giả sử đã vẽ được (Hình 34.4a), ta thấy rằng tam giác $OAB$ là một tam giác đều. Cho nên ta cần điểm $B$ sao cho $|AO| = |AB|$; do đó $B$ là giao điểm của hình tròn đơn vị và hình tròn $(A, 1)$ có tâm là $A$ và có bán kính là 1 (hay $OA$), xem Hình 34.4b. Có $B$ rồi thì ta xem $B$ như là $A$ và lặp lại những gì mới làm thêm năm lần nữa ta sẽ có một lục giác đều. (Nếu bạn đang thắc mắc mình tạo ra hình này như thế nào, xin xem Chương 38.)




Hình 34.4: Dựng một hình lục giác đều nội tiếp hình tròn đơn vị.

## 34.2.2 Dựng ngũ giác đều




Bài toán tiếp theo là dựng ngũ giác đều (*pentagon*). Bài này khó hơn nhiều. Sau một hồi loay hoay thì mình mới nhận thấy mình chưa biết gì về thằng này cả, vì ít khi gặp nó (còn tam giác đều thì quá hiểu). Do đó, trước khi dựng ngũ giác đều thì ta tìm hiểu nó đã nhé. Ta vẽ một ngũ giác đều (xem hình bên, mình dùng phần mềm để vẽ cho đẹp thôi), rồi vẽ thêm các đường chéo (vì cũng không biết làm gì hơn). Ngạc nhiên thay, làm vậy mà ta lại có một ngôi sao rất đẹp! Giờ ta xem góc trong của ngũ giác đều, ví dụ $\angle A_5A_1A_2$, bao nhiêu độ: dùng Eq. (37.29), ta có $(1-2/5)180^\circ = 108^\circ$. Ở mỗi đỉnh góc này chia ra ba góc nhỏ bằng nhau (vì sao?) nên mỗi góc nhỏ là $108^\circ/3 = 36^\circ$. Với thông tin về góc $36^\circ$, ta sẽ tìm thấy thêm một điều nữa: 2 đường chéo $A_2A_5$ và $A_3A_4$ song song. Ngoài ra, lại với thông tin về góc $36^\circ$, ta lại có $\triangle A_2A_3H$ là tam giác cân (vì góc $H$ bằng góc ở $A_3$, cùng là $72^\circ$).

Giờ ta lại hỏi: đường chéo ngũ giác đều dài nhiêu? Có 5 đường chéo lận! Nhưng chúng dài bằng nhau, (vì sao? tam giác tương đẳng). Ta chỉ cần xét $|A_1A_2| = 1$ và ta gọi chiều dài đường chéo là $d$. Ta có: $\triangle HA_2A_5 \sim \triangle HA_3A_4$ (dùng tiêu chuẩn AA, và góc chắn cung), vì vậy

$$\frac{|HA_2|}{|HA_4|} = \frac{|A_2A_5|}{|A_3A_4|}, \text{ với } \quad |A_3A_4| = 1, \quad |A_2A_5| = d, \quad |HA_2| = 1, \quad |HA_4| = d-1$$

Từ đó, ta có một phương trình bậc hai cho $d$, và tìm ra nó:

$$d^2 - d - 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \approx 1.618 \tag{34.1}$$

Đường chéo $d$ này chính là tỉ số vàng nổi tiếng thiên hạ! Thường thì các nhà toán học dùng ký tự $\phi$ cho tỉ số vàng.

Giờ ta tính chiều dài cạnh ngũ giác đều (đặt tên là $a_5$) khi bán kính đường tròn ngoại tiếp là 1. Trước hết, ta có $\alpha = \angle A_1OA_5 = 2\pi/5$. Nếu ta xét tam giác cân $OA_1A_5$, ta sẽ tính được $a_5$: $a_5 = 2\sin\alpha/2 = \sqrt{2(1-\cos\alpha)}$. Dùng lượng giác, ta có $\cos 2\pi/5 = (\sqrt{5}-1)/4$. Cuối cùng, $a_5 = \sqrt{5/2 - \sqrt{5}/2}$. Từ đó (từ công thức của $a_5$) mình mò ra cách vẽ (Hình 34.5). Chú ý $\sqrt{5}/2 = \sqrt{(1/2)^2 + 1}$, do đó ta cần $S$–trung điểm của $OM$. Hơn nữa,

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2} = \frac{10 = 2\sqrt{5}}{4} = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

Đó là lí do ta vẽ điểm $S'$, $|OS'| = (\sqrt{5}-1)/2$. Và $|A_1S'|$ chính là $a_5$. Sau khi có điểm $A_5$, thì mọi chuyện dễ dàng.

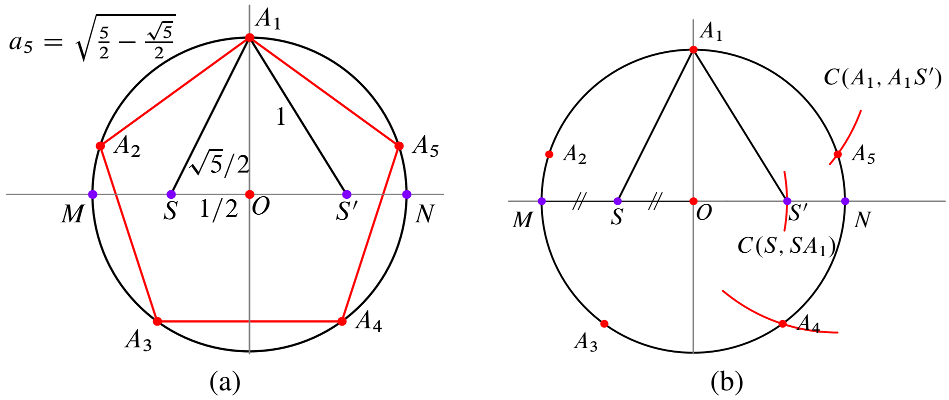
Và đó là cách Plotemy đã vẽ cách đây mấy thiên niên kỷ. Chú ý là Plotemy không ai khác mà là người có thể xem là *cha đẻ của lượng giác*.

### 34.2.3 Dựng đa giác đều 7 cạnh và 17 cạnh

Bài tiếp theo dĩ nhiên là 7-gon (đa giác đều 7 cạnh). Làm hoài không được thì google mới biết, không ai trên trái đất này làm được bằng compa và thước kẻ! Euclid cũng không, Archimedes cũng chịu, Plotemy bó tay. Descarte, Fermat, Newton thì sao? Cũng bó chân như phụ nữ Trung Hoa xưa thôi. Sau gần 2000 năm từ thời Euclid, không có ai vẽ thêm được đa giác đều $n$ cạnh cho trường hợp $n = 7, 9, 11, 13$. Thế nhưng mọi chuyện đột nhiên thay đổi vào năm 1796 khi Johann Carl Fredrich Gauss xuất hiện.

Gauss này là ai? Không ai hết mà chính là người vào năm 10 tuổi đã tính nhanh được tổng này: $1+2+3+\cdots+100$[†]. Vào năm 1796, lúc chỉ 19 tuổi, Gauss chứng minh rằng có thể vẽ được

[†]Chú ý là tính nhanh, còn nếu cứ lấy 1 với 2 được 3 rồi thêm 4 được 7... thì không phải là Toán! Muốn biết Gauss tính như thế nào, xin xem Eq. (31.2).




Hình 34.5: Dựng một hình ngũ giác đều nội tiếp hình tròn đơn vị.

đa giác đều 17 cạnh! Sau khi làm được bài này (không dễ tí nào), Gauss quyết định ông sẽ chọn làm nhà Toán học thay vì trở thành một triết gia. Vậy chúng ta có thể vẽ được đa giác đều số cạnh là số lẻ khi nó là $3, 5, 17$ cạnh. Dĩ nhiên là chúng ta phải hỏi ngay: có gì đặc biệt với $3, 5, 17$? Nếu để yên chúng như vậy thì chúng chỉ là 3 số nguyên tố $3, 5, 17$. Phải chạm vào chúng: trừ đi một sẽ có $2, 4, 16$. Hơn nữa, $2 = 2^1, 4 = 2^2$ và $16 = 2^4 = 2^{2^2}$. Như vậy thì $3, 5, 17$ có dạng: $2^{2^k} + 1$. Số như vậy thì nhà toán học người Pháp Pierre de Fermat (1607 – 1665) đã tìm ra trước đó rồi, và bây giờ chúng ta gọi chúng là số nguyên tố Fermat.

Gauss chứng minh 17-gon vẽ được bằng cách tính $\cos(2\pi/17)$, trong đó $2\pi/17$ là góc của một $17-$gon[††]. Ông tính ra $\cos(2\pi/17)$ như sau

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{17} &= \frac{1}{16}\left(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right)\\ &\quad + \frac{1}{8}\left(\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\right)\end{aligned} \tag{34.2}$$

Chú ý là $\cos(2\pi/5)$, cho 5-gon, thì rất dễ: chỉ giải 1 phương trình bậc hai. Trong khi đó $\cos(2\pi/7)$ thì phải giải một phương trình bậc 3. Tuy nhiên $\cos(2\pi/17)$ thì có thể tính bằng cách giải một loạt phương trình bậc hai. Đó là lí do tai sao có thể vẽ $17-$gon. Tổng quát lên, chúng ta có thể dựng hình $n-$gon nếu có thể tính $\cos 2\pi/n$ chỉ dùng $+, -, \times, /$ và lấy căn bậc hai cho các số tự nhiên.

Vì Euclid đã trình bày trong quyển sách *The elements* nổi tiếng của mình là có thể dùng compa và thước kẻ để chia một góc thành 2 góc bằng nhau, nếu chúng ta có thể dựng một $n-$gon thì chúng ta cũng có thể dựng $2n-$gon. Và từ $2n-$gon chúng ta có thể dựng $2(2n)-$gon. Như vậy, nếu dựng được $n-$gon thì có thể dựng được $2^j n-$gon, trong đó $j = 1, 2, 3, \ldots$

Chúng ta dựng được $4-$gon và $3-$gon, còn $12-$gon thì sao? Chú ý rằng $12 = 3 \times 4$. Dùng lượng giác chúng ta có thể chứng minh dễ dàng là $12-$gon là dựng được. Chúng ta sẽ tính $\cos{}^{2\pi}/_{12}$ theo $\cos{}^{2\pi}/_{3}$ and $\cos{}^{2\pi}/_{4}$:

$$\cos\frac{2\pi}{12} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{4}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{4} - \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{4}$$

Vì chúng ta đã dựng được $3-$gon và $4-$gon nên chúng ta có $\cos\frac{2\pi}{3}, \cos\frac{2\pi}{4}$ và $\sin\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{4}$. Và từ đó chúng ta dựng được $\cos 2\pi/12$. Như vậy, nếu $n-$gon và $m-$gon là dựng được thì $nm-$gon cũng dựng được. Và nếu, $m-$gon, $n-$gon và $p-$gon dựng được thì $nmp-$gon cũng vậy. Chứng minh: $nm-$gon và $p-$gon dựng được nên $nmp-$gon dựng được.

Bốn năm sau, tức lúc Gauss 24 tuổi, ông xuất bản quyển sách trứ danh *Disquistiones Arithmeticae* trong đó ông chứng minh: nếu $n = 2^j p_1 p_2 \cdots p_k$ trong đó $j \geq 0$ và $p_1, p_2, \ldots$ là số nguyên tố Ferma thì $n-$gon có thể dựng được bằng compa và thước kẻ. Đây là định lý Gauss. Tuy hay

[††]Tương tự $60° = 2\pi/6$ là góc của lục giác đều, xem Hình 34.4a.

là vậy, nó lại bỏ qua những đa giác mà số cạnh không có dạng $n = 2^j p_1 p_2 \cdots p_k$. Ví dụ $n = 7$ hay $n = 9$. Sau này nhà Toán học người Pháp Pierre Laurent Wantzel (1814 – 1848) lấp vào khoảng trống Gauss để lại. Tức là Wantzel chứng minh được: nếu $n-$gon là dựng được thì $n$ phải có dạng $n = 2^j p_1 p_2 \cdots p_k$. Gộp kết quả của Gauss và Wantzel lại ta có định lý Gauss-Wantzel: một $n-$gon chỉ vẽ được nếu $n = 2^j p_1 p_2 \cdots p_k$. Không có ngoại lệ! Như vậy 7–không phải là số nguyên tố Fermat–nên đừng tốn thời gian để vẽ đa giác đều 7 cạnh. Tương tự, 9 cạnh cũng không vẽ được. Tóm lại, nhờ Gauss và Wantzel mà chúng ta biết chỉ vẽ được mấy chú này thôi: 3 cạnh, 5 cạnh, $17, 257$, và $65\,537$.

Điều thú vị là cách chứng minh tại sao 7-gon không vẽ được. Đây là một bài toán hình học, nhưng mà chứng minh phải dùng tới đại số. Và chúng liên quan tới số phức, phương trình bậc hai, bậc ba. Chúng ta cứ nghĩ phương trình bậc hai ($ax^2 + bx + c = 0$) là một phương tiện để giải một bài toán nào đó. Và chúng ta đã biết nghiệm với công thức nổi tiếng Eq. (21.2). Còn gì để tìm hiểu về phương trình nữa? Chính các bài toán hình học, mà xem ra không có một giá trị thực tế nào cả (tại sao phải chỉ dùng compa và thước kẻ?), mà các nhà Toán học phải nghiên cứu về số, về phương trình, ... Như vậy các phương trình cũng trở thành đối tượng cho các nhà Toán học đại số mổ xẻ. Như Euclid mổ xẻ tam giác, hình tròn vậy. Các con số $(1, 2, 3, 3.14, \ldots)$, các hình (tam giác, hình tròn, ...) là các đối tượng của Toán học. Về mối tương quan giữa hình học và đại số có lẽ không ai nói hay bằng Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813)–nhà Toán học người Ý đã phát triển cơ học giải tích mà trong sách của ổng không có một hình vẽ! Lagrange nói như sau

> *Chừng nào đại số và hình học còn bị tách rời, tiến độ của chúng còn chậm và việc sử dụng chúng còn hạn chế; nhưng khi hai ngành khoa học này đã thống nhất với nhau, chúng đã mượn lực lượng của nhau và cùng nhau tiến tới sự hoàn hảo.*

## 34.3 Ba bài toán cổ nổi tiếng

Liên quan tới bài toán dựng hình là 3 bài toán cổ nổi tiếng: trisect an angle (chia 1 góc thành 3 phần bằng nhau), double a cube và square a circle (cho sẵn 1 hình tròn, dựng 1 hình vuông có diện tích bằng diện tích hình tròn). Cả ba bài này đều không làm được. Chứng minh bởi Pierre Laurent Wantzel. Mình chưa bao giờ hiểu từ đâu mà các nhà Toán học phát hiện ra các đường conic (ellipse, hyperbola, parabola). Tới giờ mới biết. Nguyên nhân là từ bài toán "double a cube". Giả sử chúng ta có hình lập phương cạnh a, thể tích của nó là $a^3$. Như vậy, hình lập phương có thể tích gấp đôi = $2a^3$. Hình lập phương gấp đôi này có cạnh là gì? Là $x$: $x^3 = 2a^3$. Cái hay là ở phương trình này. Không thích $x^3$, ta viết: $(x^2)x = 2a^3$. Đặt $y = x^2$, ta lại có $yx = 2a^3$. Và ta có 1 parabola và 1 hyperbola!

Xin phép quay lại với Gauss. Ông chỉ chứng minh là vẽ được 17−gon, còn ông không trình bày làm sao vẽ! Châm ngôn của Gauss là: *pauca sed matura* (few, but ripe), dịch là "ít, nhưng chín muồi". Vì thói quen này mà nhiều chuyện khôi hài cũng xảy ra khi ai đó công bố một kết quả nào đó thì Gauss lại nói: tôi làm cái đó mấy chục năm trước rồi.

Tại sao Gauss là người phát hiện ra 17-gon vẽ được? Đó là thiên thời, địa lợi và nhân hòa. Không phải ông thông minh hơn Archimedes, mà ông có trong tay thứ Archimdes không có: đại số và số phức. Làm sao ông tìm ra Eq. (34.2)? Vào thời Gauss thì Euler, Lagrange và Vandermonde đã nghiên cứu phương trình: $z^n - 1 = 0$, trong đó $z = a + bi$ là 1 số phức. Những vị này đã biết rất nhiều về phương trình này cho $n = 1, 2, \ldots, 11$. Suy nghĩ theo hướng này, Gauss đã có đột phá cho $n = 17$. Sao lại liên quan đến đa giác đều 17 cạnh? Vì nghiệm của phương trình trên chính là đỉnh của đa diện đều $n$ cạnh! Toán học không phải thú vị lắm sao?

Trò chơi là do con người đặt ra, do đó chúng ta toàn quyền thay đổi luật chơi. Trong bóng đá chúng ta thay đổi luật việt vị, thêm vào công nghệ VAR vv. Tương tự, thay vì dùng thước kẻ và compa, chúng ta hoàn toàn có thể chỉ dùng hoặc thước kẻ, hoặc compa, hoặc dùng thước kẻ có vạch.

Các bạn trẻ nên học hình học. Tại sao? Abraham Lincoln, tổng thống thứ 16 Mỹ, lúc nào cũng giữ một bản sao của Euclid trong túi yên ngựa của mình và nghiên cứu nó vào ban đêm dưới ánh sáng léo lắt của ngọn đèn dầu. Ông nói:

> *"Bạn không bao giờ có thể trở thành luật sư nếu bạn không hiểu chứng minh nghĩa là gì; và tôi rời bỏ hoàn cảnh của mình ở Springfield, trở về nhà của cha tôi, và ở đó cho đến khi tôi có thể hiểu các định lý trong sáu cuốn sách của Euclid".*

Về hình học Euclid ông nói thêm:

> *"Không một người đàn ông nào có thể nói hay trừ khi trước hết anh ta có thể tự định nghĩa được mình đang nói về điều gì. Euclid, nếu được học kỹ lưỡng, sẽ giải phóng thế giới khỏi một nửa tai họa của nó, bằng cách trục xuất một nửa những điều vô nghĩa hiện đang lừa dối và nguyền rủa nó."*

Như vậy chúng ta học hình học Euclid không phải để biết diện tích tam giác là gì. Cái đó goole có ngay! Chúng ta học nó là học cách lý luận logic, cái gì có trước, cái gì có sau, làm sao chứng minh một điều gì là đúng/sai. Mình hay thấy có những đối thoại thế này:

A: "thằng đó giàu lắm!"
B: "nò mà giàu chi."
A: "giàu mà."

Nếu mà A nói thế này: theo tau người nào có trên 1 tỷ là giàu. Thằng đó có 1.001 tỷ nên tau xem nó là giàu. Chú B sẽ hết cãi!

Học được như vậy thì quá thành công rồi. Một cuốn sách hay để học hình học là quyển *The Wonder Book of Geometry: A Mathematical Story* của David Acheson (Acheson, 2020).

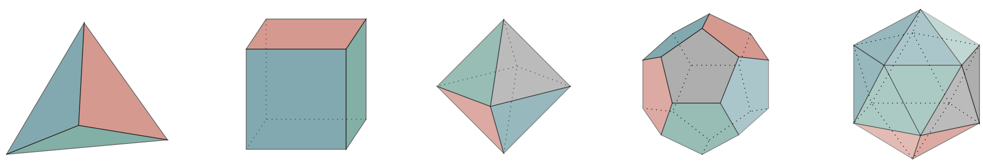
Ngày 20 tháng 3 năm 2023

# Chương 35

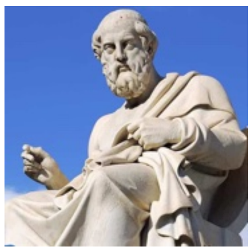
# Hình học: topology

MÌNH dốt hình học nên cứ trốn tránh nó, và dĩ nhiên một người mà tránh hình học thì thấy topology là sợ. Mọi chuyện thay đổi nhờ quyển sách *Euler's gem: The polyhedron formula and the birth of topology* của David Richeson (Richeson, 2008). Dĩ nhiên là vẫn chưa hiểu topology nhưng mà nó không còn là gì đó quá ghê gớm. Câu chuyện của topology có thể tóm tắt như sau.

Hình học Euclid thì ai cũng biết, và trong đó không thể không biết đa giác đều (tam giác đều, hình vuông, vv). Trong không gian 3 chiều thì cái gì tương ứng với đa giác đều? Xin thưa đó là đa diện đều (Hình 35.1). Một khối đa diện là một vật thể ba chiều bao gồm các mặt đa giác phẳng. Mỗi cặp mặt liền kề gặp nhau dọc theo một đoạn thẳng, được gọi là cạnh và các cạnh liền kề gặp nhau ở một đỉnh. Một đa diện đều là một đa diện có các mặt như nhau. Tứ diện đều và hình lập phương là hai ví dụ thông dụng nhất của các đa diện đều. Ngoài ra các nhà Toán học Hy Lạp cổ đại còn tìm ra thêm 3 cái nữa: octahedron, dodecahedron và icosahedron. Như vậy các nhà Toán học tìm ra được 5 đa diện đều. Tại sao gọi là tìm ra? Bởi vì trong thiên nhiên chúng ta gặp vài đa diện đều (nguyên tử carbon sắp xếp theo hình tứ diện đều chẳng hạn; ngoài ra dưới đáy đại dương cũng có khối mười hai mặt và icosahedron).




Hình 35.1: Đa diện đều hay Platonic solids. Tứ diện đều có 4 mặt tam giác, 6 cạnh, và 4 đỉnh. Hình lập phương có 6 mặt vuông, 12 cạnh, and 8 đỉnh. Hình bát diện đều có 8 mặt tam giác, 12 cạnh, and 6 đỉnh.



Điều thú vị là họ cũng chứng minh được chỉ có 5 đa diện đều thôi (chứng minh sẽ được trình bày cuối chương). Nhờ họ mà chúng ta không tốn thời gian vô vọng để tìm ra đa diện đều thứ 6. Đa diện đều trở thành nổi tiếng có lẽ nhờ triết gia Plato. Ông này là người đề xướng mô hình nguyên tử đầu tiên: không khí là octahedron, lửa là tetrahedron, nước là icosahedron, đất là hình lập phương. Lúc bấy giờ, con người chỉ biết đến 4 elements này thôi. Nhưng lại có 5 đa diện nên Plato cho rằng dodecahedron là hình dạng của cả vũ trụ! Vì mô hình này mà đa diện đều được biết tới với tên gọi là Platonic solids (tạm dịch là vật rắn Plato).

Là đối tượng trong hình học nên dĩ nhiên các nhà Toán học tìm hiểu về thể tích của các đa diện đều. Chuyện chẳng có gì đáng nói vì thể tích mấy hình này không cho chúng ta cái gì to lớn. Trong khi hình tròn cho chúng ta số Pi mà tới giờ vẫn chưa hiểu trọn vẹn. Tuy nhiên khi Rene Descartes xuất hiện thì mọi chuyện trở nên thú vị. Descartes là người để lại cho đời câu nói bất hủ *cogito, ergo sum*, (Latin: "I think, therefore I am).

Vào năm 1639 Descartes muốn giải thích thế giới nhưng mà chỉ dùng triết học thì không đủ nên ông chuyển sang Toán học. Và qua đó ông chú ý tới các đa diện đều. Cái đặc biệt là Descartes không làm gì với thể tích của chúng mà ông đi đếm số đỉnh (vertex, $V$), số cạnh (edge, $E$) và số mặt (face, $F$) của các đa diện đều. Với một người tầm cỡ như Descartes thì không khó để ông nhận ra: $F - E + V = 2$. (Nếu không tin, và các bạn nên như vậy, thì nhìn Hình 35.1 và kiểm chứng.) Cái Descartes làm thuộc lĩnh vực tổ hợp. Như vậy ông này áp dụng tổ hợp vào hình học, một điều trước đó chưa ai từng làm. Archimedes, Pythagoras, Euclid đều bỏ qua cái này.

Descartes cho rằng kết quả này không đáng để công bố nên ông viết vào sổ tay rồi cho vào hộc bàn. Sau khi Descartes mất ở Thụy Điển đồ vật của ông được mang về Paris và bị rơi xuống sông Seine. May mà chúng được vớt lên phơi khô và lúc Leibnitz (không ai khác hơn mà chính là người tạo ra giải tích với Sir Newton) đến Paris thì ông sao chép đem về Đức. Chính thông qua di sản của Leibnitz mà chúng ta mới biết đến câu chuyện Descartes tìm ra $F - E + V = 2$. Descartes sẽ không bao giờ biết được cái công thức cơ bản này ($F - E + V = 2$), đủ đơn giản đến mức có thể dạy cho học sinh mẫu giáo, lại có mối liên hệ sâu sắc với nhiều lĩnh vực toán học.

Ngày nay chúng ta gọi $F - E + V = 2$ là công thức khối đa diện Euler. Tại sao? Vì vào năm 1750 Leonhard Euler (1707 – 1783) chú ý đến đa diện đều, mà Euler thì giỏi Toán hơn Descartes nên không những ông tìm ra công thức, ông còn chứng minh nó đúng cho bất kỳ đa diện lồi (convex) nào vào năm 1751[†]. Euler phải mất 1 năm thì không đơn giản. Sau khi xuất bản 2 bài báo về đa diện và cho đời công thức Euler thì ông không bao giờ quay lại đề tài này nữa. Không như chúng ta trong trường đại học bây giờ cứ 1 thứ mà nhai lui nhai tới (Lí do: xin xem Chương 41).

Công thức khối đa diện Euler được xếp hạng thứ hai trong danh sách những công thức đẹp nhất trong Toán học. Vậy số một là gì? Là Euler's identiy $e^{i\pi} + 1 = 0$. Nhà toán học người Pháp Laplace[§] quả không sai khi nói:

> *Đọc Euler, đọc Euler, ông ấy là bậc thầy của tất cả chúng ta.*

$F - E + V = 2$ thì có gì đáng nói, có ứng dụng gì? Ấy vậy mà cái công thức này có đến khoảng 20 chứng minh. Phải có gì đặc biệt thì mới có nhiều nhà Toán học chú ý tới nó như vậy. Trong các chứng minh này thì mình thích nhất hai chứng minh: một của Cauchy và một của Legendre (toàn là Pháp cả). Trong khi Legendre thì chiếu đa diện lồi lên một hình cầu và dùng lượng giác cầu thì Cauchy lại chiếu đa diện lên một mặt phẳng và ông cho chúng ta cái gọi là network (hay graph)!

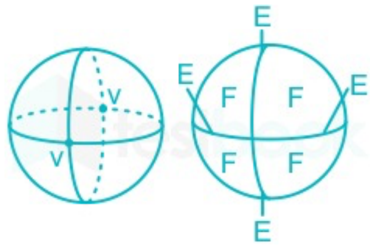
Tại sao có rất rất nhiều đa diện lồi mà tất cả đều có $F - E + V = 2$? Như vậy $F - E + V$ phải là cái gì rất đặc biệt. Các nhà Toán học gọi nó là *số Euler* hay đặc trưng Euler, và nó là một bất biến. Và họ muốn dùng cái bất biến này để so sánh các đa diện với nhau. Bản chất con người vốn thích làm chuyện so sánh. Chúng ta so sánh Messi và Ronaldo, thì các nhà Toán học so sánh các con số, so sánh các đa diện...

Dĩ nhiên sau đa diện thì các nhà Toán học đặt câu hỏi: công thức Euler có dùng được cho các đối tượng khác không, ví dụ bề mặt chẳng hạn? Lúc nào thì 2 bề mặt sẽ có $F - E + V$ như nhau? Lúc 2 surface có $F - E + V$ như nhau thì chúng gọi là tương đương topo. Việc này cũng như số lượng bánh xe có thể được sử dụng để phân biệt các phương tiện trên đường cao tốc. Mọi ô tô đều có bốn bánh, mọi xe đầu kéo đều có mười tám bánh và mọi xe máy đều có hai bánh. Nếu một chiếc xe không có bốn bánh, thì nó không phải là một chiếc xe hơi; nếu nó không có hai bánh thì không phải là xe máy. Theo cách tương tự, nếu $F - E + V$ không bằng 2, thì về mặt tô pô, bề mặt

[†]Euler có thể xem là một trong 5 nhà Toán học vĩ đại nhất mọi thời đại. Họ là Archimedes, Newton, Gauss, Euler và Riemann. Leonhard Euler (1707 – 1783) là một nhà toán học, vật lý học, nhà thiên văn học người Thụy Sĩ, người đã sáng lập ra nghiên cứu về lý thuyết đồ thị và cấu trúc liên kết, đồng thời có những khám phá tiên phong và có ảnh hưởng trong nhiều ngành toán học khác như lý thuyết số giải tích, giải tích phức và phép tính vô hạn.

[§]Pierre-Simon, hầu tước de Laplace (1749 – 1827) là một học giả và nhà thông thái người Pháp có công trình quan trọng đối với sự phát triển của kỹ thuật, toán học, thống kê, vật lý, thiên văn học, và triết học. Ông đã tóm tắt và mở rộng công việc của những người tiền nhiệm trong bộ năm tập Mécanique céleste (Cơ học Thiên thể). Trong thống kê, cách giải thích xác suất theo phương pháp Bayes được phát triển chủ yếu bởi Laplace.

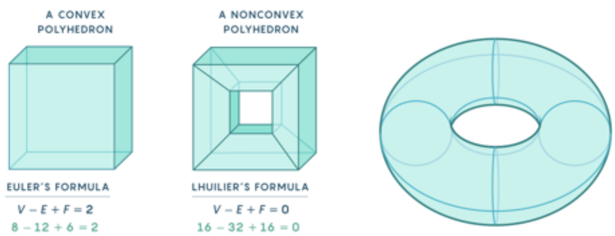
không phải là hình cầu. Tất cả những gì các nhà Toán học làm đều như chúng ta, chỉ có điều cái họ dùng để so sánh thì khó để tìm ra (ở đây là $F - E + V$). Mình dùng từ khó ở đây là vì không phải Archimedes, Pythagoras, Euclid–những người rành về đa diện–đều không phát hiện ra số Euler đó sao?




Topology là một dạng hình học mới mà trong đó chúng ta không quan tâm tới góc rộng bao nhiêu hay cạnh dài bấy nhiêu. Topology là hình học mà trong đó các đa diện lồi đều xem là như nhau (về mặt topology); vì chúng đều là hình cầu! Tại sao? Thử tưởng tượng có một đa diện đều làm bằng cao su và chúng ta có thể bơm nó thì nó sẽ phình lên thành một hình cầu. Vì lí do này mà topology có tên gọi dân gian là "rubber-sheet geometry" (tạm dịch: hình học tấm cao su). Topology là nghiên cứu về các hình dạng uốn nắn được (tức là không rắn). Khi một chú hề uốn một quả bóng bay thành hình con chó, quả bóng bay vẫn là một thực thể topo như cũ, nhưng về mặt hình học thì nó rất khác (con chó thì khác hình quả bóng).

Do đó topology là một nhánh Toán học nghiên cứu về cách đối tượng biến đổi liên tục (như chơi với đất sét, nhưng không được cắt). Từ 1 cục đất sét hình lập phương chúng ta có thể biến đổi thành 1 hình cầu. Do đó hình lập phương tương đương với hình cầu về mặt topology. Nếu bạn vẫn không tin thì dùng $F - E + V$: cube có $F - E + V = 2$. Còn hình cầu thì sao? Cũng có $F - E + V = 2$, (xem hình bên). Chuyện này không có chi là lạ lùng cả. Số 2 và số 4 là 2 số hoàn toàn khác nhau, nhưng trong con mắt của nhà Toán học thì chúng là một: số chẵn. Vậy thôi.

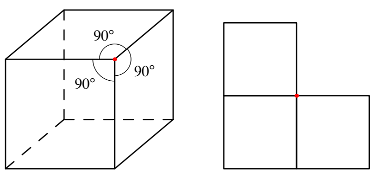
Chuyện trở nên phức tạp hơn và cũng thú vị hơn khi các nhà Toán học đưa lỗ (holes) vào bài toán. Câu hỏi họ đặt ra là: có hình nào không thỏa mãn công thức Euler? Một ví dụ đơn giản: khung hình (picture frame). Một khung hình chữ nhật (tấm hình đã lấy ra) có $F - E + V = 0$ (xem Hình 35.2). Và nếu khung hình này làm bằng cao su thì chúng ta có thể biến nó thành một hình xuyến (*torus*). Và hình xuyến thì gần như là hình cầu với 1 khác biệt: hình xuyến có 1 lỗ. Tới đây




Hình 35.2

Một điều thú vị là từ đa diện đều của các nhà Toán học cổ Hy lạp, cho đến công thức Euler, chúng ta có graph, topology và cả knots. Và nhờ đó mà hiểu biết hơn về DNA (là knots)! Thật là một mối liên hệ không ai tưởng tượng được.

Ngày nay Toán học có 3 ngành quan trọng là đại số, giải tích và topology (chứ không phải geometry). Trong số các giải Fields thì khoảng một phần ba chủ nhân đạt giải là topologist (tức là nhà tô pô học).




Bây giờ mình trình bày chứng minh rằng chỉ có 5 đa diện platonic. Chứng minh dựa trên sự quan sát sau đây: tổng của các góc của các mặt gặp nhau tại một đỉnh trên một hình đa diện platonic phải nhỏ hơn $2\pi$. Như minh họa trong hình tiếp theo, tại một đỉnh trên một khối lập phương (cube), có ba mặt có góc là $90°$: tổng của các góc này là $270°$, nhỏ hơn $2\pi$. Đối với một hình tam giác đều (tetrahedron), có ba mặt gặp nhau tại một đỉnh, mỗi mặt có góc là $60°$, do đó tổng góc là $180°$, một lần nữa nhỏ hơn $2\pi$. Bây giờ, chúng ta sẽ sử dụng kết quả này để chứng minh rằng chỉ có năm hình đa diện platonic, như thể hiện trong Hình 35.1.

*Chứng minh.* Hãy giả sử rằng hình đa diện platonic có các mặt là các đa giác $n$–đỉnh. Chúng ta biết rằng mỗi đa giác $n$–đỉnh có góc nội là $\alpha = 180°(1 - {}^2\!/_n)$. Hơn nữa, giả sử rằng có $m$ mặt gặp nhau tại một đỉnh, lưu ý rằng $m \geq 3$. Khi đó, tổng góc tại một đỉnh là $m\alpha$ hoặc $180°m(1 - {}^2\!/_n)$. Sử dụng kết quả ở trên, chúng ta có bất đẳng thức

$$180°m(1 - {}^2\!/_n) < 360° \iff m(1 - {}^2\!/_n) < 2$$

Bây giờ, bài toán hình học lại trở thành bài toán bất đẳng thức. Chúng ta sẽ bàn nhiều hơn về đề tài này trong Chương 37. May mắn đây là một bất đẳng thức dễ vì $m, n$ là số nguyên dương. Trước hết, ta nhận thấy $n \geq 6$, không thể thoả mãn bất đẳng thức $m(1 - {}^2\!/_n) < 2$ với $m \geq 3$. Vì thế, chúng ta chỉ cần xem xét $n = 3, 4, 5$ và sẽ thấy rằng chỉ có năm hình đa diện platonic. Ví dụ, nếu $n = 3$, chúng ta có $m(1 - 2/3) < 2$ hoặc $m < 6$. Do đó, $3 \leq m < 6$ hoặc $m = \{3, 4, 5\}$: chúng ta có sau đó hình tứ diện, hình bát diện và hình hai mươi mặt. $\square$

Ngày 26 tháng 3 năm 2023

# Chương 36

# Chuyện cái gương

MỘT điều đáng tiếc trong đời là mình ít khi dùng cái gương. Không phải dùng gương để làm đẹp vì mình thì không có gương nào giúp nổi. Ý mình là self reflection, tạm dịch là tự đánh giá bản thân. Mình sẽ dùng việc học Toán để minh họa. Dĩ nhiên các bạn trẻ có thể áp dụng cho những môn khác, và thậm chí cho chính cuộc đời các bạn.

Thời xưa mình học Toán như vậy nè. Làm xong một bài tập thì sang làm bài khác. Đây là thái độ làm bài tập chỉ để làm cho xong! Kiểm tra xong có điểm cao thì vui, có điểm thấp thì buồn. Lúc thì dậy sớm học, lúc thì thức khuya học, lúc thi đi nhà thờ học (theo bạn cho vui), khi thì ở nhà học. Lúc thì điểm cao lúc thì điểm thấp. Rồi còn một thói quen này nữa, là giải rất nhiều bài Toán, hết sách này thì qua sách khác.

Cách học này của mình không hiệu quả vì nó không dùng cái gương. Mặc dù mình đã đậu đại học với cách này, nhưng cái giá cũng không hề rẻ: đó là hy sinh những đam mê, ít thời gian đi chơi, ít thời gian tìm hiểu và học những thứ khác, như chơi đàn, học võ, đọc sách ...

Nếu bây giờ mình trở lại tuổi học trò thì mình sẽ học như sau. Mình không dám nói rằng cách này là tốt nhất. Nhưng ít nhất nó tốt hơn cái kiểu học thời xưa của mình. Hơn nữa hi vọng nó làm bạn suy nghĩ về vấn đề: học thế nào cho hiệu quả.

Sau khi giải xong một bài toán mình sẽ không chuyển sang làm bài khác ngay. Thay vào đó, mình sẽ ngồi chiêm nghiệm lại, và cố gắng trả lời những câu hỏi sau

- Lời giải có hợp lý không? Ví dụ làm $65 \times 65$ mà ra $3225$ thì phải biết là sai.
- Tại sao mình làm được bài này? Mình đã làm gì đặc biệt?
- Phương pháp làm bài này có tổng quát lên để giải các bài khác được không?
- Nếu mình thay đổi bài toán khác đi thì phương pháp mình đã dùng còn xài được không?
- Còn có cách giải khác không?

Chỉ sau khi như vậy thì mới chuyển sang làm bài toán khác. Lúc kiểm tra xong có điểm thì phải dành thời gian để xem mình đã làm sai chổ nào, tại sao mình sai. Những bài làm đúng cũng phải xem xét lại. Do may mắn, hay là mình đã biết cách giải? (Đây là bước *Đánh giá* như trình bày ở phần 31.9).

Tương tự như vậy, thời gian học cũng phải suy xét. Xem thử học vào buổi nào là mình có phong độ cao nhất. Một quyển sổ ghi chú lại khoảng một tuần là sẽ tìm ra câu trả lời. Ví dụ, thứ hai: sáng (tốt), chiều (xấu vì buồn ngủ), tối (xấu vì bị TV lôi cuốn). Nếu các ngày khác cũng vậy thì bạn nên học buổi sáng.

Không nên làm bài tập thuộc một chủ đề xong rồi chuyển qua bài tập thuộc một chủ đề khác. Tại sao? Vì lúc thi hay kiểm tra thì câu hỏi sẽ bao gồm nhiều chủ đề. Hơn nữa nếu mình đang học chủ đề A và làm câu hỏi thuộc chủ đề này thì dĩ nhiên là mình biết trước phương pháp giải rồi (ít nhiều liên quan tới chủ đề A). Nên tìm câu hỏi từ nhiều chủ đề như đề thi cuối năm (khoá trước), cuối cấp hay đề thi đại học, rồi làm. Đây là cách học xen kẽ–một tên gọi để cập trong cuốn *A Mind For Numbers: How to Excel at Math and Science (Even if You Flunked Algebra)* của Barbara Oakley (Oakley, 2014).

Mình nghe rất nhiều câu chuyện như thế này: có học sinh A học rất rất giỏi nhưng thi Tú Tài hay đại học thì rớt. Mình rất là ngạc nhiên. Học giỏi sao thi rớt được? Mình không biết nguyên nhân và cũng không có câu trả lời chắc chắn. Nhưng mà chúng ta có thể làm cách này: tập làm quen với không khí phòng thi. Lấy một cái đề rồi tới một phòng học trống (nếu được thì phòng trống ở một trường xa lạ!), đặt giờ, rồi ngồi làm. Hết giờ, thì không làm nữa. Sau đó nhờ Thầy Cô chấm, hay tự đối chiếu với lời giải. Làm vài lần như vậy mình nghĩ sẽ rất có lợi cho việc thi cử.

Cuối cùng thì xin đừng quên luật 80-20 trình bày ở Chương 2. Tập trung vào các đề tài quan trọng thôi. Và trong môn Toán cũng có thể áp dụng luật 80-20, ví dụ tập trung học những phần quan trọng thôi. (Dĩ nhiên đối với các bạn giỏi thì có thể học hết).

Hồi xưa mình cứ giải hết bài trong sách này thì tìm sách khác và giải tiếp. Dĩ nhiên có nhiều lí do. Thứ nhất là cảm giác sướng khi làm xong một bài toán. Cái này tương tự Messi ghi bàn vậy thôi. Dù đã ghi cả mấy trăm bàn thắng, Messi vẫn thích ghi bàn, vì cái cảm giác sung sướng. Lí do thứ hai, theo suy đoán thôi, là mình suy nghĩ rằng giải càng nhiều bài thì sẽ cover hết tất cả bài toán. Một ý nghĩ thật ngây ngô!

Bây giờ thì mình sẽ không làm như vậy. Mỗi dạng bài tập chỉ làm $2, 3$ bài thôi. Và sau mỗi bài thì ngồi chiêm nghiệm như trên. Giải thêm bài thứ 4 không có ý nghĩa gì cả. Vì sao? Vì lúc này chúng ta không còn suy nghĩ nữa; thay vào đó chúng ta chỉ bắt chước những gì đã làm với các bài tập trước đó (Oakley, 2014). Có thể lấy ví dụ của người tập tạ: nếu mà chúng ta cứ đẩy tạ 10kg mãi thì làm sao mà đẩy tạ 50kg được? Thậm chí mình sẽ suy nghĩ xem Thầy Cô làm sao nghĩ ra bài toán này. Và nếu tìm được cái bí mật này thì hô hô hô: mình là người làm chủ cuộc chơi, chứ không còn bị động. Thời gian dư ra, mình sẽ cô đọng kiến thức (ví dụ về lượng giác), vào một tờ giấy A4. Lúc làm điều này thì không nhìn sách vở. Nếu được thì cô đọng 1/2 tờ giấy A4 thôi. Nếu được thì 1/4 tờ A4 thôi, cho đến một lúc chỉ còn một công thức hay khái niệm quan trọng nhất của lượng giác, mà từ đó có thể suy ra tất cả. Đó mới được gọi là cách học tốt nhất vậy.

Ngoài việc cô đọng kiến thức (tốt cho thi và kiểm tra) thì mình cũng sẽ ghi chú cẩn thận những bài Toán đã giải, kể cả làm sao mình nghĩ ra lời giải đó. Lí do: nếu không làm thì sau vài tháng mình sẽ quên ngay. Hồi xưa thì mình cũng đã làm chuyện này, và hình như cái tập của mình hữu ích cho Đại, lúc hắn luyện thi vào ĐH Kiến Trúc.

Chúng ta thỉnh thoảng nghe câu chuyện như thế này. Một cô nương nọ học thì ít, chơi lại nhiều mà lúc nào điểm số cũng cao. Câu chuyện như thế này không nên tin. Thế nào là học ít? Có phải học nhiều là hiệu quả? Nếu chúng ta học cả ngày, nhưng cái bàn học ở gần cái TV đang mở một chương trình mình thích, cái điện thoại thì liên tục có tin cập nhật của Facebook thì chắc chắn không hiệu quả bằng người 'học ít'. Dù học thế nào thì các bạn nên chú ý đến công thức này

$$\text{Công việc chất lượng cao tạo ra} = \text{Thời gian dành ra} \times \text{cường độ tập trung} \tag{36.1}$$

Điều quan trọng là cường độ tập trung (dịch từ tiếng Anh: intensity of focus). Lúc học thì không người yêu iết chi cả, tập trung cao độ trong vòng một hai giờ cho một chủ đề. Xong thì nghỉ, rồi chuyển qua chủ đề khác.

Sau đây mình sẽ trình bày vài ví dụ để minh họa cho những luận điểm kể trên.

**Ví dụ minh họa 1**. Giả sử chúng ta phải làm bài toán sau: tính căn thức sau đây không dùng máy tính:

$$\sqrt{104\sqrt{6}+468\sqrt{10}+144\sqrt{15}+2006} \tag{36.2}$$

Giả sử bạn giải được bài này, lời giải là $13\sqrt{2}+4\sqrt{3}+18\sqrt{5}$. Sau đó các bạn lại gặp phải bài sau:

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}} \tag{36.3}$$

Liệu các bạn có cần mất thời gian để làm bài này không? Chỉ cần chú ý một tí thì chúng ta thấy rằng Eq. (36.3) rất giống Eq. (36.2). Về mặt cấu trúc thì 2 bài này giống y chang: cả hai đều có, dưới dấu căn, $\sqrt{\square}+\sqrt{\square}+\sqrt{\square}$ và một số nguyên. Bây giờ hãy xem làm sao Thầy/Cô nghĩ ra Eqs. (36.2) and (36.3) nhé.

Người thầy (hay cô) làm thế này nè: họ bắt đầu bằng

$$(x\sqrt{a}+y\sqrt{b}+z\sqrt{c})^2 = ax^2+by^2+cz^2+2xy\sqrt{ab}+2yz\sqrt{bc}+2zx\sqrt{ca}$$

Sau đó họ chọn hai bộ số $(a,b,c)$ và $(x,y,z)$, ví dụ với

$$(a,b,c) = (2,3,5), \quad (x,y,z) = (13,4,18)$$

họ tạo ra Eq. (36.2). Và với hai bộ số khác họ sẽ tạo ra bài tập tương tự. Đó là lí do họ đi dạy 40 năm mà không bao giờ thiếu bài tập cho học sinh.

**Ví dụ minh họa 2**. Đơn giản biểu thức sau

$$\frac{\sqrt{10+\sqrt{1}}+\sqrt{10+\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10+\sqrt{99}}}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}} \tag{36.4}$$

Lại giả sử các bạn làm xong bài này (lời giải là $1+\sqrt{2}$, một đáp án tuyệt diệu mà lời giải mình sẽ trình bày sau), rồi có cần làm bài sau không:

$$\frac{\sqrt{8+\sqrt{1}}+\sqrt{8+\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{8+\sqrt{63}}}{\sqrt{8-\sqrt{1}}+\sqrt{8-\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{8-\sqrt{63}}} \tag{36.5}$$

Không đâu: không cần tốn một giây người sử dụng chiếc gương thường xuyên sẽ trả lời: $1+\sqrt{2}$. Tại sao? Chúng ta phải quan sát xem thử có gì đặc biệt trong:

$$\frac{\sqrt{10+\sqrt{1}}+\sqrt{10+\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10+\sqrt{99}}}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}} \tag{36.6}$$

Tại sao 10 và 99? Hai số này có liên hệ gì? Dễ thấy rằng: $99 = 100-1 = 10^2-1$. Giờ thì các bạn thấy tại sao trong Eq. (36.5), chúng ta có 8 và 63: $63 = 64-1 = 8^2-1$. Và với một ít tinh tế như vậy các bạn đã giải tất cả các bài có dạng:

$$\frac{\sqrt{n+\sqrt{1}}+\sqrt{n+\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}{\sqrt{n-\sqrt{1}}+\sqrt{n-\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{n-\sqrt{n^2-1}}} \tag{36.7}$$

Đó là kỹ thuật tổng quát hóa trong toán học. Về điều này, nhà toán học lừng danh người Pháp Henri Poincaré đã nói:

> *Giả sử tôi dành thời gian để giải một phép tính phức tạp và sau nhiều cố gắng mới có kết quả, tôi sẽ không có lợi ích gì nếu điều đó không giúp tôi dự đoán được kết quả của các phép tính tương tự khác và hướng dẫn chúng một cách chắc chắn, tránh sự mò mẫm mù quáng như tôi phải chấp nhận lần đầu.*

Hồi xưa khi đi dạy kèm, mình nhớ một câu chuyện thế này. Mình ra đề bài và học trò cứ ngồi thừ ra đó không động đậy gì cả, như bị ai điểm huyệt. Theo kinh nghiệm thì các bạn phải làm gì đó. Như Thầy Quang dạy chuyên Toán trường Quốc học Huế hay nói "cất cái tay nè..." Cố gắng hoặc là vẽ hình, hoặc là làm đơn giản bài toán. Không giải được bài này thì giải bài tương tự, nhưng dễ hơn. Ít nhất thì cũng có điểm hơn là ngồi không. Xem thêm sách *How to solve it* của Polya, đã đề cập ở Chương 19 hay phần 31.9.

**Ví dụ minh họa 3**. Tính căn thức sau (không dùng máy tính):

$$A = \sqrt{\frac{1998 \times 1999 \times 2000 \times 2001 + 1}{4}}$$

Nếu mà bạn sợ $1998, 1999, \ldots$ (không sao, mình cũng sợ chúng thôi) thì quan sát rằng bắt đầu với 1998, chúng ta chỉ việc thêm một để có 1999, rồi thêm một để có 2000 và 2001. Vậy thì thay vì giải bài trên, thử giải bài sau, mà chắc chắn là ai cũng làm được:

$$A_1 = \sqrt{\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{2} = \frac{5}{2}$$

Sau thành công đó thì phải tiến lên làm tiếp bài này:

$$A_2 = \sqrt{\frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1}{4}} = \frac{\sqrt{121}}{2} = \frac{11}{2}$$

Tới đây thì chúng ta thấy chìa khóa rồi. Viết $A_1, A_2$ cạnh nhau (để thấy quy luật):

$$A_1 = \sqrt{\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1}{4}} = \frac{5}{2} = \frac{1 \times 4 + 1}{2}$$
$$A_2 = \sqrt{\frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1}{4}} = \frac{11}{2} = \frac{2 \times 5 + 1}{2}$$

Và đó cũng chính là lời giải của bài toán ban đầu. Tức là,

$$A = \sqrt{\frac{1998 \times 1999 \times 2000 \times 2001 + 1}{4}} = \frac{1998 \times 2001 + 1}{2} \tag{36.8}$$

Không tin thì bạn dùng máy tính kiểm tra Eq. (36.8). Đó là cách kỹ sư hay nhà khoa học làm việc, còn các nhà Toán học thì cần phải chứng minh Eq. (36.8). Nhưng đó là chuyện nhỏ. Chúng ta chỉ việc xét 4 số tự nhiên liên tiếp $n, n+1.n+2, n+3$ và kiểm tra xem đẳng thức sau có đúng không:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n(n+3)+1)^2$$

Và để làm điều đó, chúng ta chỉ cần khai triển 2 vế của phương trình trên và thấy chúng như nhau là xong.

**Ví dụ minh họa 4**. Đây là một câu hỏi phỏng vấn của công ty Amazon mà mình đã học được từ youtuber Mindyourdecision: Gọi $S$ là tập hợp tất cả các số có 5 chữ số được tạo bằng các chữ số $1, 2, 3, 4, 5$ không lặp lại. Tổng tất cả các số trong $S$ là bao nhiêu?

Nếu chúng ta không biết bắt đầu từ đâu thì bắt đầu với một bài đơn giản hơn. Thay vì giải bài trên chúng ta giải bài này: $S$ là tập hợp các số có 3 chữ số được tạo bằng cách sử dụng $1, 2, 3$ (không lặp lại). Sau đó, chúng ta có thể liệt kê tất cả 6 số trong tập $S$:

$$S = 123, 132, 213, 231, 312, 321$$

Khi đã biết tất cả các số trong $S$, chúng ta sẽ lấy máy tính bỏ túi ra và tính tổng chứ? Không không không. Chúng ta không sử dụng cái đó, chúng ta tính tổng theo cách thủ công và với sự quan sát tinh tế, chúng ta có thể nhìn ra đường đi. Hãy biểu thị bằng $s$ tổng của tất cả các số trong $S$. Điểm mấu chốt là: *Có 2 số bắt đầu bằng 1, 2 số bắt đầu bằng 2 và 2 số bắt đầu bằng 3*. Như vậy, tổng của $S$ không tính đến chữ số hàng chục và hàng đơn vị là:

$$s_3 = 1 \times 100 \times 2 + 2 \times 100 \times 2 + 3 \times 100 \times 2 = 2 \times 100 \times (1+2+3)$$

Tương tự, chúng ta có tổng các phần mười $s_2$ và tổng các đơn vị $s_1$ là

$$\begin{aligned} s_2 &= 1 \times 10 \times 2 + 2 \times 10 \times 2 + 3 \times 10 \times 2 = 2 \times 10 \times (1 + 2 + 3) \\ s_1 &= 1 \times 2 + 2 \times 2 + 3 \times 2 = 2 \times (1 + 2 + 3) \end{aligned}$$

Do đó, tổng của $S$ là $s_1 + s_2 + s_3$:

$$2 \times (1 + 2 + 3) + 2 \times 10 \times (1 + 2 + 3) + 2 \times 100 \times (1 + 2 + 3) = 2 \times 6 \times (1 + 10 + 100)$$

Bây giờ, chúng ta có thể quay lại câu hỏi phỏng vấn Amazon. Điểm mấu chốt là: *Có 24 số bắt đầu bằng 1, 24 số bắt đầu bằng 2, 24 số bắt đầu bằng 3, 24 với 4 và 24 với 5*. Tổng là[†]

$$15 \times 24 \times (1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4) = 15 \times 24 \times 11\,111 = \boxed{33\,333 \times 120}$$

Câu trả lời cuối cùng là: 3 999 960. Bạn đã thấy đấy nhờ làm bài đơn giản (với 3 số $1, 2, 3$) mình đã tìm ra lời giải cho bài Amazon. Đó là một cách rất hay cho người đau khổ với Toán. Một người bạn của mình (mà giỏi Toán hơn mình nhiều) đã chỉ cho một giải pháp thông minh hơn: đó là phương trình đóng hộp ở trên. Ba là số trung bình cộng của mỗi chữ số[††] và có 120 số (chú ý $120 = 5!$) trong $S$ có dạng 33 333, vì vậy tổng là $120 \times 33\,333$.

**Ví dụ minh họa 5**. Ví dụ này dành cho mấy bạn mất căn bản về Toán. Ví dụ, nhiều bạn viết $(x + 5)^2 = x^2 + 5^2$. Chỉ cần một ví dụ là biết ngay như vậy là sai. Chẳng hạn, nếu $x = 1$ thì chúng ta có: $36 = 1^2 + 25 = 26$, một điều vô lý! Như vậy $(x + 5)^2$ không thể là $x^2 + 5^2$. Không cần nhớ gì cả, ngoại trừ định nghĩa của $a^2$: $a^2 = a \times a$. Do đó

$$(x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5) = x(x + 5) + 5(x + 5) = x^2 + 5x + 5x + 25 = x^2 + 10x + 25$$

Chỉ cần đọc chương 1, và 2 sách Toán mình viết (Nguyen, 2023), và nỗ lực cá nhân bạn sẽ không còn lo về Toán nữa.

**Ví dụ minh họa 6**. Ví dụ này minh họa sự cần thiết của óc quan sát. Bài toán là: tính biểu thức sau không dùng máy tính:

$$A = \frac{53^3 + 24^3}{53^3 + 29^3}$$

Dĩ nhiên là chiến thuật đầu tiên mà chúng ta nghĩ đến là dùng hằng đẳng thức

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Sách GK ở nước mình hay thêm chữ đáng nhớ sau 'hằng đẳng thức', thật ra không có gì đáng nhớ cả. Nên hiểu cách derive chúng hơn là nhớ thuộc lòng. Với hằng đẳng thức này chúng ta hi vọng có thể khử một nhân tử chung nào đó. Làm theo cách này, chúng ta sẽ có:

$$A = \frac{(53 + 24)(53^2 - 53 \times 24 + 24^2)}{(53 + 29)(53^2 - 53 \times 29 + 29^2)}$$

Không có gì để khử cả, chúng ta đang làm bài toán phức tạp hơn! Tới đây thì phải ngồi lại, tĩnh tâm và hỏi: tại sao $A$ có $53, 24$ và 29? Giữa ba con số này có mối liên hệ nào không? Hỏi được câu này là coi như giải được một phần ba bài này. *Rõ ràng là:* $53 = 24 + 29$. Quá tuyệt! Như vậy chúng ta có 3 khả năng: (1) thay $53 = 24 + 29$, (2) thay $24 = 53 - 29$ và (3) thay $29 = 53 - 24$. Cái nào cũng cho chúng ta kết quả cả, nhưng rõ ràng (1) là tốt nhất vì không có dấu trừ. Cho nên, bây giờ chúng ta đặt $a = 24$ và $b = 29$, và $A$ là:

$$A = \frac{(a + b)^3 + a^3}{(a + b)^3 + b^3} = \frac{(a + b + a)[(a + b)^2 - (a + b)a + a^2]}{(a + b + b)[(a + b)^2 - (a + b)b + b^2]} = \frac{2a + b}{a + 2b} = \frac{77}{82}$$

[†] Lưu ý rằng $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.
[††] Tức là $3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)/5$.

Chú ý rằng hai số hạng màu đỏ bằng nhau, và triệt tiêu lẫn nhau. Kết quả là một số dương nhỏ hơn một, rất có lý khi nhìn vào $A$.

Bây giờ chúng ta sẽ giải bài Eq. (36.4) để minh họa một điều rất thú vị về Toán. Chúng ta bắt đầu từ đâu? Có quá nhiều dấu căn và nhiều số hạng quá. Mình thậm chí đã dùng máy tính để tính và kết quả là 2.41421, nghĩa là $1+\sqrt{2}$. Như vậy bài toán này không phải là một trò đùa, mà đúng là có cách để đơn giản căn thức này. Chìa khóa để giải là dấu cọng và trừ ở mỗi cặp số ở tử số và mẫu số:

$$\sqrt{10+\sqrt{1}}, \quad \sqrt{10-\sqrt{1}}$$

Nếu chúng ta lấy 2 số này trừ cho nhau và bình phương lên, chúng ta sẽ có:

$$\left(\sqrt{10+\sqrt{1}}-\sqrt{10-\sqrt{1}}\right)^2 = 20-2\sqrt{100-1} = 2(10-\sqrt{99}) \tag{36.9}$$

Số hạng màu đỏ này xuất hiện ở mẫu số của Eq. (36.4)! Chúng ta đang đi đúng hướng. Lấy căn bậc hai của Eq. (36.9), chúng ta lại có:

$$\sqrt{10+\sqrt{1}}-\sqrt{10-\sqrt{1}} = \sqrt{2}\sqrt{10-\sqrt{99}}$$

Làm điều tương tự cho các cặp khác, và chúng ta sẽ được:

$$\begin{aligned}
\sqrt{10+\sqrt{1}}-\sqrt{10-\sqrt{1}} &= \sqrt{2}\sqrt{10-\sqrt{99}}\\
\sqrt{10+\sqrt{2}}-\sqrt{10-\sqrt{2}} &= \sqrt{2}\sqrt{10-\sqrt{98}}\\
\vdots &= \vdots\\
\sqrt{10+\sqrt{99}}-\sqrt{10-\sqrt{99}} &= \sqrt{2}\sqrt{10-\sqrt{1}}
\end{aligned}$$

Giờ thì chúng ta sẽ cọng các kết quả trên, tức là cọng các vế trái lại, và cọng các vế phải lại,

$$\underbrace{\sqrt{10+\sqrt{1}}+\cdots+\sqrt{10+\sqrt{99}}}_{A} -$$
$$\underbrace{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}}_{B} = \sqrt{2}\left(\underbrace{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}}_{B}\right)$$

Và do đó,

$$A-B=\sqrt{2}B \iff A=(1+\sqrt{2})B \iff \frac{A}{B}=1+\sqrt{2}$$

Và từ đó chúng ta thu được kết quả $1+\sqrt{2}$. Cái hay của bài này là chúng ta cần tìm $A/B$, nhưng chúng ta lại đi tính $A-B$. Tại sao? Vì cho bài này $A-B$ dễ hơn $A/B$. Còn nếu bạn thắc mắc làm sao biết $A-B$ dễ hơn $A/B$? Làm thế nào để một họa sĩ biết đặt bút của mình ở đâu? Kinh nghiệm, nguồn cảm hứng, thử nghiệm và sai sót, may rủi, như Paul Lockhart đã nói. Để minh họa cho điều này, câu chuyện vui về các nhà Toán học sau rất hay[†]:

> *Một người đàn ông đang đi bộ vào ban đêm thì thấy một người đàn ông đang bò tìm cái gì dưới ánh đèn mờ của đèn đường. "Này, ông đang tìm gì thế?", người đàn ông đầu hỏi; "Tôi mất một đô la," người kia trả lời. Nghe vậy, người đàn ông thứ nhất cũng bò tìm giúp. Sau một hồi tìm không thấy gì thì mới hỏi "Ông có chắc là ông mất nó ở đây không?". "Không," người đàn ông thứ hai trả lời, "Tôi đánh rơi nó ở cuối đường. Nhưng mà chỉ có nơi đây mới có ánh sáng."*

[†]Nguồn: https://www.math.utah.edu/~cherk/mathjokes.html.

Giờ thì chúng ta sẽ ngồi ngắm vẻ đẹp của toán học:

$$\frac{\sqrt{10+\sqrt{1}}+\sqrt{10+\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10+\sqrt{99}}}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}+\cdots+\sqrt{10-\sqrt{99}}}=1+\sqrt{2}$$

Một biểu thức cồng kềnh, xấu xí như vế trái hóa ra lại là một số ngắn gọn ở vế phải. Đó là một điều thú vị về Toán: đi tìm sự đơn giản trong cái phức tạp. Và chính nó mới là cốt lõi của toán học, chứ không phải tính ra, dùng máy tính, vế trái là $2.4142$. Chỉ có kỹ sư, nhà khoa học, hay người làm toán ứng dụng mới làm vậy.

**Ví dụ minh họa 7**. Sau một ngày dài, ba ngư dân đã câu được một lượng cá kha khá. Họ chuẩn bị lên đường về nhà thì một cơn bão bất ngờ nổi lên. Dưới bầu trời cuồng nộ, họ quyết định tìm nơi trú ẩn trên một hòn đảo gần đó. Họ dỡ hàng bắt được và đốt lửa trước khi chìm vào giấc ngủ. Vài giờ sau, một ngư dân thức dậy và thấy rằng thời tiết đã đủ ổn định để có thể trở về an toàn. Không muốn làm phiền bạn bè, anh ta chia số cá câu được thành ba phần bằng nhau và thấy lại một con cá, và người đánh cá này ném nó trở lại biển. Sau đó anh ta rời đi với phần của mình. Một lúc sau, người đánh cá thứ hai tỉnh dậy, cũng với mong muốn được trở về nhà. Không biết rằng một trong những người bạn của mình đã rời đi, anh ta cũng chia mẻ cá thành ba phần bằng nhau. Một lần nữa, còn lại một con cá, và anh ta lại ném nó trở lại biển. Người đánh cá chèo đi với phần của mình. Cuối cùng, người đánh cá thứ ba xuất hiện và trải qua quá trình tương tự, chia số cá còn lại thành ba phần, tìm thấy một con còn lại, sau đó anh ta ném trở lại biển. Anh ta rời đảo với phần của mình.

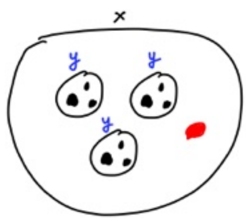
Và bây giờ là câu hỏi dành cho các bạn: số lượng cá mà ba ngư dân câu được là bao nhiêu? Biết rằng ba người này là những người câu cá tồi.

Đây là loại bài toán gọi là *word problems*, nghĩa là toàn bộ bài toán chỉ được diễn giải bằng từ ngữ mà không có ký hiệu toán học. Để giải loại bài này chúng ta sẽ đưa vào $x, y, z$ và dịch các thông tin cho trong bài toán thành các phương trình, cuối cùng chúng ta giải các phương trình đó.

Chúng ta gọi $x$ là số cá ba người ngư dân câu được và dĩ nhiên $x$ là một số nguyên dương (ví dụ $x = 12$). Vì người thứ nhất có thể chia $x$ thành 3 phần bằng nhau và dư một, nên ta có thể viết

$$x = 3y + 1 \tag{36.10}$$

trong đó $y$ cũng là một số nguyên dương; $y$ chính là phần cá người thứ nhất mang về nhà. Do đó, số cá còn lại là $2y$. Nếu bạn thấy khó khăn trong việc hiểu phương trình này, thì xin tưởng tượng trong đầu như thế này: người thứ nhất chia $x$ con cá thành ba nhóm mà mỗi nhóm có tên là $y$ và dư một con (xem hình bên; đừng suy nghĩ là đại số và hình học là hai thứ hoàn toàn không chơi với nhau; ngược lại chúng rất có quan hệ gần gũi.). Tương tự, từ người thứ hai chúng ta có




$$2y = 3z + 1 \tag{36.11}$$

trong đó $z$ cũng là một số nguyên dương; $z$ chính là phần cá người thứ hai mang về nhà. Cuối cùng, từ người thứ ba, ta có phương trình, với số nguyên dương $p$ chính là số cá người thứ ba mang về:

$$2z = 3p + 1 \tag{36.12}$$

Từ ba phương trình này chúng ta sẽ thu được một phương trình của $x$ theo $p$:

$$x = \frac{3}{2}(3z+1)+1 = \frac{3}{2}\left[\frac{3}{2}(3p+1)+1\right]+1 = \frac{27p+19}{4} \tag{36.13}$$

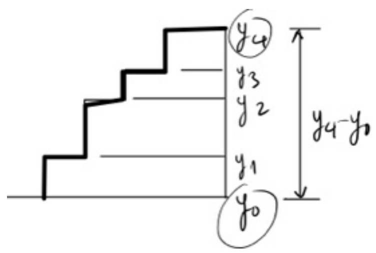
Chú ý rằng chúng ta cần tìm $x$, và phương trình $x = {}^{(27p+19)}/_4$ chính là chìa khóa duy nhất chúng ta có. Rõ ràng là nếu $p = 1$ thì $x = 11.5$ là một điều vô lý. Do đó chúng ta tìm ra $x$ là dựa trên ràng buộc $^{(27p+19)}/_4$ phải là một số nguyên (dương). Chỉ cần một tí kỹ thuật như sau: tách phân số này thành 2 phần–một phần nguyên và một phần phân số:

$$\frac{(27p+19)}{4} = \frac{(24p+16)+(3p+3)}{4} = 6p+4+\frac{3p+3}{4} \tag{36.14}$$

Cái phân số màu đỏ $^{(3p+3)}/_4$ phải là một số nguyên. Vì vậy, $3p+3=4k$, với $k=1,2,3,\dots$ Dễ thấy $k=3$ cho ta nghiệm $p=3$ và từ đó $x=25$. Đó chính là đáp số cho bài này. Tại sao $k=6$ cũng cho nghiệm ok mà không chọn? Đó là vì thông tin mà ta chưa xài tới: *Biết rằng ba người này là những người câu cá tồi.*

**Ví dụ minh họa 8**. Ở Chương 31 chúng ta đã tìm ra công thức tính tổng của $n$ số tự nhiên đầu tiên, Eq. (31.2). Các nhà toán học, vốn dĩ là những người tò mò, sẽ hỏi ngay vậy tổng của các bình phương của các số tự nhiên là nhiêu (tức là $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=?$), và $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=?$, ... Những bài này khó hơn nhiều so với bài tính $1+2+\cdots+n$.

Thật ngạc nhiên thay việc giải các bài đó có liên quan đến một thứ chúng ta thấy hàng ngày: cầu thang. Hãy giả sử rằng có ai đó đang leo lên một bậc thang dài và không đều (xem hình vẽ). Và người đó muốn tính chiều cao $H$ từ đáy của bậc thang lên đỉnh. Tất nhiên, chiều cao này bằng với tổng của chiều cao của tất cả các bậc thang. Và chiều cao của mỗi bậc thang chính là sự khác biệt giữa độ cao ở đỉnh và độ cao ở đáy của nó. Vì thế, $H$ tính như sau




$$H=(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+(y_3-y_2)+(y_4-y_3)=y_4-y_0 \tag{36.15}$$

vì ta có $y_1$ và $-y_1$, rồi $y_2$ và $-y_2$, cuối cùng trong tổng của $H$ chỉ còn lại $y_0$ và $y_4$. Điều này không có gì lạ, vì dĩ nhiên tổng này phải bằng sự khác biệt giữa độ cao ở đỉnh ($y_4$ trong hình minh họa) và độ cao ở đáy ($y_0$). Tổng như $H$ được gọi là một *tổng ống nhòm* và chúng ta thường xuyên thấy loại tổng này trong toán học. Tên gọi này xuất phát từ những ống nhòm có thể co dãn tùy ý mà bạn thường thấy trong các bộ phim hải tặc. Sự tương tự là tổng ban đầu xuất hiện ở dạng co dãn của nó (và như vậy trông rất phức tạp), và nó có thể được thu lại thành một biểu thức gọn gàng hơn nhiều.

Bảng 36.1: Tổng của $n$ số lẻ đầu tiên.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $i^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 |
| $i^2-(i-1)^2$ | | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |

Giờ ta chơi với các con số, và một hôm tình cờ ta lập Bảng 36.1. Đây là một bảng hết sức bình thường: ở hàng đầu ta có các số $0,1,2,3,\dots$, hàng thứ hai ta có bình phương của con số hàng đầu, và ở hàng cuối ta có, như chiều cao bậc thang, $i^2-(i-1)^2$. Ở hàng cuối ta có $n$ số lẻ đầu tiên, và mỗi số lẻ có dạng $i^2-(i-1)^2$ tức là giống chiều cao của một bậc thang. Do đó, tổng các $i^2-(i-1)^2$ sẽ bằng $n^2$, và vì thế $1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$. Dù ta đã biết kết quả này từ Chương 31, cách tính dùng bảng và chiều cao bậc thang này hình như rất lợi hại. Giờ chúng ta viết $i^2-(i-1)^2$ cho $i=1,2,3,4$, và viết các số lẻ dưới dạng $2n-1$, ta sẽ có

$$\begin{aligned}
i=1: &\quad 1^2-0^2 &= 1 = 2\times1-1\\
i=2: &\quad 2^2-1^2 &= 3 = 2\times2-1\\
i=3: &\quad 3^2-2^2 &= 5 = 2\times3-1\\
i=4: &\quad 4^2-3^2 &= 7 = 2\times4-1
\end{aligned} \tag{36.16}$$

Rồi thì ta cọng các đẳng thức trên lại, ta thu được:

$$4^2=2(1+2+3+4)-4 \Longrightarrow 1+2+3+4=\frac{4^2+4}{2}=\frac{4\times5}{2}$$

Ta đã làm gì? Tính được tổng $n$ số tự nhiên đầu tiên theo một cách rất hay. Giờ ta sẽ tổng quát hóa lên. Ta xét đẳng thức $(i-1)^2 = i^2 - 2i + 1$, do đó $i^2 - (i-1)^2 = 2i - 1$, chính là Eq. (36.16). Việc cọng các đẳng thức này lại cho ta

$$\sum_{i=1}^{n}[i^2 - (i-1)^2] = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i) - \sum_{i=1}^{n}1$$

Hay,

$$n^2 = 2(1+2+\cdots+n) - n \Longrightarrow 1+2+\cdots+n = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bài toán tính $S = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ giờ không còn gì là ghê gớm. Ta dĩ nhiên bắt đầu với $(i-1)^3$, rồi tính chiều cao bậc thang $i^3 - (i-1)^3$:

$$(i-1)^3 = i^3 - 3i^2 + 3i - 1 \Longrightarrow i^3 - (i-1)^3 = 3i^2 - 3i + 1$$

Sau đó cọng lại,

$$\sum_{i=1}^{n}[i^3 - (i-1)^3] = \sum_{i=1}^{n}(3i^2 - 3i + 1)$$

Tổng bên trái thì là tổng ống nhóm nên phải là $n^3$, bên trái thì chia ra:

$$n^3 = \sum_{i=1}^{n}(3i^2) - \sum_{i=1}^{n}(3i) + \sum_{i=1}^{n}1 = 3\sum_{i=1}^{n}i^2 - 3\sum_{i=1}^{n}i + n$$

Trong đó cái số hạng màu đỏ chính là $S$ mà ta đang lùng sục, còn số hạng màu xanh thì ta đã biết (tổng của $n$ số tự nhiên đầu tiên), cho nên đẳng thức trên trở thành

$$n^3 = 3S - 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

Vì vậy, $S$ là

$$\boxed{S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \tag{36.17}$$

Nhưng tại sao $S$ lại như vậy? Cái đó thì phải dùng tới hình học. Xin xem note toán của mình để biết chi tiết. Sau cái này thì tổng $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ cho $k = 3, 4, 5, \ldots$ không có gì đáng sợ.

Nếu bạn đang học giải tích, thì bạn sẽ không lạ gì định lý cơ bản của tích phân:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x) \tag{36.18}$$

Bạn có thấy nó giống Eq. (36.15) không? Vế trái $\int_a^b f(x)dx$ là một tổng rất nhiều số hạng, còn vế trái thì chỉ phụ thuộc vào $a$ và $b$. Nếu bạn nghĩ về cái cầu thang, nghĩ về vận tốc và quãng đường, bạn sẽ thấy Eq. (36.18) không có gì là kỳ lạ cả.

**Dùng cái gương trong đời thường**. Nhiều người thành đạt hay làm cái chuyện self reflection. Ví dụ, Steve Jobs nói rằng:

> *Tôi đã nhìn vào gương mỗi sáng và tự hỏi mình: "Nếu hôm nay là ngày cuối cùng của cuộc đời tôi, tôi có muốn làm những gì tôi sắp làm hôm nay không?" Và bất cứ khi nào câu trả lời là "không" trong quá nhiều ngày liên tiếp, tôi biết tôi cần phải thay đổi một cái gì đó.*

Mình thì không làm được như Jobs nhưng có một chuyện mình muốn đề cập. Hồi cấp 3 và ĐH thì mình yêu thầm TY nhưng mà TY không thích và phải tới năm 3 hay 4 ĐH mình mới quyết định quên cô này đi. Như thế lâu quá! Nếu mình biết suy nghĩ một tí thì sẽ đỡ mất thời gian hơn.

Hồi đó mình hỏi bạn ấy thích poster cầu thủ nào, bạn ý trả lời: Jurgen Klinsmann, một cầu thủ cao ráo. Ba của bạn ý cũng rất cao. Và sau này phu quân cũng cao. Rõ ràng bạn này thích người cao, mình thì thấp. Giá như, mình biết self reflection thì mình sẽ đỡ tốn thời gian biết nhường nào. Hồi đó cứ đạp xe từ Lữ Gia xuống Bình Thạnh, nói hai câu, lại đạp về.

Các bạn có thể dùng cái gương cho mọi chuyện; ví dụ, xem xong một bộ phim hay thì ngồi suy nghĩ. Chẳng hạn, sau khi xem xong bộ phim huyền thoại *Bố già*, thì chúng ta thấy Vito Corleone có ba người con trai là Sonny, Fredo, Michael và cô con gái rượu Connie. Sonny là người anh tốt, người chồng không trung thực, và là một người nóng nảy, do đó anh này không làm đại sự được. Fredo thì quá yếu đuối, không thích hợp làm việc cho gia đình Bố già. Đại khái như thế. Thậm chí xem xong phim Bố già, bạn có thể làm 'bài tập' này: tóm tắt phim này trong một câu ngắn nhất mà bao quát toàn bộ nội dung. Làm chi vậy, Phính? Nếu bạn làm bài tập này cho tất cả các phim, bạn sẽ bất ngờ khi khả năng viết của bạn sẽ tăng vọt, khả năng tư duy cũng tăng (vì bạn đã lọc ra được cái gì là quan trọng vv).

Xin được kể một câu chuyện từ chính trải nghiệm bản thân để minh họa cho sự hữu ích của việc dùng cái gương thường xuyên. Ba mình là người hiền, ít nói, tuy nhiên ông rất nóng tính. Hồi nhỏ mình mê xem phim ở nhà hàng xóm, quên cả trời trăng mây gió. Ba mình phải đi qua kêu về, và thế là đánh ngay vào đầu. Nhiều lúc đánh bằng roi, mình chảy máu, mẹ mình phải xức dầu. Lúc mình có con mình cũng hành động y chang ba mình hồi xưa (có điều không đánh đến nổi chảy máu, và cũng không nhiều). Đó là mình đã nghe người da trắng nói đánh con nít là không tốt cho sự phát triển của trẻ em rồi!

Một hôm mình quyết định bắt chước người Tây: mình sẽ cố gắng không đánh con nữa. Mình nhận thấy, mình nổi nóng đánh con khi hai điều sau cùng xảy ra: (1) mình đang làm việc mà công việc không thuận lợi (2) con mình làm mình bực bội (mấy cu cậu không nghe lời mình chẳng hạn). Rõ ràng là điều thứ hai mình không làm chủ được, do đó mình thay đổi (1): lúc ở nhà thì mình không làm những việc dễ khiến mình xì trét (coding chẳng hạn). Từ lúc đó đến nay đã được khoảng ba bốn năm, và mình chưa hề động tay chân với ai cả. Lúc mình tâm tình tĩnh lặng, mình xử lý việc các con mình hư hỏng một cách điềm tĩnh và không để cơn nóng giận điều khiển mình.

Nếu tui có điểm 10 trong tất cả các môn thì Phính có gì để khuyên không? Phính thì không dám nhưng mà Isaac Watts† thì có đó. Trong cuốn *Improvement of the Mind*, ông viết (đại ý):

> *Thỉnh thoảng suy nghĩ về những thứ đâu đâu: tại sao con người biết trái đất hình cầu mà không phải là một mặt phẳng, tại sao trái đất quay quanh mặt trời chứ không phải ngược lại, tại sao nguyên tử có hình cầu, nguồn gốc của sự sống ... Làm điều này có mục đích để cho bạn có một ấn tượng hợp lý hơn về sự nghèo nàn trong hiểu biết của bạn và sự không hoàn hảo trong kiến thức của bạn. Điều này sẽ dạy bạn rằng ảo tưởng rằng bạn biết tất cả mọi thứ là vô ích biết bao, và sẽ hướng dẫn bạn suy nghĩ một cách khiêm tốn về những thành tựu hiện tại của mình, khi từng hạt bụi trên trái đất và từng inch không gian trống rỗng đều vượt qua sự hiểu biết của bạn và chiến thắng sự tự phụ của bạn.*

Hoặc lúc các bạn đi leo núi, hay đi ra biển, hãy suy nghĩ về sự bao la của đại dương, của vũ trụ, để thấy rằng chúng ta thật nhỏ nhoi. Những điểm số cao, tuy là một điều đáng tự hào, chắn chắn không phải là tất cả††. Khiêm tốn sẽ dẫn các bạn đi thật xa. Không tin thì hãy nghe Isaac Newton nói (chú thích của Phính):

> *"Tôi không biết tôi là gì với thế giới; nhưng đối với bản thân tôi, dường như tôi chỉ giống như một cậu bé chơi đùa trên bờ biển, thỉnh thoảng thả hồn vào đó để tìm một*

†Isaac Watts (1674 – 1748) là một mục sư người Anh, tác giả thánh ca, nhà thần học và logic học. Ông là một người viết nhiều bài thánh ca nổi tiếng và được ghi nhận với khoảng 750 bài thánh ca. Một vài tác tác phẩm của ông bao gồm "Khi tôi khảo sát cây thánh giá kỳ diệu", "Niềm vui đến với thế giới". Ông được công nhận là "Bố già của Thánh ca Anh"; nhiều bài thánh ca của ông vẫn được sử dụng cho đến ngày nay và đã được dịch ra nhiều thứ tiếng.

††Nếu bạn đang là học sinh giỏi Lý; thử trả lời câu hỏi này xem được không: tại sao bầu trời màu xanh?

> *viên sỏi mịn hơn (ý ông là 3 định luật chuyển động chẳng hạn) hoặc một vỏ sò đẹp hơn bình thường (ví dụ, thuyết vạn vật hấp dẫn), trong khi đại dương chân lý vĩ đại vẫn chưa được khám phá trước mặt tôi.*

Newton còn có câu nói nổi tiếng sau:

> *"Nếu tôi đã nhìn thấy xa hơn, đó là nhờ đứng trên vai những người khổng lồ."*

Các bạn trẻ cũng nên lưu ý rằng, vì một lí do nào đó mà giáo viên thời nay rất rộng rãi với việc cho điểm cao. Và vì vậy điểm cao trong thời nay không có nghĩa là giỏi. Mình có bằng chứng hẳn hoi; gần đây mình đã thử đi dạy kèm và học trò có điểm A môn Toán mà mình cho bài nào (bài dễ) là bí bài đó! Hơn nữa, dành cho các bạn đang học cấp 2/3, việc học ở đại học rất khác cách học ở cấp 2/3, do đó các bạn trẻ có điểm số cao xin đừng thỏa mãn.

Ngày 22 tháng 12 năm 2022

# Chương 37

# Bất đẳng thức

MÌNH nhờ hồi còn đi học cấp 3 và chuẩn bị thi đại học thì mình rất thích tìm các đề thi toán của trường ngoại thương, và làm ngay câu bất đẳng thức. Và thường thì mình bí. Bất đẳng thức là một chủ đề khó đối với mình. Chương này xin chia sẻ một ít mình biết về đề tài này.

## 37.1 Kiến thức cơ bản

Trong toán học, bất đẳng thức là một mối quan hệ so sánh không bằng nhau giữa hai số hoặc biểu thức toán học. Các nhà toán học sử dụng ký hiệu khác nhau để biểu thị các loại bất đẳng thức khác nhau:

- Ký hiệu $a < b$ có nghĩa là $a$ bé hơn $b$.
- Ký hiệu $a > b$ có nghĩa là $a$ lớn hơn $b$.
- Ký hiệu $a \le b$ có nghĩa là $a$ bé hơn hoặc bằng $b$.
- Ký hiệu $a \ge b$ có nghĩa là $a$ lớn hơn hoặc bằng $b$.

Với bốn phép toán cơ bản cọng trừ nhân chia ta có các quy luật như $a + b = b + a$. Tượng tự, ta cũng có các quy luật cơ bản cho các bất đẳng thức. Ví như, $A$ lùn hơn $B$ mà $B$ lại lùn hơn $C$ thì chắc chắn $A$ lùn hơn $C$. Đơn giản vậy thôi. Các bất đẳng thức được quy định bởi các tính chất sau đây:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \text{tính chất chuyển tiếp} & \text{nếu } a \le b \text{ và } b \le c \text{ thì } a \le c \\ \text{(b)} & \text{tính chất cộng} & \text{nếu } x \ge y \text{ và } a \ge b \text{ thì } x + a \ge y + b \\ \text{(c1)} & \text{tính chất nhân 1} & \text{nếu } x \ge y \text{ và } a \ge 0 \text{ thì } ax \ge ay \\ \text{(c2)} & \text{tính chất nhân 2} & \text{nếu } x \ge y \text{ và } a \le 0 \text{ thì } ax \le ay \\ \text{(d)} & \text{tính chất nghịch đảo} & \text{nếu } x \ge y \text{ và } xy > 0 \text{ thì } 1/x \le 1/y \end{array} \tag{37.1}$$

Mình xin phép bỏ qua chứng minh các tính chất đơn giản này trong phần này. Nhưng nếu bạn gặp một tính chất nào đó không rõ ràng, bạn nên tự thuyết phục bằng cách chứng minh nó.

## 37.2 Một vài bài khởi động

Sau đây chúng ta sẽ giải vài bài bất đẳng thức 'đơn giản'. Tất nhiên là chúng ta bị cấm sử dụng máy tính (hay máy tính bỏ túi). Mình lặp lại rằng, cho những bài này, chúng ta không thật sự quan tâm số nào nào lớn hơn; thay vào đó, chúng ta quan tâm đến các kỹ thuật toán học được sử dụng để giải quyết các bài toán bất đẳng thức này. Nhiệm vụ của chúng ta là so sánh các con số từ bên trái và bên phải (hoặc thay thế dấu hỏi bằng dấu > hoặc <):

1. $\sqrt{19} + \sqrt{99} \ ? \ \sqrt{20} + \sqrt{98}$

2. $\dfrac{1998}{1999} ? \dfrac{1999}{2000}$

3. $\dfrac{10^{1999}+1}{10^{2000}+1} ? \dfrac{10^{1998}+1}{10^{1999}+1}$

4. $40^{39} ? 39^{40}$

Một kỹ thuật đơn giản là *biến đổi các bất đẳng thức đã cho thành các bất đẳng thức dễ dàng hơn*. Chúng ta sẽ sử dụng phương pháp này cho bài toán đầu tiên. Để làm được điều này, chúng ta bình phương hai bên để loại bỏ căn và dọn dẹp một chút:

$$\begin{aligned} 19+99+2\sqrt{19\cdot 99} &\quad ? \quad 20+98+2\sqrt{20\cdot 98} \\ \sqrt{19\cdot 99} &\quad ? \quad \sqrt{20\cdot 98} \end{aligned}$$

Chúng ta lại bình phương hai bên nữa, tất nhiên, và một chút đại số cho chúng ta:

$$\begin{aligned} 19\cdot 99 &\quad ? \quad 20\cdot 98 = (19+1)\cdot 98 \\ 19\cdot 99 &\quad ? \quad 19\cdot 98 + 98 \\ 19 &\quad ? \quad 98 \end{aligned}$$

Bây giờ chúng ta biết dấu hỏi là dấu <, do đó $\sqrt{19}+\sqrt{99} < \sqrt{20}+\sqrt{98}$.

Đối với bài toán thứ hai, hãy trước hết thay thế các phân số:

$$\frac{1998}{1999} \quad ? \quad \frac{1999}{2000} \Longleftrightarrow 1998\cdot 2000 \quad ? \quad 1999^2$$

Bây giờ đến lượt kỹ thuật; chúng ta thay thế 1999 bằng $0.5(1998+2000)$, và lời giải đến ngay lập tức:

$$\begin{aligned} 1998\cdot 2000 &\quad ? \quad \left(\frac{1998+2000}{2}\right)^2 \\ 4\cdot 1998\cdot 2000 &\quad < \quad (1998+2000)^2 \end{aligned}$$

Bởi vì $(x+y)^2 \geq 4xy$ đối với tất cả $x, y$ do $(x-y)^2 \geq 0$.

Bây giờ chúng ta hãy giải quyết bất đẳng thức này bằng cách sử dụng giải tích. Nhìn vào $^{1998}/_{1999}$ và $^{1999}/_{2000}$, chúng đều có dạng $^{x}/_{1+x}$. Vì vậy, nếu chúng ta xét hàm $f(x) = x/(1+x)$, thì bài toán của chúng ta trở thành việc so sánh $f(1998)$ và $f(1999)$. Nếu $f(x)$ là một hàm tăng đơn hoặc giảm đơn, thì chúng ta biết câu trả lời cho câu hỏi. Để hiện ra tính chất của $f(x)$, chúng ta cần thao tác nó một chút: $f(x) = 1/(1+1/x)$. Và với dạng này, $f(x)$ là một hàm tăng đơn. Do đó, $f(1998) < f(1999)$.

Đối với bài toán thứ ba, đặt $10^{1998}$ là $x$ và viết các số khác dưới dạng của $x$, chúng ta sẽ có một bất đẳng thức đơn giản. Mình để nó như một bài tập cho bạn. Bây giờ chúng ta giải quyết bài toán cuối cùng. Một cách để so sánh hai số dương $a$ và $b$ là so sánh tỷ lệ $a/b$ với một: nếu tỷ lệ này lớn hơn một thì $a > b$ và ngược lại. Vì vậy, chúng ta tạo tỷ lệ $A = {}^{40^{39}}/_{39^{40}}$, và thao tác nó một chút:

$$A = \frac{40^{39}}{39^{40}} = \frac{40^{39}}{39^{39}\times 39^1} = \frac{1}{39}\left(\frac{40}{39}\right)^{39}$$

Tiếp theo, chúng ta thay thế 40 bằng $1+39$, và sau đó chúng ta có:

$$A = \frac{1}{39}\left(1+\frac{1}{39}\right)^{39} \approx \frac{2.718}{39} < 1$$

Nhưng tại sao $(1+{}^1/_{39})^{39} \approx 2.718$? Xin xem Eq. (31.36).

## 37.3 Bất đẳng thức về trung bình cộng và trung bình nhân

Cho hai số dương $a$ và $b$, ta luôn có $(a-b)^2 \ge 0$, hay

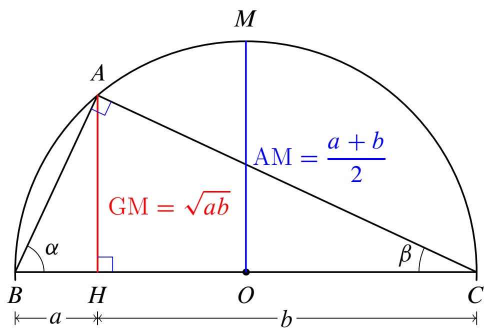
$$a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$$

Với một chút mát xa cho bất đẳng thức trên ta có (mục đích là làm xuất hiện $0.5(a+b)$)

$$a^2 + 2ab + b^2 \ge 4ab, \text{ hay } \quad \frac{(a+b)^2}{4} \ge ab$$

Cuối cùng ta thu được bất đẳng thức quen thuộc sau đây

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}} \tag{37.2}$$




Vậy ý nghĩa của Eq. (37.2) là gì? Bên trái là trung bình cộng (*Arithmetic Mean*–AM) của $a, b$ và bên phải là trung bình nhân (*Geometric Mean*–GM). Bất đẳng thức này vì vậy được gọi là bất đẳng thức AM-GM. Chúng ta có thể dùng hình học để giải thích bất đẳng thức này như sau. Xem xét một đường tròn có đường kính $BC$ và tâm $O$ (hình bên cạnh). Chọn một điểm $A$ trên đường tròn, và tam giác $ABC$ là một tam giác vuông. Kẻ $AH$ vuông góc với $BC$, $H$ chia $BC$ thành hai đoạn: $BH = a$ và $HC = b$. Sau đó, $(a+b)/2 = OM$, bán kính của đường tròn. Hơn nữa, chúng ta có thể chứng minh được rằng $AH = \sqrt{ab}$[††]. Rõ ràng rằng khi $A$ di chuyển trên đường tròn[‖], chúng ta luôn có $AH \le OM$. Khi $a = b$ thì dấu bằng xảy ra.

Các nhà toán học làm gì sau khi có bất đẳng thức AM-GM? Chỉ cho hai số $a, b$ thôi? Nó có đúng cho ba số $a, b, c$ không? Có đúng cho bốn, năm, ..., $n$ số không? Đó là cách các nhà toán học làm việc. Giờ chúng ta sẽ xem thử liệu bất đẳng thức AM-GM này có áp dụng cho 3 và 4 số không:

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}, \qquad \frac{a+b+c+d}{4} \ge \sqrt[4]{abcd}$$

cho $a, b, c, d \ge 0$.

Hãy kiểm tra trường hợp của 4 số trước vì nó dễ dàng hơn $(4 = 2 \times 2)$. Bằng cách sử dụng AM-GM cho trường hợp hai số, chúng ta có thể viết

$$\left.\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &\ge \sqrt{ab} \\ \frac{c+d}{2} &\ge \sqrt{cd} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{a+b+c+d}{2} \ge \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

Sử dụng lại AM-GM cho hai số $\sqrt{ab}$ và $\sqrt{cd}$, chúng ta nhận được điều chúng ta muốn kiểm tra[*]:

$$\frac{a+b+c+d}{2} \ge 2\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}, \quad \text{hoặc} \quad \frac{a+b+c+d}{4} \ge \sqrt[4]{abcd}$$

Bây giờ, chúng ta chỉ ra rằng bằng cách sử dụng AM-GM cho 4 số, chúng ta có thể có được AM-GM cho 3 số. Ý tưởng dĩ nhiên là loại bỏ $d$ để chỉ còn ba số $a, b, c$. Sử dụng $d = (a+b+c)/3$[**],

[††]Có nhiều cách để thấy điều này. Sử dụng lượng giác, từ hai tam giác vuông $ABH$ và $ACH$, ta có $AH = a\tan\alpha$ và $AH = b\tan\beta$. Sau đó, $AH^2 = ab\tan\alpha\tan\beta$. Nhưng $\tan\alpha\tan\beta = 1$.

[‖]Lúc đọc câu này thì bạn nên di chuyển con mắt để 'thấy' điểm $A$ di chuyển. Henri Poincare lúc làm hình học cũng làm vậy!

[*]Nếu không rõ ràng rằng $S = \sqrt{\sqrt{xy}} = \sqrt[4]{xy}$, dưới đây là chi tiết: $S = ((xy)^{1/2})^{1/2} = (xy)^{1/4}$.

[**]Đây là hạng tử chúng ta cần xuất hiện.

và bất đẳng thức AM-GM cho 4 số, chúng ta có

$$\frac{a+b+c+\dfrac{a+b+c}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{abc\left(\frac{a+b+c}{3}\right)}$$

mà tương đương với

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc\left(\frac{a+b+c}{3}\right)}$$

và việc nâng lên bốn lần cho chúng ta kết quả cuối cùng:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Tốt! Chúng ta có nên đặt mục tiêu cao hơn không? Dĩ nhiên. Chúng ta có AM-GM cho $n = 2, 4$ và chắc chắn chúng ta có các bất đẳng thức tương tự cho $n = 2^k$ với $k \in \mathbb{N}$. Và từ $n = 4$, chúng ta đã thu được AM-GM cho $n = 3$. Và từ đó ta có BDT cho $n = 6$ (áp dụng AM-GM cho 3 số đầu, 3 số sau, rồi AM-GM một lần nữa). Dường như chúng ta có bất đẳng thức AM-GM tổng quát được biểu diễn bởi

$$\boxed{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}} \tag{37.3}$$

Và Cauchy đã chứng minh BDT tổng quát này bằng phương pháp quy nạp xuôi-ngược[†] trong cuốn sách *Cours d'analyse*.

**Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.** Một ứng dụng của BDT là tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) và lớn nhất (GTLN) của một biểu thức nào đó. Ví dụ, nếu ta có $2 \leq f(x) \leq 6$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 2 và giá trị lớn nhất là 6. Giờ, ta hãy thực hành một vài bài tập. Tìm giá trị lớn nhất của $A := x\sqrt{16-x^2}$ cho $0 \leq x \leq 4$. Ta nhận xét $A$ là tích của hai số không âm, và bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất; tức là $A \leq \square$. Từ nhận xét này ta nghĩ ngay đến BDT AM-GM $a^2+b^2 \geq 2ab$ với $a = x$ và $b = \sqrt{16-x^2}$:

$$x^2 + (16 - x^2) \geq 2x\sqrt{16-x^2} \iff 16 \geq 2A \iff A \leq 8$$

Đáp án: giá trị lớn nhất của $A$ là 8. Loại bài tập này thì $A$ phải có dạng $A = x\sqrt{\square - x^2}$. Vì chỉ như vậy khi ta lấy tổng bình phương của hai thừa số của $A$, $x$ sẽ ra đi, và ta có một hằng số (là em $\square$).

Tiếp bước thành công nhỏ này, ta làm bài: tìm giá trị lớn nhất của $A = x^2(1-2x)$. Trước tiên ta giả sử $x \geq 0$ (để có thể áp dụng BDT AM-GM). Nếu xem $A$ là tích của hai nhân tử $x^2$ và $1-2x$, thì tổng của chúng không là một hằng số. Tại sao $x^2$ và $1-2x$ sao không $1-3x$ hay $1-5x$? Do đó, ta xem $A$ như là tích của ba nhân tử: $A = (x)(x)(1-2x)$, và thấy ngay tổng của chúng bằng 1. Ta áp dụng BDT AM-GM cho ba số $x, x, 1-2x$:

$$\frac{(x)+(x)+(1-2x)}{3} \geq \sqrt[3]{xx(1-2x)}$$

Do đó $A \leq 1/27$. Giá trị lớn nhất của $A$ là $1/27$ khi $x = x = 1-2x$ hay $x = 1/3$.

Những tưởng những bài này chỉ có vậy, thì một hôm mình gặp con quái vật này: cho $0 \leq x \leq 1$, chứng minh rằng

$$A = x\left(13\sqrt{1-x^2} + 9\sqrt{1+x^2}\right) \leq 16$$

Rõ ràng mới nhìn vào ta thấy ngay là $A$ là tổng của hai số hạng, mỗi số hạng là tích của hai nhân tử, nhân tử thứ nhất lại có dạng quen thuộc $x\sqrt{1-x^2}$, nhưng nhân tử kia thì rất khó chịu, với $\sqrt{1+x^2}$. Nhưng dù gì đi nữa, chắc chắn con đường đi phải là (không tính tới giải tích),

$$A = 13x\sqrt{1-x^2} + 9x\sqrt{1+x^2} \leq \frac{\square}{M} + \frac{\square}{M} = \frac{\text{hằng số}}{M}$$

[†]d

Tức là dùng BDT AM-GM cho mỗi số hạng (đỏ và xanh), rồi gộp lại (chúng phải có cùng mẫu số), và trên tử số, $x^2$ *không còn trên tờ giấy*. Cũng dễ thấy rằng ta phải tách $13x\sqrt{1-x^2}$ ra, vì nếu áp BDT AM-GM trực tiếp cho $x$ và $\sqrt{1-x^2}$ thì không thể khử $x$ (thử đi bạn). Do đó, ta thử (hai số hạng phải có cùng mẫu số!)

$$A = \frac{13}{a}x(a\sqrt{1-x^2}) + \frac{9}{a}(ax)\sqrt{1+x^2}$$

Thử với $a = 2$ (nên nhớ $13 = 4 + 9 = 2^2 + 3^2$), thì số hạng đầu sau khi áp AM-GM sẽ có $13(-3)x^2$, và ta cũng muốn có $13(3)x^2$ cho số hạng thứ hai, cho nên ta viết[†]

$$A = \frac{13}{2}x(2\sqrt{1-x^2}) + \frac{3}{2}(3x)(2\sqrt{1+x^2})$$

Chú ý rằng $13 = 4 + 9 = 2^2 + 3^2$. Giờ ta áp dụng AM-GM cho $A$:

$$A \leq \frac{13}{4}(x^2 + 4 - 4x^2) + \frac{3}{4}(9x^2 + 4 + 4x^2) = \frac{13 \times 4 + 3 \times 4}{4} = 16$$

Giá trị lớn nhất xảy ra khi $x = 2\sqrt{1-x^2}$, và $3x = 2\sqrt{1+x^2}$. Giải ra ta có $x = {}^{2\sqrt{5}}/_{5}$.

**Tự tìm ra các bất đẳng thức.** *Một cách để giỏi về BDT là tự mình tìm ra chúng*! Ví dụ, ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$, ta có thể viết nó thành $a^2 - ab + b^2 \geq ab$, rồi nhân 2 vế cho $(a + b)$ (giả sử $a, b \geq 0$), ta có ngay $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$. Với bộ ba $a, b, c \geq 0$, ta có

$$a^3 + b^3 \geq ab(a+b), \quad b^3 + c^3 \geq bc(b+c), \quad c^3 + a^3 \geq ab(c+a),$$

Cộng 3 BDT này lại, và chia cho 2, ta có ngay một em BDT rất đẹp:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq ab\left(\frac{a+b}{2}\right) + bc\left(\frac{b+c}{2}\right) + ca\left(\frac{c+a}{2}\right)$$

Em BDT này có một người em cũng rất xinh nếu ta dùng $0.5(a + b) \geq \sqrt{ab}$:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq (ab)^{3/2} + (bc)^{3/2} + (ca)^{3/2}$$

Thêm một ví dụ minh họa cho việc các bạn có thể 'cook' ra BDT nhé. Cho $a, b, c > 0$, dùng BDT AM-GM, ta có ngay

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad b + c \geq \sqrt{bc}, \quad c + a \geq \sqrt{ca}$$

Nhân chúng lại, ta có

$$\boxed{(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc} \tag{37.4}$$

Một BDT khá xinh; nhưng đó chỉ là mới bắt đầu. Ta trang điểm cho em một tí

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq 8 \Longleftrightarrow \left(\frac{a+b}{c}\right)\left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{c+a}{b}\right) \geq 8$$

Tới đây thì người giáo viên lại đưa ra điều kiện $a + b + c = 1$, để biến cái BDT trên thành

$$a, b, c > 0, \quad a + b + c = 1: \quad \left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8$$

Từ BDT 37.4, ta có thể cho ra thêm một BDT khá đẹp như sau. Chú ý rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \tag{37.5}$$

[†]Cho số hạng thứ hai ta cũng có thể viết ${}^{3}/_{2}(2x)(3\sqrt{1+x^2})$. Nhưng làm vậy thì không ra cực đại là 16; nó cho ra 19.75. Tại sao?

Cho nên, BDT 37.4 trở thành

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc \geq 8abc \Longleftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$$

Ta có thể khử $abc$ dùng Eq. (37.5), và có

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9\left[(a+b+c)(ab+bc+ca)-(a+b)(b+c)(c+a)\right]$$

Làm gọn tí, ta có bất đẳng thức có tên gọi khá thú vị: BDT 89:

$$\boxed{9(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

## 37.4 Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz

Đối với $a, b, c, x, y, z$ là các số thực, bất đẳng thức Cauchy–Schwarz viết như sau:

$$\begin{gathered}(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2) \\ (ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\end{gathered} \tag{37.6}$$

Chứng minh cho những bất đẳng thức này rất đơn giản. Chỉ cần mở rộng tất cả các thành phần, và ta sẽ có: $(ay-bx)^2 \geq 0$ cho bất đẳng thức đầu tiên và $(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2 \geq 0$ cho bất đẳng thức thứ hai, điều này chắc chắn đúng. Bây giờ bạn có thể đã đoán đúng những gì chúng ta sẽ làm tiếp theo. Chúng ta tổng quát hóa Eq. (37.6) thành

$$\boxed{\begin{gathered}(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \\ \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)\end{gathered}} \tag{37.7}$$

Và đây chính là bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, còn được biết đến với tên gọi bất đẳng thức Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz. Bất đẳng thức cho tổng, Eq. (37.7), được công bố bởi Augustin-Louis Cauchy (1821), trong khi bất đẳng thức tương ứng cho tích phân lần đầu tiên được chứng minh bởi Viktor Bunyakovsky (1859). Chứng minh của phiên bản tích phân đã được Hermann Schwarz (1888) trình bày[†]. Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz là một bất đẳng thức hữu ích trong nhiều lĩnh vực toán học, như đại số vector, đại số tuyến tính, giải tích, lý thuyết xác suất và nhiều lĩnh vực khác *nó được coi là một trong những bất đẳng thức quan trọng nhất trong toàn bộ toán học*.

Cho trường hợp đặc biệt với $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$, bất đẳng thức Cauchy trở thành

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 \leq n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

hoặc viết lại để xuất hiện trung bình cộng, chúng ta thu được bất đẳng thức gọi là bất đẳng thức trung bình cộng-bình phương trung bình:

$$\boxed{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}} \tag{37.8}$$

Điều này bởi vì phía bên phải là bình phương trung bình (RMS: *Root Mean Square*), chính là căn bậc hai của bình phương trung bình (trung bình cộng của các bình phương):

$$\boxed{RMS = Q = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}} \tag{37.9}$$

[†]Cho tích phân, BDT này có dạng: $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2dx\right)\left(\int_a^b [g(x)]^2dx\right)$.

**Ý nghĩa của BDT Cauchy dùng véc tơ.** Tích vô hướng của hai véc tơ $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ and $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ là một con số xác định bởi:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{37.10}$$

Hơn nữa, tích vô hướng này còn có thể viết như sau, trong đó $\theta$ là góc giữa 2 véc tơ, và $\|\boldsymbol{a}\|$ là chiều dài của $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta, \quad \|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{37.11}$$

Từ đó, ta có $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$. Và đây chính là BDT Cauchy.

## 37.5 Một vài bài tập bất đẳng thức

**Ví dụ 1**. Cho $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2b^2c^2 \tag{37.12}$$

Trước khi giải các bài BDT thì các bạn trẻ nên nhớ một phương pháp lợi hại: sử dụng các BDT Cauchy, hay AM-GM (hay các BDT phổ biến khác), có khi chỉ cần dùng 1 BDT, có khi phải kết hợp 2 BDT. Mấu chốt là: biết sử dụng thằng nào, khi mà có quá nhiều đồ chơi? Làm nhiều bài tập là câu trả lời, bạn sẽ đánh mùi được BDT nào là chìa khóa để giải một bài BDT.

Nhìn vào Eq. (37.12) ta thấy $(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)$, có dạng tích của hai số hạng, mà mỗi số có 3 đại lượng. Rõ ràng là có dạng BDT Cauchy: $(AX + BY + CZ)^2 \leq (A^2 + B^2 + C^2)(X^2 + Y^2 + Z^2)$. Do đó, ta sẽ dùng nó với $A = a\sqrt{b}$[†], $B = b\sqrt{c}$, $C = c\sqrt{a}$, $X = \sqrt{a}b$, $Y = \sqrt{b}c$ và $Z = \sqrt{c}a$:

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq (ab\sqrt{ab} + bc\sqrt{bc} + ca\sqrt{ca})^2$$

Giờ thì ta lại có tổng của 3 số không âm, và BDT cần chứng minh có $a^2b^2c^2$ là tích của 3 số. Không chú Cauchy thì còn ai vào đây? Cho nên, ta dùng BDT Cauchy với 3 số $ab\sqrt{ab}$,$bc\sqrt{bc}$ và $ca\sqrt{ca}$:

$$ab\sqrt{ab} + bc\sqrt{bc} + ca\sqrt{ca} \geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 3abc$$

Kết hợp hai kết quả trên, ta có ngay:

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq (ab\sqrt{ab} + bc\sqrt{bc} + ca\sqrt{ca})^2 \geq (3abc)^2 = 9a^2b^2c^2$$

Chú ý: ta đã dùng tính chuyển tiếp ở Eq. (37.1).

**Ví dụ 2**. Cho $a, b, c \geq 0$, chúng ta cần chứng minh rằng

$$\sqrt{3(a+b+c)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Chìa khóa để giải bài này là thấy $3(a + b + c)$ theo cách mà Cauchy muốn thấy: tích của hai số hạng, mà mỗi số hạng có 3 đại lượng có dạng $\square^2$. Tức là ta nhìn $3(a + b + c)$ dưới dạng $(1^2 + 1^2 + 1^2)((\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2)$. Giờ thì chỉ áp dụng BDT Cauchy $(AX + BY + CZ)^2 \leq (A^2 + B^2 + C^2)(X^2 + Y^2 + Z^2)$ với $A = B = C = 1$ và $(X, Y, Z) = (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$. Và ta có ngay cái mình muốn.

**Ví dụ 3**. Cho $a, b, c, d > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

[†] Sao biết? Vì $A^2 = a^2b$.

Phân số ở bên vế phải của BDT cần chứng minh là cái chúng ta không mong muốn. Do đó, ta viết lại BDT như sau:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\right)(a+b+c+d) \geq 64 \tag{37.13}$$

Cái em này dễ thương nè: em là tích của hai số hạng, và tích này lớn hơn 64. Đúng chuẩn con nhà nề nếp (Cauchy) chứ còn gì nữa! Giờ ta viết vế phải như sau (chú ý là viết theo Cauchy):

$$X := \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{c}}\right)^2+\left(\frac{4}{\sqrt{d}}\right)^2\right]\left[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2+(\sqrt{d})^2\right]$$

BDT Cauchy cho $X$, cho ta ngay $X \geq (1+1+2+4)^2 = 64$. Thế thôi. Đánh giá:

- Ta có thể nhân 2 vế của BDT với $a+b+c+d$, và việc đó không làm đổi dấu $\geq$ vì $a+b+c+d > 0$.
- Ta phải nhìn BDT 37.13 và thấy Cauchy ở đó; phải luyện công thì sẽ được như vậy. Sau đó $a$ và $1/a$ sẽ khử nhau, ...
- Giáo viên chỉ việc thay số 4, số 16, và số 64 thành 3 số khác là có ngay một BDT mới cho học sinh chơi.

**Ví dụ 4.** Giả sử $a, b, c > 0$ và $a+b+c = 6$, chứng minh:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{75}{4}$$

Nhìn vào đề bài là thấy em Cauchy đứng làm duyên rồi: tổng của bình phương và còn lớn hơn cái gì đó nữa chứ. Không người đẹp Cauchy thì còn ai vào đây. Giờ gọi $P$ là biểu thức vế trái. Do đó, ta sẽ thêm trang sức cho em này bằng cách xét $3P$ (vì vế phải của em Cauchy phải là tích của 2 số) và dĩ nhiên 3 phải là $1^2+1^2+1^2$:

$$3P = (1^2+1^2+1^2)\left[\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2\right]$$

Giờ Cauchy cho ta ngay

$$3P \geq \left(a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a}\right)^2 = \left(6+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \tag{37.14}$$

Để chứng minh BDT yêu cầu thì ta phải có ${}^1/_a + {}^1/_b + {}^1/_c \geq \square$, mà như vậy thì chỉ có BDT AM-GM thôi:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$$

Giờ thì ta lại cần $abc \leq \square$, và Cauchy lại cho ta

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Longrightarrow abc \leq 8 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{3}{2}} \tag{37.15}$$

Kết hợp BDT 37.14 và BDT 37.14, ta đã có điều mình muốn.

**Trung bình điều hòa.** Giờ mình muốn bàn về BDT đóng khung ở 37.15. BDT này liên quan tới nghịch đảo của một số, và khái niệm trung bình điều hòa. Các nhà toán học Hy lạp cổ lúc làm hình học đã tìm ra khái niệm này. Tuy nhiên, khái niệm này có lẽ dễ hiểu khi nói về vận tốc. Có hai điểm $A$ và $B$ cách nhau một khoảng cách là $d$. Giả sử một chiếc xe đi từ $A$ đến $B$ với vận tốc là $x$, và lúc đi ngược lại thì với vận tốc $y$. Câu hỏi: vận tốc trung bình của chiếc xe là gì? Phải chăng là $0.5(x+y)$? Hay là $\sqrt{xy}$? Ngạc nhiên thay, không phải vậy. Một tính toán nhỏ sẽ cho ta câu trả lời:

$$\text{vận tốc trung bình} = \frac{\text{quãng đường}}{\text{thời gian}} = \frac{2d}{d/x + d/y} = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \tag{37.16}$$

Ta hãy thử với các con số cụ thể: $x = 60$ km/h và $y = 20$ km/h. Nếu dùng trung bình cọng thì vận tốc trung bình sẽ là 40 km/h, còn nếu dùng Eq. (37.16) thì có $2/(1/60+1/40) = 30$ km/h. Giờ thì ngoài trung bình cọng, trung bình nhân, ta có thêm trung bình điều hòa (*harmonic means*). Nếu gọi $H$ là trung bình điều hòa của hai số $x, y$ thì ta có

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right), \quad \text{hay} \quad H = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

Tức là cho 2 số $x, y$, ta tính nghịch đảo của chúng (là $1/x$ và $1/y$), rồi tính trung bình cọng của hai nghịch đảo này; cái ta có là nghịch đảo của $H$.

Và dĩ nhiên ta lại tổng quát hóa lên 3 số $x, y, z$ và $n$ số $a_1, a_2, \ldots, a_n$[†]:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right), \quad \frac{1}{H} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}{n}$$

Ta đã có BDT AM-GM nói về mối liên hệ giữa trung bình cọng và trung bình nhân. Bây giờ trong cuộc chơi có thêm anh trung bình điều hòa, anh này cũng muốn có một BDT cho riêng mình. Liệu có một BDT như vậy không? Chúng ta nên tin là có, và đi tìm nó! Đó là cách toán học phát triển. Nếu ta có $n$ số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ta có thể dùng BDT AM-GM cho $1/a_1, 1/a_2, \ldots, 1/a_n$ (vì ta muốn trung bình nghịc đảo mà) như sau

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} \geq n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdots\frac{1}{a_n}}$$

Rồi ta mát xa BDT này một tí để cho trung bình điều hòa $H$ xuất hiện, thì ta thấy $H \leq$ GM, mà GM $\leq$ AM, cho nên ta thu được:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

Kết hợp cả chú RMS, ta có một BDT liên quan tất cả trung bình ta biết:

$$\boxed{\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}}$$

BDT này cho ta biết: trung bình điều hòa là đàn em của trung bình nhân, và dĩ nhiên cũng là đàn em của trung bình cọng và đại ca lãnh đạo là RMS. Ta có thể sắp xếp lại BDT HM $\leq$ GM như sau

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \Longleftrightarrow (a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2 \tag{37.17}$$

Áp dụng nó cho $a, b, c > 0$ với $a+b+c = 6$, ta có ngay BDT đóng hộp ở 37.15.

[†]Với $n$ số thì các nhà toán học không thể dùng $x$, $y$ (tại sao?), do đó họ phải xài $a_1, a_2, \ldots$ thôi.

Ghi chú

Tại sao Phính không trình bày trung bình điều hòa ở phần 37.3? Làm như vậy thì trình bày sẽ rất đẹp. Không phải sao? Đúng là trình bày sẽ đẹp, sẽ hợp lý: các trung bình khác nhau trình bày một chỗ, rồi sau đó sẽ bàn về các BDT về chúng. Tuy nhiên, cách làm như vậy có một khuyết điểm TO ĐÙNG: các em học sinh sẽ thắc mắc từ đâu các nhà toán học nghĩ ra/tìm ra các khái niệm trung bình này? Từ không khí? Từ cái đầu siêu hạng của họ? KHÔNG! Các nhà toán học là những con người bằng xương bằng thịt, họ không thể như đấng tạo hóa (nếu thật sự có một) đứng trên cao nhìn xuống và thấy hết toàn bộ bức tranh toán học! Do đó, họ mò mẫm, rồi một người nào đó phát hiện định lý $A$, sau đó một người khác la lên "tôi tìm ra định lý B". Và sau một thời gian thì sẽ có một nhà toán học ngồi xuống tổng hợp, sắp xếp $A, B$ lại thành một hệ thống hoàn chỉnh. Rồi sách GK cũng viết như vậy!

**Ví dụ 5.** Giả sử $a, b, c > 0$ và $abc = 1$, chứng minh:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Đây là một câu hỏi trong cuộc thi IMO năm 1995.

Về bài này, mặc dù chúng ta biết chúng ta phải sử dụng bất đẳng thức AM-GM và bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, nhưng rất khó để tìm cách áp dụng chúng. Sau một thời gian bí (khá lâu), mình nghĩ tại sao ta không suy nghĩ xem người ra đề đã làm sao để đẻ ra cái BDT quái ác này? Người đó chắc chắn đã làm như sau: từ một sự thật cơ bản về BDT, rồi mát xa nó cho nó 'biến' ra một dạng khác. Hãy làm điều đó và xem điều gì xảy ra.

Giả sử $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$ (vì trong bài toán ta có $abc = 1$), sử dụng bất đẳng thức AM-GM, chúng ta có ngay:

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$$

Mình gọi đây là bất đẳng thức cơ bản (cho $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$). Và điều chúng ta muốn làm là thực hiện một số biến đổi đại số cho bất đẳng thức cơ bản này và hy vọng rằng bất đẳng thức IMO sẽ xuất hiện. Đó là kế hoạch. Nhìn vào bài toán IMO, nó có dạng $S \geq 3$ với $S$ là điều chúng ta muốn tìm. Để làm được điều đó, chúng ta có thể bắt đầu từ:

$$S(x + y + z) \geq (x + y + z)^2 \tag{37.18}$$

Vì sao? Vì nếu ta có Eq. (37.18) thì ta cũng có $S \geq x + y + z$, rồi từ đó ta lại có $S \geq 3$. Giờ ta tập trung vào BDT 37.18. Ta viết nó lại như sau (vì ta muốn sử dụng bất đẳng thức Cauchy):

$$(1x + 1y + 1z)^2 \leq S(x + y + z) \tag{37.19}$$

Ta có thể thấy rằng vế trái có dạng $(ax + by + cz)^2$, không phải BDT Cauchy thì là gì? Bây giờ, chìa khóa là chúng ta phải viết lại các số 1 bằng một cái gì đó khác. Vì nếu không làm vậy, áp dụng BDT Cauchy ta chỉ có

$$(1x + 1y + 1z)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

Mà cái này không phải là BDT 37.19 mà ta đang tìm kiếm! Ta phải thay ba số 1 thành ba thứ gì mà khi bình phương lên, cọng lại ta phải có $x + y + z$. Mặc dù có nhiều cách làm vậy, sau một hồi mò mẫm thì ta sẽ thấy nếu ta làm phép như sau (thằng 1 màu đỏ dính với $x$ phải thay bằng $\sqrt{y+z}/\sqrt{y+z}$ vì trong BDT IMO ta có $a^3(b + c)$; tức là $x, y, z$ phải dính chùm với nhau)

$$1 = \sqrt{y+z}/\sqrt{y+z}, \; 1 = \sqrt{z+x}/\sqrt{z+x}, \; 1 = \sqrt{x+y}/\sqrt{x+y},$$

thì $(x + y + z)^2$ trở thành:

$$(x + y + z)^2 = \left(\sqrt{y+z}\frac{x}{\sqrt{y+z}} + \sqrt{z+x}\frac{y}{\sqrt{z+x}} + \sqrt{x+y}\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, chúng ta có:

$$(x+y+z)^2 \leq 2(x+y+z)\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\right) \tag{37.20}$$

Bây giờ, so sánh các BDT 37.19 và 37.20, chúng ta đã tìm ra $S$:

$$S = 2\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\right)$$

Và vì $S \geq 3$, chúng ta có một bất đẳng thức mới:

$$\boxed{\text{Cho } x, y, z > 0 \text{ và } xyz = 1, \text{ thì } \quad \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}} \tag{37.21}$$

Và bất đẳng thức này có thể là một bài tập tốt cho một bài kiểm tra. Nhưng không phải cho cuộc thi IMO vì nó quá rõ ràng với các thành phần mũ hai (gây ra sự nảy sinh ý tưởng về bất đẳng thức Cauchy). Bây giờ, một chút biến đổi sẽ cho chúng ta một bất đẳng thức khác: ta cần $a^3$ hay $x^3$ mà ta chỉ có $x^2$, may cho ta là $xyz = 1$. Vì vậy $x^2 = x^2 \times 1 = x^2(xyz)$, và tương tự cho $y^2$ và $z^2$, và ta thấy xuất hiện các thành phần mũ ba trong BDT 37.21:

$$\frac{x^2(xyz)}{y+z}+\frac{y^2(xyz)}{x+z}+\frac{z^2(xyz)}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

Lại biến đổi tí nữa, ta có (sao biết mà làm vậy? Đừng quên BDT IMO có $1/\square$)

$$\frac{x^3}{1/y+1/z}+\frac{y^3}{1/x+1/z}+\frac{z^3}{1/x+1/y} \geq \frac{3}{2}$$

Cuối cùng, với $a = 1/x$, $b = 1/y$, $c = 1/z$, chúng ta thu được bất đẳng thức IMO:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Bước đánh giá:

- Các thành phần mũ ba đã làm cho bài toán này khó khăn hơn để chứng minh.
- Nguồn gốc của BDT này chính là BDT 37.21, mà việc chứng minh không quá khó.
- Trong BDT Cauchy ta thường có $a^2$, nhưng với điều kiện $abc = 1$, ta có thể có $a^3$, với kỹ thuật $a^2 = a^2 \times 1 = a^2(abc)$.
- Và tất nhiên, như thường lệ, lời giải trong sách được trình bày theo thứ tự ngược bằng cách bắt đầu với $a = 1/x$, $b = 1/y$, $c = 1/z$, nhưng, tiếc thay, không giải thích ý tưởng đó đến từ đâu ☹

**Ví dụ 6.** Giả sử $a, b, c > 0$, chứng minh:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Đây là bất đẳng thức Nesbitt. Chìa khóa để làm bài này chính là BDT 37.17. Vì ta thấy có nghịch đảo! Thật vậy, BDT 37.17 cho $n = 3$ số $x, y, z$ cho ta

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \iff (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$$

Giờ thì bổn cũ soạn lại: ta quậy cái BDT này cho nó thành hình dạng khác. Với $x = a + b$ (giờ thì chắc bạn hiểu sao mình biết dùng $x$ như vậy: cái đề nó yêu cầu mà!), $y = b + c$ và $z = c + a$, nó biến thành

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq 9 \iff (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2}$$

Mát xa vế bên trái của BDT, ta sẽ có cái mình tìm:

$$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a} \geq \frac{9}{2} \iff \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+3 \geq \frac{9}{2}$$

**Ví dụ 7.** Giả sử $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = 5$, tìm giá trị nhỏ nhất của $P$:

$$P = \frac{3a+3b+2c}{\sqrt{6(a^2+5)}+\sqrt{6(b^2+5)}+\sqrt{c^2+5}}$$

Đây là câu hỏi số 6 đề thi học sinh giỏi toán lớp 9 năm 2023 xã Điện Bàn. Bước làm quen: ta phải chú ý đến con số 5 trong $P$, và con số 5 trong $ab + bc + ca = 5$. Ngoài ra $a^2 + 5$ có số hạng bậc hai là $a^2$ và 5 cũng là một số hạng bậc hai vì nó là $ab + bc + ca$. Với nhận xét như vậy, ta sẽ thay $5 = ab + bc + ca$ vào $a^2 + 5$ và được

$$a^2 + 5 = a^2 + ab + bc + ca = (a + b)(a + c)$$

Ta làm điều tương tự cho $b^2 + 5$ và $c^2 + 5$, như vậy ta sẽ có

$$\begin{aligned}\sqrt{6(a^2+5)} &= \sqrt{6(a+b)(a+c)}\\ \sqrt{6(b^2+5)} &= \sqrt{6(b+c)(b+a)}\\ \sqrt{c^2+5} &= \sqrt{(c+a)(c+b)}\end{aligned}$$

Rồi thì ta dùng BDT Cauchy $\sqrt{xy} \leq 0.5(x+y)$ cho số hạng $\sqrt{6(a^2+5)}$ để có $\sqrt{6(a^2+5)} \leq 0.5(\square)$, tương tự cho $\sqrt{6(b^2+5)}$ và $\sqrt{c^2+5}$, cọng chúng lại, ta sẽ có mẫu số của $P$ nhỏ hơn hay bằng $f(a, b, c)$ mà có dạng $ma + nb + qc$ và ta muốn nó sẽ là bội số của $3a + 3b + 2c$ (để ta khử $3a + 3b + 2c$ đi).

Dùng BDT Cauchy với một chút tinh tế (và sau khi thử sai vài lần; nhưng chú ý trong $P$ thì $a, b$ đối xứng cho nên khi ta dùng $6(a + b)(a + c) = [3(a + b)][2(a + c)]$ thì ta phải làm $6(b + c)(a + b) = [2(b + c)][3(a + b)]$)

$$\begin{aligned}\sqrt{6(a^2+5)} = \sqrt{[3(a+b)][2(a+c)]} &\leq \frac{3(a+b)+2(a+c)}{2}\\ \sqrt{6(b^2+5)} = \sqrt{[2(b+c)][3(b+a)]} &\leq \frac{2(b+c)+3(a+b)}{2}\\ \sqrt{c^2+5} = \sqrt{(c+a)(c+b)} &\leq \frac{c+a+c+b}{2}\end{aligned}$$

Cọng lại, ta có

$$\sqrt{6(a^2+5)}+\sqrt{6(b^2+5)}+\sqrt{c^2+5} \leq \frac{9a+9b+6c}{2} = \frac{3}{2}(3a+3b+2c)$$

Vậy $P \geq 2/3$ khi $3(a + b) = 2(a + c)$, $2(b + c) = 3(a + b)$ và $c + a = c + b$; giải 3 phương trình nhẹ nhàng này ta có $a = b = 1, c = 2$.

Bước đánh giá, người ra đề có thể bắt đầu với

$$P = \frac{3a+3b+2c}{\sqrt{6(a+b)(a+c)}+\sqrt{6(b+c)(b+a)}+\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$

Nhưng nếu để yên $P$ vậy thì trừ phi mù ai cũng biết sẽ là Cauchy vì trung bình nhân là $\sqrt{xy}$. Do đó họ khai triển $(a+b)(a+c)$ ra thành $a^2+ab+bc+ca$, rồi cho $ab+bc+ca=5$ để cho $(a+b)(a+c)$ thành $a^2+5$. Như vậy $P$ sẽ không có dấu hiệu của Cauchy! Mình viết kỹ như vậy cho các bạn thấy các bài tập Toán đã được người soạn một cách kỹ lưỡng, và nếu họ xào nấu nhiều bước thì thật khó cho học sinh tìm ra được lời giải. Chuyện này giống như họ cho bạn một món ăn rồi hỏi món đó làm từ bao nhiêu muối, nhiêu đường, chanh tỏi ớt... Nếu bạn đã ăn nhiều món, xác suất cao bạn sẽ trả lời được. Đôi khi người ra đề dùng công thức gia truyền mà không ai biết thì chuyện bạn không trả lời được cũng là chuyện dễ hiểu. Ví dụ, bài sau Phính chịu chết: cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$, tìm GTLN và GTNN của $P$:

$$P=\frac{a}{2a+b^2+c^2}+\frac{b}{2b+c^2+a^2}+\frac{c}{2c+a^2+b^2} \tag{37.22}$$

## 37.6 Bài toán đẳng chu

Học sinh cấp 2/3 làm bao nhiêu BDT mà không biết tới bài toán đẳng chu thì cũng như fan bóng đá mà chưa tới thánh địa Nou Camp của câu lạc bộ Barcelona để một lần chính mắt xem bóng đá đỉnh cao vậy. Há không phải đáng tiếc lắm ư? Mục này sẽ trình bày một giới thiệu ngắn và cơ bản về bài toán đẳng chu. Trước hết, chúng ta sẽ bắt đầu với ... một bác nông dân.

Sau đây là một bài toán kinh điển (và rất thực tế): "Một người nông dân có 20 mét hàng rào và ông ấy dự định xây một khuôn viên hình chữ nhật. Ông muốn diện tích của khuôn viên lớn nhất có thể. Ông nên làm thế nào?

Trong vấn đề này, 20 mét là chu vi của khuôn viên–tổng chiều dài của các cạnh của nó. Chẳng hạn, hình chữ nhật có hai cạnh 4 mét và hai cạnh 6 mét là một hình thỏa mãn yêu cầu của bác nông dân, và nó có diện tích là $4\times 6=24$ m$^2$. Nhưng còn có vô số hình chữ nhật khác có chu vi là 20 mét, hình nào có diện tích lớn nhất? Và đó là bài toán các nhà toán học quan tâm: "Trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi 20 mét, chú nào có diện tích lớn nhất"?

Bài này thì không khó; các bạn chưa biết làm thì làm thủ công thôi: cứ xét các hình chữ nhật có cạnh là số tự nhiên với chu vi là 20 m, tính diện tích của chúng và xem lúc nào thì diện tích lớn nhất. Sau một hồi bạn sẽ đoán ra rằng hình vuông là câu trả lời. Giờ ta sẽ dùng BDT để chứng minh cho sành điệu. Nếu ta gọi $a$ và $b$ là hai cạnh của một hình chữ nhật, thì chu vi của nó là $2(a+b)$. Và theo yêu cầu của bác nông dân thì $2(a+b)=20$ tức là $a+b=10$. Diện tích của hình chữ nhật là $ab$. Và giờ ta có bài toán: tìm giá trị lớn nhất của $A=ab$ cho $a,b>0$ và $a+b=10$. Cuối cùng thì cũng gặp BDT! Mà cái này thì quá dễ rồi: AM-GM cho ngay

$$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}=\frac{10}{2}=5\Longrightarrow ab\le 25$$

Và dấu bằng xảy ra khi $a=b$. Điều này nghĩa là gì? Rất đơn giản: *trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi cho trước, hình vuông là hình có diện tích lớn nhất*. Rõ ràng con số chu vi là 20 không quan trọng, ta có thể thay nó bởi bất cứ một số thực dương nào, tức là diện tích lớn nhất là $P^2/16$, với $P$ là chu vi.

Bài toán trên của bác nông dân là một trường hợp đơn giản của bài toán đẳng chu. Bài toán đẳng chu phát biểu như sau: *xác định hình phẳng kín có diện tích lớn nhất có thể mà đường biên của nó có chiều dài cụ thể*. Nói cách bình dân, nếu bạn được cho một sợi dây có độ dài $P$ và được nói để buộc vòng lớn nhất có thể, bạn sẽ tạo hình dạng gì? Nữ hoàng Dido, con gái của vua người Phoenicia thế kỷ 9 TCN biết câu trả lời.

Nhà thơ La Mã Publius Vergilius Maro (70–19 TCN) trong sử thi *Aeneid* đã kể về câu chuyện sau đây về Dido. Sau khi chồng của bà bị ám sát bởi em trai, bà chạy trốn đến một bến cảng gần Tunis (thủ đô của Tunisia). Tại đó, bà yêu cầu nhà lãnh đạo địa phương, Yarb, cho bà một miếng đất có diện tích được bao bởi một tấm da bò. Vì thỏa thuận này dường như rất rẻ, ông này đã đồng ý. Dido cắt miếng da thành các dải hẹp, buộc chúng lại với nhau và bao quanh một khu đất lớn với một mặc là bờ biển, đủ lớn để xây nên thành phố Carthage. Thành phố này có dạng một nữa hình tròn.

Lời giải của Dido là chính xác, và chúng ta sẽ chứng minh vì sao hình tròn có diện tích lớn nhất dùng toán sơ cấp. Chúng ta sẽ bắt đầu với phần 37.6.1 trong đó ta sẽ chứng minh trong tất cả tam giác có chu vi cho trước thì tam giác đều có diện tích lớn nhất. Ta tiếp tục với phần 37.6.2 mà ở đó ta chứng minh trong các tứ giác có chu vi cho trước, hình vuông có diện tích lớn nhất. Sau khi có hai kết quả này, chắc chắn chúng ta sẽ đoán rằng: trong các đa giác có chu vi cố định thì đa giác đều là lớn nhất. Không thể không đoán như vậy được! Và ta sẽ chứng minh phỏng đoán này ở phần 37.6.3. Cuối cùng, để chứng minh hình tròn có diện tích lớn nhất, ta xét một đa giác đều (vì ta đã biết nó có diện tích lớn nhất) $n$ cạnh, tính diện tích của nó, và thấy rằng diện tích này tỉ lệ thuận với $n$ (phần 37.6.4). Sau đó, ta lại tìm hiểu tại sao tổ ong lại gồm các hình lục giác, mà không phải hình khác (phần 37.6.5).

### 37.6.1 Tam giác

Xét tam giác với ba cạnh có chiều dài là $a, b, c$. Công thức Heron, Eq. (37.23), cho ta diện tích tam giác

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{37.23}$$

trong đó $s = 0.5(a+b+c)$ là một nữa chu vi tam giác.

Bài toán ta quan tâm giờ là: trong các tam giác với chu vi cho trước, tam giác nào có diện tích lớn nhất? Với công thức Heron ở trên thì bài toán trở thành: tìm GTLN của $A$ với điều kiện $s$ là một số cho trước. Vì $s$ là hằng số, ta chỉ cần tìm GTLN của $(s-a)(s-b)(s-c)$. Dùng BDT AM-GM, ta có ngay

$$(s-a)+(s-b)+(s-c) \geq 3\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \iff (s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{s^3}{27}$$

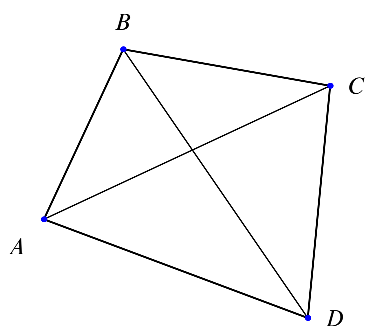
Vì vậy,

$$A \leq \frac{s^2}{\sqrt{27}} = \frac{P^2}{12\sqrt{3}}$$

Và tam giác đều là tam giác có diện tích lớn nhất trong vô số tam giác có cùng chu vi (dấu bằng ở BDT trên xảy ra khi $s-a = s-b = s-c$).

### 37.6.2 Tứ giác

Dựa vào kết quả cho tam giác trình bày ở trên, ta đoán rằng trong các tứ giác với một chu vi cho trước thì hình vuông có diện tích lớn nhất. Để chứng minh điều này, dĩ nhiên ta vẽ một tứ giác $ABCD$, và ta tính diện tích của nó. Có nhiều cách tính diện tích $ABCD$ và ta dùng cách dễ nhất: chia nó thành 2 tam giác $ABC$ và $ADC$, và đừng quên rằng diện tích tam giác là $0.5ab\sin C$ (Eq. (32.2)):




$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|\sin B + \frac{1}{2}|AD|\cdot|DC|\sin D$$

Do $\sin x \leq 1$, nên ta có ngay (dấu = xảy ra khi góc $B$ và $D$ cùng là 90°)

$$S_{ABCD} \leq \frac{1}{2}\left(|AB|\cdot|BC| + |AD|\cdot|DC|\right) \tag{37.24}$$

Tới đây thì hai tam giác còn lại trong hình trên (tam giác $ABD$ và $DBC$) sẽ hét toáng lên: sao không xài tụi tui vậy? Chiều lòng chúng ta viết $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{DBC}$ và do đó có (dấu = xảy ra khi góc $A$ và $C$ cùng là 90°),

$$S_{ABCD} \leq \frac{1}{2}\left(|AD|\cdot|AB| + |CB|\cdot|CD|\right) \tag{37.25}$$

Giờ làm gì các bạn trẻ? Ta có bốn tam giác, và chúng ta phải chiều lòng cả bốn. Cách duy nhất là cọng BDT 37.24 và 37.25 lại:

$$S_{ABCD} \le \frac{1}{4}(|AB|\cdot|BC|+|AD|\cdot|DC|+|AD|\cdot|AB|+|CB|\cdot|CD|) = \frac{1}{4}(|AB|+|CD|)(|BC|+|AD|) \tag{37.26}$$

Ta có tích, cho nên sẽ lại là BDT AM-GM: $XY \le (0.5(X+Y))^2$, cho nên

$$S_{ABCD} \le \frac{1}{4}\left(\frac{|AB|+|CD|+|BC|+|AD|}{2}\right)^2 = \frac{P^2}{16} \tag{37.27}$$

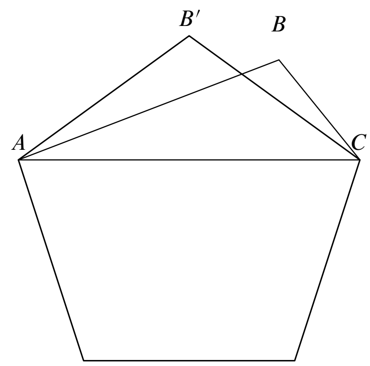
Dấu bằng xảy ra khi $|AB|+|CD| = |BC|+|AD|$, kết hợp với bốn góc là góc vuông, tứ giác có diện tích lớn nhất là hình vuông.

### 37.6.3 Đa giác đều và đa giác: ai mạnh hơn?

Bây giờ ta sẽ chứng minh phỏng đoán (*conjecture*): trong các đa giác $n$ cạnh có chu vi cho trước thì đa giác đều $n$ cạnh là lớn nhất. Ít nhất ta đã chứng minh phỏng đoán này cho $n = 3, 4$. Cho hai trường hợp này, chúng ta tìm ra công thức tính diện tích, rồi dùng BDT để tìm GTLN. Liệu chúng ta có thể làm như vậy cho một đa giác $n$ cạnh không? Điều này là không dễ. Nếu vậy thì sao không làm tương tự cho $n = 5$, $n = 6$? Các bạn nên nhớ rằng có vô số $n$ như vậy. Mỗi nhà toán học chỉ có khoảng 80 năm trên cõi đời thôi. Họ phải tìm ra một cách thông minh hơn.

Không thể chứng minh trực tiếp? Trong túi Doremon, ta còn có chứng minh quy nạp và phản chứng mà. À, ta sẽ thử phản chứng. Giả sử rằng, đa giác (không đều) có diện tích lớn nhất (với 1 chu vi cho trước). Dùng giả thuyết này, ta cố tìm ra một điều phi lý, và do đó đa giác đều có diện tích lớn nhất. Đó là kế hoạch của ta.

Ta bắt đầu với một đa giác không đều trong đó có hai cạnh kề nhau $AB$ và $BC$ dài khác nhau, các cạnh còn lại dài như nhau. Ta xét $\Delta ABC$. Một kết quả từ hình học Euclid mà ta cần dùng là: trong các tam giác có chung cạnh $AC$ và $|AB|+|BC|$ là hằng số thì tam giác cân là lớn nhất[†]. Cho nên, ta sẽ vẽ thêm điểm $B'$ sao cho $|AB'| = |B'C|$ (ta cần tam giác đều) và $|AB|+|BC| = |AB'|+|B'C|$ (chu vi không đổi). Vì diện tích $\Delta AB'C$ lớn hơn diện tích $\Delta ABC$, ta đã thành công trong việc tạo ra một đa giác mới (với đỉnh $B$ thay bởi $B'$) có diện tích lớn hơn diện tích đa giác cũ. Mà ta đã giả sử đa giác cũ là có diện tích lớn nhất. Một mâu thuẫn!




### 37.6.4 Đa giác đều $n$ cạnh: càng nhiều cạnh diện tích càng lớn

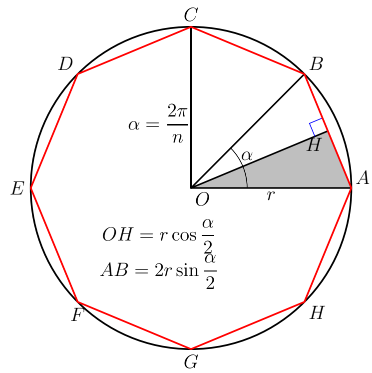
Giờ ta đi tính diện tích đa giác đều $n$ cạnh, gọi diện tích đó là $A_n$ (xem hình bên). Diện tích đa giác là tổng của $n$ diện tích tam giác $OAB$. Ta có thể tính được như sau

$$A_n = nr^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}, \quad r = \frac{AB}{2\sin\alpha/2}, \quad AB = \frac{P}{n}$$

Do đó,

$$A_n = \frac{P^2}{4}\frac{\cot{}^{\pi}/_{n}}{n} \tag{37.28}$$

Tới đây, ta có thể tính $A_n$ cho $n = 3, 4, 5, 67, 7, 8$ theo $P$ ta sẽ thấy $A_n$ càng tăng khi $n$ tăng. Do đó, trong các đa giác đều có một chu vi cho trước thì đa giác có




[†]Tại sao? Một cách đơn giản là dùng công thức Heron và BDT AM-GM với chú ý rằng chu vi không đổi và cạnh $AC$ cũng không đổi.

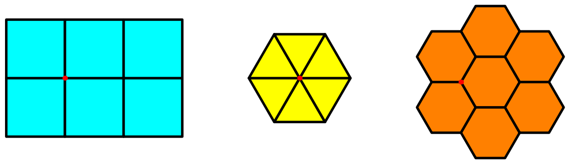
nhiều cạnh hơn sẽ có diện tích lớn hơn. Ví dụ, lục giác đều sẽ có diện tích lớn hơn ngũ giác đều, tứ giác đều, tam giác đều.

Mà đa giác đều nào có nhiều cạnh nhất? Xin thưa, hình tròn. Và như thế ta đã giải quyết xong bài toán đẳng chu!

Nói đến lục giác đều làm mình thèm mật ong quá.

### 37.6.5 Tesselation: Toán học của việc lát nền

Bạn có thể đã chú ý rằng sàn thường được lát bằng các ô vuông hoặc đôi khi là hình chữ nhật. Điều gì đặc biệt về các hình dạng này? Có những hạn chế gì khi sử dụng các hình dạng khác? Trong toán học, thuật ngữ được sử dụng để lát nền một mặt phẳng (sàn trong ngữ cảnh của chúng ta) mà không có khoảng trống và không có chồng lấp được gọi là *tessellation*. Tessellation có nhiều ví dụ trong thực tế và là một liên kết thú vị giữa toán học và nghệ thuật[†].



Hình 37.1: Các ví dụ về hình đa giác đều có thể lát sàn mà không có khoảng trống và chồng lấp: hình vuông, tam giác đều và lục giác đều. Đây được gọi là tessellation đều, chỉ cho phép một loại hình đa giác đều.

Để không có khoảng trống, góc xung quanh một điểm (điểm xa biên của mặt phẳng) phải là $360°$, không nhiều hơn, không kém hơn. Dựa trên điều này, chúng ta có thể hiểu được những đa giác đều nào có thể lát sàn một mặt phẳng. Chỉ có các đa giác đều như tam giác đều, hình vuông và lục giác đều có thể làm được điều này (Hình 37.1). Tam giác đều tạo thành tessellation đều vì góc nội tiếp của chúng là $60°$, và 60 là một ước của 360: $360 = 6 \times 60$. Hình vuông tạo thành tessellation đều vì góc nội tiếp của chúng là $90°$, và 90 cũng là một ước của 360. Lục giác đều cũng tạo thành tessellation đều vì góc nội tiếp của chúng là $120°$, và 120 cũng là một ước của 360.

Để không cần phải xem xét các khả năng khác, chúng ta dựa vào đại số để chứng minh điều này. Trước tiên, ta cần một kết quả hình học về góc nội tiếp của 1 đa giác đều $n$ cạnh:

$$\text{Góc nội tiếp của một đa giác đều } n \text{ cạnh: } \alpha = 180°(1 - {}^2\!/_n) \tag{37.29}$$

Hãy xem xét một tessellation tạo bởi các đa giác $p$ cạnh và tại một đỉnh ta có $q$ đa giác như vậy. Tại đỉnh này, góc là $360°$ và điều này cho chúng ta phương trình sau (sử dụng Eq. (37.29))

$$180° \left(1 - \frac{2}{p}\right) \times q = 360°$$

Chia cả hai bên của phương trình này cho $180°$, chúng ta có phương trình khác

$$(1 - 2/p)q = 2$$

Và nhiệm vụ của chúng ta bây giờ là giải quyết phương trình này - đó là tìm các bộ $(p, q)$ - với điều kiện $p, q \in \mathbb{N}$. Làm thế nào để làm điều này? Điều kỳ diệu, một chút biến đổi đại số cho phương trình làm giúp lớn:

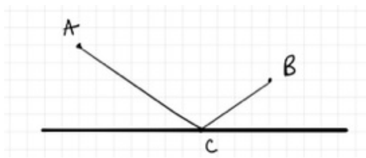
$$(p-2)q = 2p \Longleftrightarrow (p-2)q = 2p - 4 + 4 \Longleftrightarrow (p-2)(q-2) = 4 \tag{37.30}$$

Vì vậy, $(p - 2, q - 2) = (1, 4), (4, 1), (2, 2)$. Do đó, $(p, q) = (3, 6), (6, 3), (4, 4)$: $(3, 6)$ là 3 lục giác tại một đỉnh, $(6, 3)$ là 6 tam giác tại một đỉnh. Chỉ vài dòng với các $n, p, \ldots$ ta đã chứng minh lát nền chỉ có thể làm với tam giác, hình chữ nhật, và lục giác. Đừng tốn công đi tìm những cách lát khác! (Xin đừng quên rằng chúng ta đang giới hạn cho việc chỉ dùng 1 loại gạch nhé.)

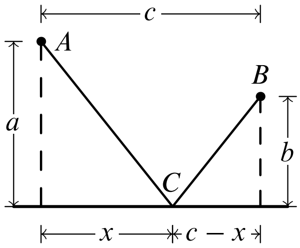
[†]Mình biết về chủ đề này thông qua cuốn sách rất thú vị "*Mathematics Rebooted: A Fresh Approach to Understanding*" của Lara Alcock Alcock (2017). Alcock là giảng viên trong Bộ môn Giáo dục Toán học tại Đại học Loughborough, Vương quốc Anh.

Giờ thì ta có thể hiểu vì răng con ong lại chọn lục giác đều cho tổ ong của nó. Chỉ có tam giác đều, hình chữ nhật và lục giác đều có thể tạo ra tổ ong. Tuy nhiên, hình lục giác lớn hơn hình vuông và tam giác (với cùng chu vi) và vì vậy nó sẽ chứa nhiều mật ong hơn khi sử dụng cùng một lượng sáp ong trong quá trình xây dựng tổ ong. Vậy các chú ong biết toán học ☺? Cái này thì Phính xin chịu. Mình chỉ muốn nêu ra một quan điểm: thay vì cứ tìm giải các BĐT để thi này thi nọ, các bạn trẻ có thể dùng BĐT để tìm hiểu thiên nhiên. Đó mới là toán học đích thực.


## 37.7 Bài toán khoảng cách ngắn nhất của Heron




Heron của Alexandria, người sống từ khoảng 10-75 sau Công Nguyên, đã giải quyết một trong những bài toán tối ưu đầu tiên có tính phức tạp gọi là "Bài toán khoảng cách ngắn nhất" của Heron. Bài toán này có mô tả đơn giản như sau: Cho hai điểm cố định được đánh dấu là $A$ và $B$ ở cùng phía của một đường thẳng, mục tiêu là tìm một điểm $C$ trên cùng đường thẳng sao cho tổng các khoảng cách $|AC| + |CB|$ là nhỏ nhất.




$$
\begin{aligned}
AC &= \sqrt{a^2 + x^2} \\
BC &= \sqrt{b^2 + (c-x)^2} \\
f(x) &= \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2} \\
f'(x_0) &= 0 \Rightarrow x_0 \Rightarrow C
\end{aligned}
$$

Hình 37.2: Bài toán khoảng cách ngắn nhất của Heron: chúng ta cần tìm vị trí tốt nhất cho điểm $C$. Có thể bài toán thực tế như sau: một người đi từ ngôi làng ở $A$ đến ngôi làng ở $B$ và phải đi ngang con sông để uống nước. Đường đi thế nào là ngắn nhất.

Vì chúng ta đã quá quen thuộc với việc dùng đại số (tức là $x, y, z$ và $a, b, c$) để làm toán, chúng ta ngay lập tức vẽ Hình 37.2: trong đó $a$, $b$ và $c$ là các hằng số và $x$ là biến đại diện cho khoảng cách theo chiều ngang từ điểm $A$ đến điểm $C$. Mục tiêu xác định vị trí tối ưu cho điểm $C$, sao cho tổng các khoảng cách là nhỏ nhất, tương đương với tìm $x$ sao cho $|AC| + |CB|$ là nhỏ nhất. Tức là tìm $x$ sao cho $f(x)$ nhỏ nhất, với

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2} \tag{37.31}$$

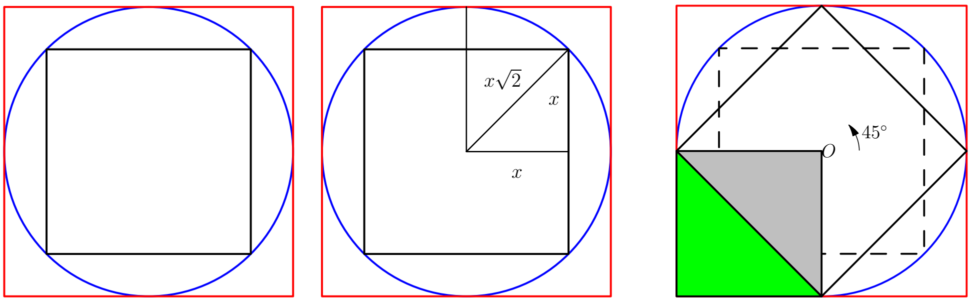
Và tới đây thì mình bí nếu bị cấm xài đạo hàm. Tại sao? Vì Heron không cần đạo hàm! Vậy ông dùng gì? Tính đối xứng! Cái gì? Chúng ta thấy đối xứng khắp nơi, trong thiên nhiên và cả cơ thể chúng ta (Hình 37.3).

Như một ví dụ về việc tận dụng tính đối xứng để giải một bài toán, hãy xem xét bài hình học sau[†]: một hình vuông nội tiếp trong một hình tròn, và hình tròn này lại nội tiếp trong một hình vuông khác. Câu hỏi: Tìm tỷ lệ giữa diện tích của hình vuông nhỏ và diện tích hình vuông lớn. Chúng ta có thể dùng đại số và định lý Pythagoras để giải quyết vấn đề này (Hình 37.4a): tỷ lệ đó là $1/2$. Nhưng chúng ta cũng có thể sử dụng đối xứng: nếu chúng ta quay hình vuông nhỏ 45 độ theo chiều kim đồng hồ xung quanh tâm của hình tròn, chúng ta sẽ có một bài toán mới được thể hiện trong Hình 37.4b. Cái hay của hình mới là ta có thể thấy ngay rằng tỷ lệ chúng ta đang tìm kiếm là $1/2$!

[†]Nguồn: *The Art and Craft of Problem Solving*.

(a) đối xứng xoay (b) đối xứng

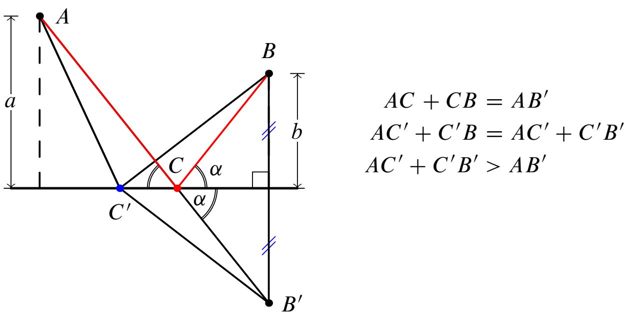
Hình 37.3




(a) dùng đại số (b) dùng đối xứng

Hình 37.4: Sử dụng đối xứng để giải quyết các vấn đề.

Bây giờ ta quay lại với bài toán Heron. Tham khảo Hình 37.5, Heron đã tạo ra một điểm mới $B'$ là hình chiếu của điểm $B$ qua đường ngang. Sau đó, lời giải–điểm $C$– là giao điểm của đường thẳng $AB'$ và đường ngang: đi từ $A$ tới $B$ thì cũng như đi từ $A$ tới $B'$, mà khoảng cách ngắn nhất giữa 2 điểm là đoạn thẳng nối 2 điểm đó. Một lời giải tuyệt đẹp. Tuy nhiên, nó thiếu tính tổng quát. Ngược lại, lời giải dựa trên đạo hàm có thể áp dụng rộng rãi cho gần như bất kỳ bài toán tối ưu nào và không đòi hỏi người sử dụng phải là một thiên tài. Với giải tích, mọi thứ trở nên thông thường: tìm $f(x)$, tính đạo hàm $f'(x)$ và giải $f'(x) = 0$, lời giải của phương trình chính là lời giải cần tìm.




Hình 37.5: Lời giải tài tình của Heron. Nó sử dụng một tính chất của tam giác: tổng của hai cạnh lớn hơn cạnh còn lại. Điểm quan trọng của lời giải là tạo ra điểm $B'$ đối xứng với $B$ qua con sông.

Kết quả này còn có gì đáng nói? Nó chính xác là luật phản xạ ánh sáng nếu chúng ta xem vấn đề như là ánh sáng di chuyển từ $A$, phản xạ trên một bề mặt tại $C$ và đi đến $B$: góc phản xạ bằng góc tới (xem Hình 37.5 và các góc được đánh dấu), điều này đã được Euclid phát hiện cách thời Heron sống khoảng 300 năm.

Heron đã chứng minh rằng ánh sáng phản xạ theo đường đi *ngắn nhất*–hoặc thời gian *ngắn nhất*, giả sử ánh sáng có tốc độ hữu hạn. Đây là một thành tựu quan trọng. Bởi vì đây là bằng chứng đầu tiên cho thấy rằng vũ trụ của chúng ta là lười biếng. Khi nó thực hiện một điều gì đó, luôn luôn lựa chọn cách sao cho một lượng cụ thể (ví dụ: thời gian, khoảng cách, năng lượng, hành động) là tối thiểu. Hãy suy nghĩ về điều này một lúc, sau đó bạn sẽ thấy thích thú với ý tưởng này. Là một con người, chúng ta thực hiện một việc theo nhiều cách và từ những thử nghiệm này, chúng ta chọn cách tốt nhất (tối ưu). Tự nhiên có làm điều tương tự không? Dường như không. Vậy, tại sao nó biết chọn cách tốt nhất?

Ngày 7 tháng 10 năm 2023

# Chương 38

# Chuyện lập trình

MÌNH là người tự học lập trình và không phải là dân công nghệ thông tin và càng không phải dân kỹ sư phần mềm nên những gì mình chia sẻ về lập trình chỉ là ... sẻ chia.

Trước tiên phải làm rõ hai khái niệm rất nhập nhằng: coding và programming. Leslie Lamport (sinh năm 1941), nhà khoa học máy tính người Mỹ và là chủ nhân giải thưởng 2013 Turing (ví như giải Nobel cho khoa học máy tính) đã nói quá hay về điều này:

> *"Coding is to programming as typing is to writing (Viết mã đối với lập trình cũng như đánh máy với viết)".*

Để hiểu ý của Lamport, xin lấy ví dụ của nhà văn. Để có một quyển tiểu thuyết nhà văn trước hết phải nghĩ ra các nhân vật và một câu chuyện liên kết họ lại với nhau; đây là writing. Sau khi đã có cái này thì phần việc còn lại chỉ là viết xuống (typing) mà thôi. Rõ ràng là cái khó là bước writing; làm sao Kim Dung nghĩ ra nhân vật Lệnh Hồ Xung chẳng hạn. Bước typing thì không khó. Ai là người Việt Nam có đi học là có thể viết 'Lệnh Hồ Xung'; sẽ có khó khăn lúc ban đầu hay khó khăn khi gặp những từ phức tạp như 'giành dụm'. Những khó khăn này, tuy nhiên, có thể khắc phục dễ dàng bằng cách dùng từ điển hay công cụ kiểm tra lỗi chính tả.

Lập trình cũng giống vậy thôi.

Nhưng mà lập trình là gì? Người học lập trình phải biết trả lời câu hỏi này. Trong cuốn *"The Pragmatic Programmer: From Journeyman to Master* của Andrew Hunt và David Thomas, lập trình được giải thích như sau:

> *"Lập trình là một nghề thủ công. Nói một cách đơn giản nhất, lập trình là bắt máy tính làm những gì bạn muốn nó làm (hoặc những gì người dùng của bạn muốn nó làm)".*

Định nghĩa này cho thấy chúng ta phải giao tiếp với máy tính để sai bảo nó làm những gì chúng ta muốn làm. Muốn giao tiếp với nó, chúng ta phải biết ngôn ngữ của máy tính. Điều may mắn là đã có nhiều nhà khoa học máy tính (nhưng có gốc Toán) tạo ra những ngôn ngữ lập trình (programming languages) như `Fortran`, `C/C++`, `Python` hay `Java`, giúp cho việc giao tiếp này đơn giản hơn. Người lập trình sẽ viết mã (code) bằng một trong những ngôn ngữ lập trình *cấp cao* kể trên, và mã này sẽ được dịch sang mã máy bởi một trình biên dịch (compiler). Bước này là cần thiết vì máy tính không hiểu những gì bạn viết bằng các ngôn ngữ lập trình. Như vậy để lập trình chúng ta phải biết ít nhất hai thứ: (1) cách giải quyết vấn đề (problem solving) và (2) làm sao diễn giải cách đó bằng một ngôn ngữ lập trình. Chúng ta, những người không chuyên về khoa học máy tính, thì không cần quan tâm làm thế nào trình biên dịch dịch mã chúng ta viết sang ngôn ngữ máy.

Nhiều bạn trẻ–trong đó bao gồm mình–đã gặp rất nhiều khó khăn trong việc học lập trình. Mình cho rằng chuyện này xảy ra là do nhiều nguyên nhân khách quan, chứ không phải chủ quan. Thứ nhất, nhiều bạn không biết tại sao phải học lập trình. Thứ hai là do chúng ta không biết cách giải quyết vấn đề. Và cuối cùng chúng ta chưa quen ngôn ngữ lập trình đến mức có thể diễn giải cách giải quyết vấn đề bằng một ngôn ngữ lập trình đó. Cái này giống như đã biết là *anh yêu em* nhưng mà đứng trước cô gái Mông Cổ thì không biết nói làm sao cho nàng hiểu. (Đang giả sử chỉ được dùng cái miệng để tỏ tình thôi.)

Rất nhiều sách dạy lập trình, cũng như các khóa lập trình không chú trọng đến hai nguyên nhân đầu tiên. Thay vào đó chúng hầu như chú trọng hướng dẫn về cú pháp, để làm sao nói 'anh yêu em' bằng tiếng `C++` chẳng hạn. Mình cho rằng đây là một cách học lập trình không hiệu quả.

Vậy Phính ơi, học lập trình để làm chi rứa? Theo thiển ý của mình thì học lập trình có những lợi ích như sau:

- Lập trình có thể rất là vui (lập trình game chẳng hạn).
- Tự động hóa các nhiệm vụ lặp đi lặp lại. Điều này làm tăng hiệu quả công việc.
- Cải thiện kỹ năng giải quyết vấn đề.
- Phát triển khả năng phục hồi. Ý là, giúp chúng ta phát triển cách thích nghi thành công với những trải nghiệm cuộc sống khó khăn hoặc thách thức, đặc biệt là thông qua sự linh hoạt về tinh thần, cảm xúc và hành vi và điều chỉnh các nhu cầu bên ngoài và bên trong.
- Nghiên cứu sau đại học (Thạc sĩ/Tiến sĩ): làm tiến sỹ thì phần lớn phải lập trình. Ví dụ dùng `Python` để xử lý số liệu chẳng hạn. Không ai dùng `Excel` cả.
- Cung cấp cho bạn một lợi thế trong việc tìm kiếm công việc. Trên Linkedln mình đã từng ghi biết `Python` và Google đã liên lạc mình cho một việc internship.
- Biết lập trình cho chúng ta một sự linh hoạt nghề nghiệp; tức là có thể chuyển nghề nếu muốn.
- Và cuối cùng, Lauren Bacall (1924–2014), một nữ diễn viên người Mỹ được Viện phim Mỹ vinh danh là ngôi sao nữ vĩ đại thứ 20 của điện ảnh cổ điển Hollywood đã nói:

  > *"Đứng yên là cách nhanh nhất để thụt lùi trong một thế giới đang thay đổi nhanh chóng."*

  Câu nói của Bacall càng có giá trị trong thời đại mà trí tuệ nhân tạo càng ngày càng phát triển.

Mình sử dụng lập trình như một công cụ để giải các bài toán kỹ thuật. Không hơn không kém. Vì khả năng có hạn nên mình áp dụng luật 80-20 (Chương 2) cho mọi việc. Do đó, mình không quan tâm về bộ nhớ bánh RAM bánh riết gì cả. Mình cũng không quan tâm tại sao trong `C`, mình phải khai báo biến, ví dụ

```
int x; x = 5;
```

Vì khi dùng `Matlab` hay `Python` thì chúng ta không phải làm chuyện này! Các bạn trẻ phải hiểu rằng một ngôn ngữ lập trình là do một người (thường là một nhà khoa học máy tính) đẻ ra. Và người này có quyền quyết định đứa con mình sẽ như thế nào. Do đó các ngôn ngữ lập trình không nhất thiết phải giống nhau.

Tuy không mất thời gian tìm hiểu trả lời câu hỏi tại sao, khi mình thấy `int x; x = 5;` thì trong đầu mình sẽ thấy đoạn đối thoại sau: Xin chào, mình tên $x$, mình là int (như con trai vậy) và mình 5 tuổi. Như vậy câu lệnh ở trên là để giới thiệu với compiler (trình biên dịch) $x$ là ai... Sau khi đã được giới thiệu rồi thì giờ chúng ta có thể dùng $x$.

Mình học một ngôn ngữ lập trình y chang như mình học tiếng Anh. Không hỏi tại sao, chỉ việc bắt chước; nghĩa là xem ví dụ, rồi làm theo. Dĩ nhiên nếu có thời gian và khả năng thì học sâu hơn có lẽ tốt hơn. Trong trường hợp của mình thì cái quan trọng là bài toán cơ học. Mà cái này cũng đủ làm mình đau đầu rồi. Không thể hiểu hết được! Nếu mà cứ hỏi tại sao, thì mình làm PhD chắc phải mất 20 năm!

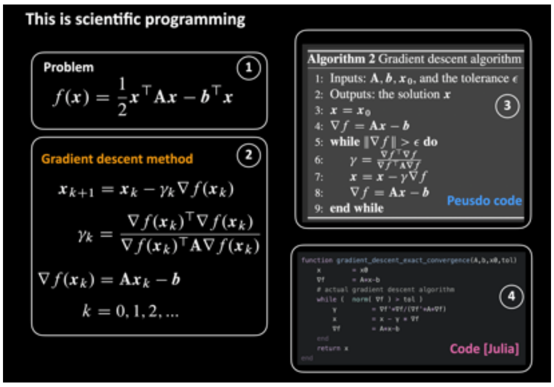
Nhớ hồi xưa lúc học BK Xì gòn có một bạn chuyên Lê Hồng Phong. Mà chú này, đeo kính cận thật dày, không học tiếng Pháp được, vì chú cứ mãi hỏi tại sao. Ví dụ tại sao *la maison* (cái nhà) mà không là *le maison*? Nếu suy nghĩ như chú này thì tại sao *le*, *la* mà không phải *lu*? Và thế là chúng ta rơi vào một vòng luẩn quẩn một cách không cần thiết.

Tương tự như câu chuyện Word và LaTeX (xem Chương 43), mình không bao giờ dùng Excel để làm cái việc gọi là lập trình. Dĩ nhiên là một thầy giáo mình đã phải hạ mình dùng Excel đôi ba lần lúc tổng kết điểm. Chỉ vì trường bắt buộc phải nộp Excel thôi. Nếu không bị ràng buộc mình sẽ dùng `Python`, hay `Julia`. Tại sao mình làm khó bản thân như vậy? *Vì mình muốn tập thói quen lập trình thành một bản năng.*

Như vậy các bạn trẻ muốn làm kỹ thuật hay khoa học thì đừng mất thời gian học những thứ sau: `Excel, [Word], Delphi, Visual Basic`. Những thứ này không dạy các bạn tư duy lập trình (programming thinking), vì quá chú trọng vào giao diện và tương tác với người dùng. (Không phải Phính này nói mấy chuyện đó không quan trọng nhé). Hơn nữa, bạn muốn thành J. K. Rowling–tác giả truyện Harry Potter (writing) hay là người thư ký (typing) gõ những gì Rowling viết? Bạn chọn đi.

Thay vào đó hãy học, càng sớm càng tốt: `Python`, `Julia`, `Matlab`. Học một ngôn ngữ nào đó trước, sau đó việc học mấy chú khác dễ như ăn kẹo. Chịu chơi thì học thêm `C/C++`. Mình biết `Matlab, C++, Python`, và dù chừng đó là đủ đi giang hồ, nhưng năm 37 tuổi mình vẫn học thêm `Julia`. Không những cho vui mà còn rèn luyện bộ óc không để nó rỉ sét. Vậy mà giờ mình dùng `Julia` rất nhiều. Connecting the dots, không ai biết trước tương lai.

Vậy thì làm thế nào để giải quyết một bài toán? Rất đơn giản:




Hình 38.1: Lập trình kỹ thuật: từ bài toán (1), đến giải thuật (2), rồi giả code (3) và cuối cùng là code (4).

**Bước 1** tìm ra thuật toán, tức là cách giải bài toán đó. Thuật toán thì không dính dáng gì đến ngôn ngữ lập trình hết. Thuật toán nên viết dưới dạng pseudo code: tức là các bước cần làm bằng tiếng Anh hay tiếng Việt.

**Bước 2** dịch cái pseudo code ở trên sang ngôn ngữ bạn đã chọn (ví dụ `Matlab` hay `Python`), xem Hình 38.1. Cái này chắc là coding theo Lamport. Trong bước này thì Google (giờ thì có thêm ChatGPT) là người bạn đắc lực, có gì không biết thì hỏi nó. Mình không bao giờ học thuộc cú pháp (syntax), google hết, dành cái não tí tẹo cho bước 1. Nhà Vật lý Einstein đã nói:

> *Đừng bao giờ ghi nhớ một cái gì đó mà bạn có thể tra cứu.*

Và quả đúng như vậy, ông thậm chí không nhớ số điện thoại của nhà mình! Hãy nghe thêm David Allen (sinh năm 1945)–một nhà tư vấn năng suất người Mỹ nổi tiếng với việc tạo ra một phương pháp quản lý thời gian có tên là "Hoàn thành công việc". Allen nói:

> *Bộ não của bạn là để có những ý tưởng, không phải để giữ chúng.*

(Để giữ ý tưởng hay thông tin thì viết xuống giấy, hay dùng các phần mềm).

**Bước 3** chạy thử. Nếu may mắn thì kết quả đúng. Ăn mừng xong thì cải tiến code ở bước 2 cho nhanh hơn, đẹp hơn. Coding là một nghệ thuật. Nếu không may thì kết quả sai. Cái này xảy ra nhiều hơn. Có thể sai ở bước 1 hay bước 2. Nếu là bước 2 thì phải đi tìm ra con bọ (bug) trong code. Cái này–gọi là gỡ lỗi–là cái đau đầu nhất. Vì con bug thì nó nhỏ (ví dụ dấu cộng thay vì trừ), và mình tìm bằng mắt trần. Lúc này thì nên túm ai lại mà tâm sự. Trong lúc tám như vậy thì hay tìm ra bug lắm.

Chương trình thì nên chia nhỏ ra, xong phần nào thì test phần đó. Như vậy sẽ dễ tìm bug hơn. Một cách để viết code tốt hơn là đọc nhiều code (của người khác viết), cái này giống nhà văn thì đọc Hemmingway, đọc Shakespeare, ... Mình có viết một vài slide về mô hình Toán học và lập trình, bạn nào quan tâm có thể google *An introduction to mathematical modelling and scientific programming*.

Bjarne Stroustrup (sinh 1950), nhà khoa học máy tính Đan Mạch, tác giả ngôn ngữ lập trình `C++`, đã khuyên rằng: "Hãy nhớ rằng: lập trình (trong số những thứ khác) là một kỹ năng thực tế mà bạn cần luyện tập để thành thạo. Nếu bạn không viết mã (làm một số bài tập cho mỗi chương), đọc bất cứ cuốn sách nào về lập trình sẽ là một bài tập lý thuyết vô nghĩa." Và tương tự như việc học bao điều khác, hãy bắt đầu từ cái dễ nhất, và đi lên từ từ. Ai học lái xe đạp cũng bắt đầu lái hai tay cả, sau một thời gian thì mới lái một tay, và cuối cùng là thả hai tay. Đừng có hấp tấp.

Tại sao mình nói học càng sớm càng tốt? Vì lúc trẻ là lúc các bạn minh mẫn nhất, cũng là lúc có thời gian cho bản thân nhiều nhất. Sau khi lớn lên có người yêu, có con cái muốn học cũng ít thời gian hơn. Sau đây là một minh chứng. Một hôm không biết vì răng mà trong đầu mình nảy ra cái giấc mơ ban ngày; mơ rằng giờ là mùa hè, và mình được về Huế một mình. Sau đó mình lang thang đến trường Hai Bà Trưng nhìn phượng đỏ và nghe tiếng ve kêu. Và quan trọng hơn là có cả tất cả các bạn thời xưa. Có người trong mộng thời xưa nữa thì càng tốt. Chuyện nghe đơn giản, sao là giấc mơ? Khi con người ta lớn đến một cái độ tuổi nào đó thì bị gắn vào cái gọi là trách nhiệm, mà có khi không muốn làm cũng phải làm. Như người xưa vẫn nói, người đàn ông có gia đình thì phải bảo đảm trên bàn lúc nào cũng có thức ăn cho vợ con. Vì trách nhiệm đó mà không phải muốn gì là làm.

Do đó các bạn trẻ nên chú ý: *thời gian là thứ quý báu nhất trên đời, và lúc trẻ là lúc bạn có nhiều thời gian nhất trong cuộc đời.* Lúc già cũng có nhiều thời gian, nhưng lúc đó thì chỉ ngồi hoài niệm chứ khó mà học hành gì nữa.

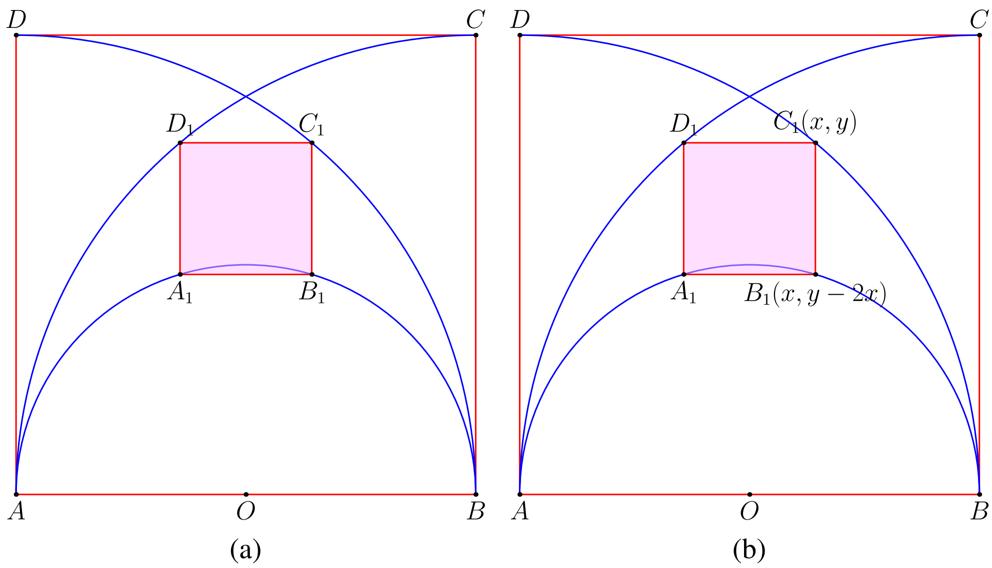
Bây giờ chúng ta sẽ nghe câu chuyện của Brian Green, nhà Vật lý lý thuyết nổi tiếng người Mỹ. Hồi cấp ba, do chương trình học quá dễ nên giáo viên dạy Toán của Green viết cho ông một lá thư giới thiệu để ông mang sang trường đại học Cornel hay Columbia gì đó. Green là người New York. Green đi chung với một người bạn, trong tay cầm lá thư, đi gõ cửa từng phòng GS. Làm như vậy cho đến một hôm thì gặp ân nhân–như mình gặp Stéphane vậy. Ân nhân này là một NCS và thấy Green nhiệt tình nên đồng ý sẽ dạy kèm cho Green miễn phí! Người này đã dạy Green đại số trừu tượng, lý thuyết số những thứ Green chưa biết đến. Nguồn: https://www.bbc.co.uk/sounds/play/m000hmfm.

Các bạn trẻ, tại sao bạn không làm như Green? Nếu bạn chán chương trình học cấp 2/3? Chắc chắn sẽ có ân nhân giúp bạn. Mà câu chuyện như Green không phải là hiếm. Còn nhiều trường hợp khác lắm. GS Alan Edelman ở MIT người đồng tạo ra ngôn ngữ lập trình `Julia`, lúc học cấp 3, vì chán quá nên học ké lớp đại số tuyến tính ở một trường đại học gần nhà. Và sau này ông làm về chính đại số tuyến tính!

Chính Steve Jobs cũng khuyên các bạn trẻ như vậy. Hồi trẻ ông đã gọi điện tới giám đốc của 1 công ty để xin linh kiện. Không những ông có linh kiện điện tử mà còn được luôn cái job trong công ty đó. Xem Steve nè: https://www.youtube.com/watch?v=zkTf0LmDqKI.

Nghĩ một chút thì chuyện này rất dễ hiểu. Ai cũng muốn làm người tốt, người có ích cả. Đặc biệt lúc người ta đã đầy đủ cơm áo gạo tiền thì họ sẽ mong có người để giúp. Không phải tốt đẹp gì cả! Mà điều đó đem lại cảm giác rất dễ chịu. Cái này trong công việc họ không tìm thấy được. Và bạn mang đến cho họ, sao họ nói không được chứ???

**Ví dụ 1**. Sau đây là một ví dụ lấy từ bạn Trần Quân đăng trên nhóm faecebook *Vẽ hình học Tikz-Asymptote* của anh Lê Huy Tiễn. Bài tập như sau (xem Hình 38.2a). Cho hình vuông $ABCD$ mà cạnh dài hai đơn vị ($|AB| = 2$). Vẽ $1/2$ hình tròn tâm $O$ (là trung điểm của $AB$) và có bán kính là 1; ta đặt tên cho hình tròn này là $(C_1)$. Tiếp đó vẽ thêm $1/4$ hình tròn tâm $A$, bán kính là 2 đơn vị ($(C_2)$), và $1/4$ hình tròn tâm $B$, bán kính là 2 đơn vị ($(C_3)$). Yêu cầu: dựng hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ sao cho $A_1, B_1$ nằm trên $(C_1)$, $C_1$ nằm trên $(C_2)$ và $D_1$ nằm trên $(C_3)$. Chúng ta sẽ dùng ngôn ngữ lập trình `Asymptote` để làm bài này.




Hình 38.2: Tọa độ của $B_1$ là $(x, y)$ với $0 \le x \le 1$. Chú ý rằng tất cả tung độ đều không âm. Do đó $y - 2x \ge 0$.

Chúng ta sẽ giải bài này bằng cách dùng hình học giải tích của Descartes và Fermat. Đó là cách dễ nhất. Trước hết chúng ta cần một hệ trục tọa độ vuông góc. Chúng ta chọn $O$ làm gốc. Tại sao? Vì bài toán đối xứng: tưởng tượng có một cái gương dựng đứng qua điểm $O$ thì một nửa của Hình 38.2a bằng chính xác nửa còn lại. Nếu tọa độ của $C_1$ là $(x, y)$ thì tọa độ của $B_1$ phải là $(x, y-2x)$ vì $A_1B_1C_1D_1$ là một hình vuông, xem Hình 38.2b. Nhiệm vụ của chúng ta bây giờ là tìm ra $x$ và $y$. Chú ý rằng $B_1$ và $C_1$ nằm trên hai hình tròn mà chúng ta hoàn toàn quen thuộc, do đó chúng ta sẽ có 2 phương trình cho $x, y$. Phương trình của $(C_1)$, $(C_2)$ và $(C_3)$ lần lượt là:

$$(C_1): x^2 + y^2 = 1, \quad (C_2) = (x+1)^2 + y^2 = 4, \quad (C_3) = (x-1)^2 + y^2 = 4 \tag{38.1}$$

Thay tọa độ của $B_1$ vào phương trình của $(C_1)$ và tọa độ của $C_1$ vào phương trình của $(C_2)$, ta có hai phương trình sau:

$$x^2 + (y-2x)^2 = 1, \quad (x+1)^2 + y^2 = 4 \tag{38.2}$$

Chúng ta sẽ dùng cách đơn giản nhất để giải hệ này: khử $y$. Từ phương trình thứ hai ta có $y^2 = 4 - (x+1)^2$ và $y = \sqrt{4-(x+1)^2}$ (chú ý rằng $y \ge 0$). Thay $y^2$ và $y$ vào phương trình thứ nhất, ta sẽ có:

$$4x^2 - 2x + 2 = 4x\sqrt{3 - x^2 - 2x} \tag{38.3}$$

Làm gì tiếp theo? Đã lên lưng hổ rồi thì chơi tới luôn: chúng ta sẽ bình phương hai vế, để khử căn, và chúng ta sẽ có phương trình sau:

$$8x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = 0 \tag{38.4}$$

Wow, phương trình bậc bốn[††]! Có đáng sợ không? Có, dĩ nhiên là có. Tới đây thì cần phải tinh tế: hãy nhìn vào Hình 38.2a. Có mối quan hệ nào giữa hai hình vuông $ABCD$ và $A_1B_1C_1D_1$ không? Câu trả lời là có: nếu ta phóng to hình $A_1B_1C_1D_1$ dần dần thì nó sẽ trở thành hình $ABCD$! Điều này có nghĩa gì? Có nghĩa là Eq. (38.4) phải có nghiệm hoặc là $x = 1$ hay $x = -1$ (khi đó $C_1$ là $D$). Kiểm tra thì thấy ngay $x = -1$ là một nghiệm, do đó, thay vì phải giải phương trình bậc bốn, chúng ta chỉ cần giải phương trình bậc 3:

$$(x+1)(8x^3 - 4x^2 - 3x + 1) = 0 \Longleftrightarrow \boxed{8x^3 - 4x^2 - 3x + 1 = 0} \tag{38.5}$$

Dĩ nhiên chúng ta có thể dùng công thức Cardano trình bày ở Chương 21 để giải phương trình bậc ba đóng hộp trên, tuy nhiên chúng ta không dùng nó. Vì đang học lập trình, chúng ta sẽ dùng một phương pháp gọi là phương pháp bisection. Sau khi có $x, y$ thì ta xác định được $B_1$, $C_1$, $A_1 = (-x, y - 2x)$ và $D_1 = (-x, y)$. Và bài toán đã được giải quyết. Nhưng tại sao $D_1$ nằm trên $(C_3)$? Vì đối xứng. Nếu bạn chưa hài lòng với câu trả lời đó thì xin xem kỹ Eq. (38.1): nếu $(x, y)$ thỏa mãn phương trình của $(C_2)$ thì $(-x, y)$ thỏa mãn phương trình của $(C_3)$.

Như vậy là bước 1 đã xong. Và giải thuật cho bài này là: xác định tọa độ của $A, B, C, D$ và $O$, vẽ hình vuông $ABCD$, vẽ các hình tròn, giải Eq. (38.5), sau đó vẽ $A_1B_1C_1D_1$. Đó là cái plan tổng quát. Giờ chúng ta sang bước 2: dịch cái plan sang ngôn ngữ `Asymptote`. Vì giải Eq. (38.5) hơi khó, chúng ta trước hết vẽ các hình trừ hình vuông nhỏ. Đây là cách chia chương trình thành các phần nhỏ và xử lý từng phần một. Đây là phương pháp *divide and conquer* như người Tây hay nói. Các vị vua chúa thời xưa biết cái này rõ nhất: họ không bao giờ chinh phục tất cả kẻ thù cùng một lúc, thay vào đó họ tiêu diệt từng kẻ thù một.

Nào, bây giờ chúng ta sẽ vẽ hình vuông $ABCD$ và 3 hình tròn. Chương trình được trình bày ở mã 38.1. Các bạn chỉ cần mở một trình duyệt web (Safari chẳng hạn nếu dùng Mac), mở trang `http://asymptote.ualberta.ca`, và copy/paste code vào đó, nhấn `run`, sẽ thấy Hình 38.2a[§]–một hình rất đẹp và máy tính làm cho chúng ta. Không gì vui bằng!

Nhưng tui chưa biết `Asymptote`; làm sao đây? Thời nay mà hỏi như vậy thì hơi lạc hậu đó. ChatGPT là người hầu của bạn. Chỉ cần mở ChatGPT lên, gõ vào 'how to draw an arc in Asymptote' là bạn học được cú pháp của lệnh `arc`. Mình đã dùng cách này để viết chương trình vẽ hình vuông $A_1B_1C_1D_1$.

Mã nguồn 38.1: Chương trình `Asymptote` vẽ Hình 38.2a.

```
size(12cm, keepAspect=true); // size of the picture 12x12
defaultpen(fontsize(16pt));  // fontsize

pair A = (-1,0); // define a 'pair' variable named A, with value (-1,0)
pair B = ( 1,0);
pair C = ( 1,2);
pair D = (-1,2);
pair O = ( 0,0);

pen p1 = red  + linewidth(1);// define a variable p1 = red+linewidth=1
pen p2 = blue + linewidth(1);

draw(A--B--C--D--cycle, p1); // draw a line joining ABCD, with pen = p1
```

[††] Chúng ta phải hỏi ngay: tại sao lại bậc bốn mà không phải bậc 3 hay 5? Câu trả lời nằm ở Eq. (38.2). Phương trình một trong đó là một elip (xem Hình 38.3a), còn phương trình thứ hai là một hình tròn. Hai hình này có thể giao nhau tối đa tại bốn điểm, không thể nhiều hơn. Đó là lí do Eq. (38.4) là phương trình bậc 4.

[§] Ờ, thật ra thì chưa thấy được hình vuông nhỏ nhỏ xinh xinh.

```
draw(arc(O,1.,0., 180.),p2);// draw an arc centered at O, rad=1
draw(arc(A,2.,0., 90. ),p2);// starting angle =0, ending angle=180
draw(arc(B,2.,90.,180.),p2);// with pen ‘p2’(comment for first draw)
```

Những gì viết sau // là chú thích. Các chú thích được viết để mô tả chương trình dự định làm gì. Người có nhiều khả năng được hưởng lợi nhất từ các chú thích trong mã của bạn là chính bản thân bạn — khi bạn quay lại mã đó vào tuần tới hoặc năm sau và quên chính xác lý do tại sao bạn viết mã theo cách bạn đã làm. Vì vậy, đừng quên chú thích chương trình của bạn.

Tiếp theo chúng ta sẽ viết code cho phương pháp bisection để giải $f(x) = 0$ cho $x \in [a, b]$. Phương pháp bisection rất đơn giản, và dựa trên tính chất này của hàm liên tục: nếu $f(a)f(b) < 0$ thì $f(x) = 0$ cho $x \in [a, b]$, tức là $f(x) = 0$ có nghiệm trong đoạn $[a, b]$[**]. Nhưng mà $[a, b]$ dài quá, làm sao biết $x$ là thằng nào? Rộng thì làm cho nó hẹp lại! Đó là nguyên lý của phương pháp bisection. Chúng ta chia đoạn $[a, b]$ ra hai đoạn với $x = 0.5(a + b)$. Rồi kiểm tra cho đoạn $[a, x]$ (ngắn hơn một nửa): nếu $f(a)f(x) < 0$ thì có nghiệm trong $[a, x]$, ta lại áp dụng bisection cho đoạn này, nếu không thì áp dụng cho đoạn $[x, b]$. Chúng ta cứ chia đôi như vậy cho đến khi ta có một đoạn rất rất ngắn (ví dụ $10^{-10}$) thì dừng lại. Mã 38.2 là chương trình này.

Mã nguồn 38.2: Chương trình `Asymptote` giải Eq. (38.5).

```
1  real myfunc(real x)
2  {
3    return 8*x^3 - 4*x^2 - 3*x + 1;
4  }
5  real epsilon = 1e-10;  // tolerance of the method
6  real bisection(real a, real b, real f(real))
7  {
8    real fa = f(a);
9    real x  = 0.5*(a+b);
10   // if f(x) so small: x is the solution
11   if       ( abs(f(x)) < epsilon ){
12        return x;
13   }
14   else if  ( fa * f(x) > 0 ){
15     return bisection(x,b,f);
16   }
17   else {
18     return bisection(a,x,f);
19   }
20 }
21 real xx = bisection(0,0.5,myfunc);
22 write(xx);
```

Hàm *bisection* có ba tham số chính là $a, b$ và hàm $f(x)$, trong đó $a, b$ là số thực (`real` trong `Asymptote`). Còn $f(x)$ bản thân là một hàm với một tham số thực (là $x$) và trả lại một số thực nên ở line 6 chúng ta viết: `real f(real)`. Hàm *bisection* có kết quả là nghiệm của $f(x) = 0$, tức là một số thực nên ở line 6, chúng ta viết: `real bisection(...)`. Từ dòng 6-19 là toàn bộ hàm `bisection`. Tên hàm là do chúng ta tùy chọn. Tuy nhiên, cũng như đặt tên cho con cái, chúng ta nên chọn cái tên hay: tên hàm phải nói lên là hàm sẽ làm gì. Tương tự như vậy, tên biến (ví dụ biến *fa* ở dòng 8 trong mã 38.2) cũng phải chọn sao cho có nghĩa.

Chú ý rằng chương trình này chỉ cho ra một nghiệm trong đoạn $[a, b]$ thôi. Tuy còn hạn chế, nó đủ xài cho Eq. (38.5). Sau khi code xong chúng ta phải test hàm *bisection* ngay: dòng 20 và 21 làm chuyện đó. Ở dòng 20, chúng ta gọi hàm *bisection* với 3 đối số $a = 0$, $b = 0.5$ và $f$ là `myfunc` tức là Eq. (38.5). Chú ý rằng chúng ta đã code hàm này ở dòng 1–4. Ở dòng 21 hàm `write` viết $xx = 0.28659137$ ra màn hình cho chúng ta kiểm chứng. Kiểm chứng với cái gì? Chúng ta có thể vẽ $f(x)$ và xem $f(x) = 0$ ở đâu, chương trình `Desmos` rất tiện cho việc này[†]. Phương trình bậc

[**]Nếu $f(a) < 0$ và $f(b) > 0$ mà $f(x)$ liên tục thì chắc chắn nó phải có giá trị bằng 0 tại một điểm ở $[a, b]$.
[†]Link: https://www.desmos.com/calculator.

3 trong Eq. (38.5) có 2 nghiệm, nghiệm kia là $x = 0.775693$. (Một câu hỏi cho các bạn: làm sao dùng hàm `bisection` để tìm ra chú này?) Nghiệm $x = 0.775693$ này không cho chúng ta một hình vuông nào như $A_1B_1C_1D_1$ vì tung độ của $B_1$ sẽ âm!

Xin lưu ý rằng, vì phương pháp bisection rất tổng quát, chúng ta hoàn toàn có thể dùng nó cho phương trình bậc 4 ở Eq. (38.4), do đó bỏ qua bước đoán nghiệm $x = -1$ vv. Cho một người đang học toán, thì bước này rất quan trọng, do đó mình trình bày ở đây. Hàm *bisection* gọi chính nó, đây là kỹ thuật đệ quy. Trong toán học, chúng ta đã gặp điều này, ví dụ đơn giản nhất là giai thừa của một số nguyên dương $n$: $n! = n(n-1)!$

Cuối cùng, ta tìm $y$ tương ứng với $x$, sau đó xác định các điểm $A_1, B_1, C_1, D_1$ và vẽ hình vuông cần tìm. Mã 38.3 là chương trình làm những điều này (không hoàn chỉnh, nhưng chắc bạn đã hiểu ý chính). Chương trình cuối cùng thu được bằng cách gộp các phần nhỏ mã 38.1, mã 38.2 và mã 38.3 lại.

Như vậy một chương trình là một văn bản mà văn bản này là một tập hợp các hướng dẫn mà chúng ta cung cấp cho máy tính để thực hiện, giống như chúng ta đưa ra một công thức cho một đầu bếp làm theo để nấu một món ăn nào đó.

Nếu chú ý, các bạn sẽ thấy code của mình viết rất chăm chút, các dòng lệnh xếp ngay ngắn, rõ ràng, các dòng lệnh giống nhau được xếp vào chung một đoạn/khu (block). Làm chi vậy? Đối với trình biên dịch thì điều này không có ý nghĩa gì cả. Tuy nhiên viết code là cho con người đọc, như làm thơ vậy. Do đó, tiêu chí đầu tiên: code phải là đọc được.

Mã nguồn 38.3: Phần còn lại của chương trình `Asymptote`: vẽ hình vuông nhỏ $A_1B_1C_1D_1$.

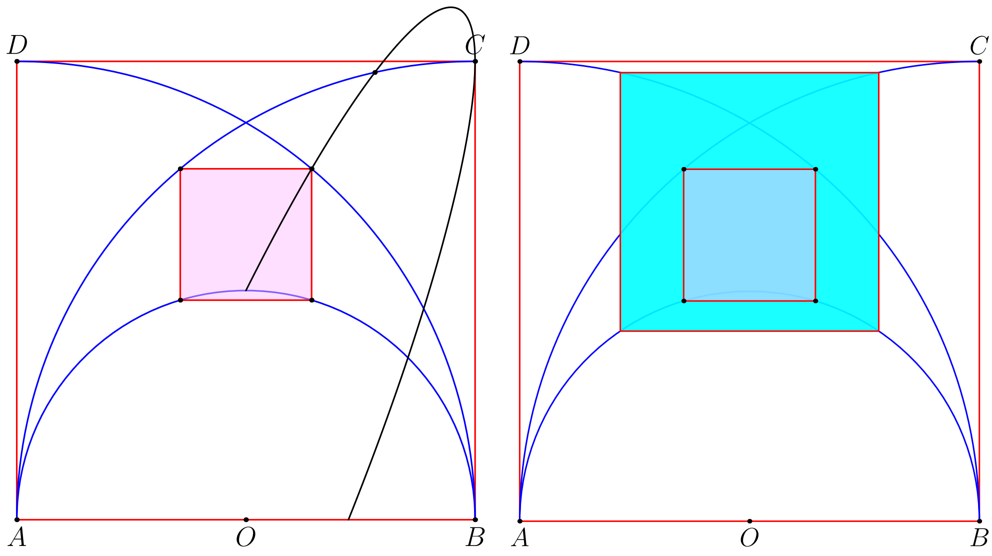
```
real yy = sqrt(4-(xx+1)^2);

pair A1 = (-xx,yy-2*xx);
pair B1 = ( xx,yy-2*xx);
pair C1 = ( xx,yy     );
pair D1 = (-xx,yy     );

filldraw(A1--B1--C1--D1--cycle, opacity(0.5)+pink ,p1);

dot(O); label("$O$", O,S); // draw a point at O, with a label below it
```

Có nhiều bạn sẽ dừng ở đây. Nhưng có nhiều bạn sẽ tiếp tục. Ví dụ, các bạn đó sẽ hỏi liệu có thêm hình vuông nào tương tự như $A_1B_1C_1D_1$ không? Câu trả lời dĩ nhiên là có thêm một. Tại sao? Chú ý rằng điểm $C_1$ nằm trên $(C_2)$. Chú $(C_3)$ sẽ bất bình vì bị bỏ rơi. Hình vuông cuối cùng là lúc $C_1$ nằm trên $(C_3)$. Đơn giản vậy thôi. Để kiểm chứng thì chúng ta có thể vẽ elip $x^2 + (y - 2x)^2 = 1$ (tức là phương trình 1 trong Eq. (38.2)); trên Hình 38.3a chúng ta thấy ngay điểm này. Và từ đó chúng ta sẽ có kết quả trên Hình 38.3b.

Mình nghĩ một cách để học lập trình cho các bạn thích Toán và lập trình là vẽ chính xác những hình trong một cuốn sách Toán nào đó dùng `Asymptote`. Ví dụ, các bạn có thể vẽ Hình 31.1. Cần chi `Pascal/C` và các ví dụ xa vời kia. Kết quả của mỗi bài tập là một hình vẽ, vừa đẹp vừa liên quan tới toán. Mình chia sẻ code của tất cả hình trong sách Toán mình viết ở trang `https://github.com/vinhphunguyen/maths_julia`. Tuy nhiên, các bạn phải thử làm đã, đừng nhìn code của người khác.

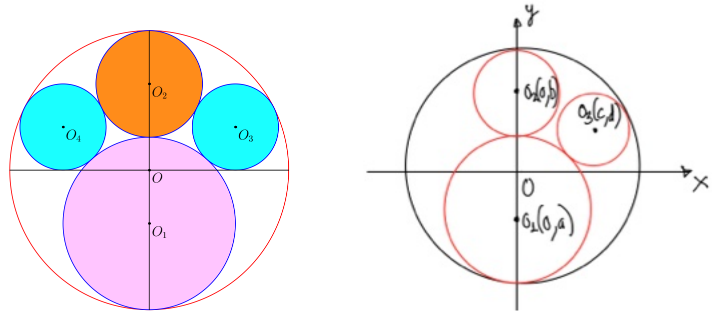
**Ví dụ 2**. Sau đây là một ví dụ khác lại lấy từ bạn Trần Quân trên nhóm faecebook *Vẽ hình học Tikz-Asymptote*. Đề bài như sau: cho hình tròn lớn tâm $O$, vẽ bốn hình tròn nhỏ trong đó hai hình tròn cạnh nhau tiếp xúc nhau (xem Hình 38.4a). Trước tiên chúng ta lại dùng hình học giải tích để giải, sau đó chúng ta sẽ thử dùng hình học Euclid. Đầu tiên chúng ta lập hệ trục tọa độ $Oxy$ như Hình 38.4b. Tọa độ của hình tròn màu hồng là $O_1 = (0, a)$ với $a < 0$, tọa độ của hình tròn màu da cam là $O_2 = (0, b)$ với $b > 0$, và cuối cùng tọa độ của hình tròn màu xanh da trời bên phải là $O_3 = (c, d)$ với $c, d > 0$. Do tính đối xứng chúng ta không cần quan tâm tới hình tròn còn lại, tọa độ tâm của nó phải là $(-c, d)$.

Rõ ràng là để giải bài này chúng ta phải biết lúc nào thì hai hình tròn tiếp xúc nhau: lúc khoảng cách giữa hai tâm của chúng bằng tổng hai bán kính. Và khoảng cách giữa hai điểm



(a) (b)

Hình 38.3



(a) (b)

Hình 38.4

$(x_1, y_1)$ và $(x_2, y_2)$ là $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$; cái này không là gì khác mà chính là định lý Pythagore. Vì bán kính của hình tròn cho sẵn có thể là bất cứ số thực dương nào, chúng ta chọn nó bằng một. Chúng ta sẽ có bốn phương trình cho bốn ẩn số $a, b, c, d$; mỗi phương trình thu được từ việc hai hình tròn cạnh nhau thì tiếp xúc:

$$b - a = 1 \tag{38.6}$$
$$\sqrt{c^2 + (d - a)^2} = (1 + a) + d \tag{38.7}$$
$$\sqrt{c^2 + (d - b)^2} = (1 - b) + d \tag{38.8}$$
$$\sqrt{c^2 + d^2} = 1 - d \tag{38.9}$$

Chẳng hạn, phương trình cuối là do hình tròn tâm $O_3$ tiếp xúc hình tròn lớn cho sẵn. Wow, bốn phương trình bốn ẩn! Có khó không? Dĩ nhiên! Nhưng *Gian nan tỏ mặt anh hùng*. Phính này hơn 40 còn làm được huống chi các bạn anh hùng tuổi trẻ. Đại văn hào Nga Maxim Gorky đã từng nói: *Khi mọi thứ đều dễ dàng, người ta nhanh chóng trở nên ngu ngốc*. Do đó, không việc gì phải sợ các bài khó. Nào, bây giờ chúng ta hãy giải chúng với cách đơn giản nhất: phương trình nào có căn thì bình phương hai vế, chúng ta sẽ thu được:

$$b - a = 1 \tag{38.10}$$
$$c^2 - 4ad = 2a + 2d + 1 \tag{38.11}$$
$$c^2 = 2d - 2b + 1 \tag{38.12}$$
$$c^2 = 1 - 2d \tag{38.13}$$

Từ Eqs. (38.12) and (38.13) chúng ta sẽ có: $b = 2d$ (hay $d = 0.5b$) và $c^2 = 1 - b$. Ta thay chúng vào Eq. (38.11), sẽ có: $1 - b - 2ab = 2a + b + 1$. Chúng ta đã loại bỏ $c, d$, và cuộc chơi giờ chỉ còn lại $a, b$:

$$b - a = 1 \tag{38.14}$$
$$1 - b - 2ab = 2a + b + 1 \tag{38.15}$$

Hệ này thì không khó tí nào: từ Eq. (38.14) sẽ có $b = 1 + a$, thay nó vào Eq. (38.15), ta có phương trình bậc hai

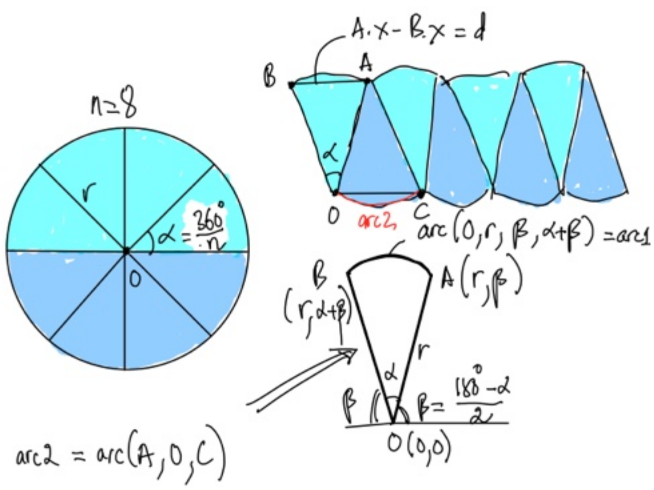
$$a^2 + 3a + 1 = 0 \Longrightarrow a = \frac{\sqrt{5} - 3}{2} \tag{38.16}$$

Chú ý rằng $a < 0$. Có $a$ sẽ có $b = 1 + a = 0.5(\sqrt{5} - 1)$, rồi $d = 0.25(\sqrt{5} - 1)$ và cuối cùng là $c^2 = 0.5(\sqrt{5} - 1)$. Phần lập trình Asymptote thì đơn giản: xem mã 38.4.

Mã nguồn 38.4: Chương trình Asymptote: vẽ Hình 38.4a.

```
real a = 0.5*(sqrt(5)-3);
real b = 1 + a;
real c = sqrt(1-b);
real d = 0.5b;

pair O  = (0,0); pair O1 = (0,a); pair O2 = (0,b);
pair O3 = (c,d); pair O4 = (-c,d);

draw(Circle(O,1),p1); // draw a circle centered at O, radius=1
filldraw(Circle(O1,1+a),opacity(0.9)+pink, p2);
```

**Ví dụ 3**. Ở ví dụ này chúng ta sẽ vẽ Hình 31.1. Trước tiên chúng ta chỉ xét trường hợp $n = 8$ (tức là chia hình tròn thành 8 phần bằng nhau). Vẽ được trường hợp này rồi thì có thể vẽ cho bất kỳ $n$ nào. Lấy giấy bút ra và chúng ta sẽ vẽ bằng tay Hình 38.5. Rõ ràng là nếu chúng ta có thể vẽ được nêm $OAB$ và nêm $AOC$ thì những nêm khác sẽ không khó (sao chép từ 2 nêm $OAB$ và $AOC$ mà thôi).




Hình 38.5: Phân tích trước khi viết code.

Để vẽ hai hình nêm này chúng ta cần tọa độ của các điểm $O, A, B$ và $C$. Chọn gốc tọa độ ở $O$ nên ta có $O = (0, 0)$. Tọa độ của $A$ là, trong hệ tọa độ cực, $(r, \beta)$ và của $B$ là $(r, \alpha + \beta)$. Tọa độ của $C$ là (tọa độ Descrates) $(d, 0)$ với $d = A.x - B.x$, trong đó $A.x$ có nghĩa là hoành độ của điểm $A$.

Tiếp theo ta cần tạo cung $AB$ và $OC$. Điều này tương đối dễ dàng vì Asymptote có lệnh arc vẽ cung tròn qua ba điểm. Chương trình sẽ như trình bày ở mã 38.5.

Mã nguồn 38.5: Chương trình `Asymptote`: vẽ Hình 31.1.

```
import graph; import geometry;
size(8cm, 8cm, keepAspect=true);

int  n     = 8;                  // 8 parts
real r     = 1;                  // radius of the circle
real alpha = 360/n;              // angle alpha
real beta  = 0.5*(180-alpha);    // angle beta

pair O = (0,0);                  // Cartesian coords
pair A = r*dir(beta);            // polar coords
pair B = r*dir(alpha+beta);      // polar coords
real d = A.x-B.x;
pair C = (d,0);                  // Cartesian coords

path arc1 = arc(O,A,B);
path arc2 = arc(A,O,C);
```

Tiếp theo chúng ta sẽ gộp đoạn thẳng $OA$, $OB$ và cung $AB$ lại thành một đối tượng duy nhất tạm gọi là nêm $OAB$ (để có thể sao chép một cách dễ dàng). Trong `Asymptote`, chúng ta làm như sau:

```
path upper_wedge = O--A--arc1--cycle;
path lower_wedge = A--O--arc2--cycle;
```

Ở bước cuối cùng chúng ta sao chép nêm $OAB$ bốn lần, và nêm $OAC$ cũng bốn lần. Chúng ta sẽ dùng lệnh `for` cho việc có tính chất lặp lại này; trong vòng lặp `for` thì biến $i$ sẽ lần lượt có các giá trị: $0, 1, 2, 3$[†]–bốn giá trị tương ứng cho bốn lần sao chép. Việc sao chép được thực hiện bằng lệnh `shift`–là phép tịnh tiến. Ở đây mỗi hình nêm sẽ tịnh tiến một đoạn $i \times d$ dọc theo phương $x$. Sau khi đã sao chép một `path` thì chúng ta vẽ và tô màu nó bằng lệnh `filldraw`. Code cho phần này được trình bày ở mã 38.6.

Mã nguồn 38.6: Chương trình `Asymptote`: vẽ Hình 31.1.

```
path upper_wedge = O--A--arc1--cycle;
path lower_wedge = A--O--arc2--cycle;

for(int i=0; i<n/2; ++i)
{
   filldraw(shift(i*d,0)*upper_wedge,pink  );
   filldraw(shift(i*d,0)*lower_wedge,yellow);
}
```

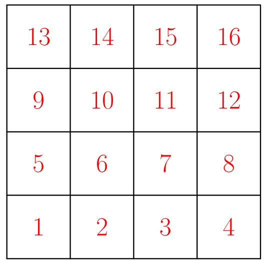
Dĩ nhiên code này chưa phải là code tốt nhất; theo nghĩa là code này còn dài. Chúng ta có thể chỉ cần một nêm $OAB$ thôi, các nêm còn lại có thể sao chép từ nó bằng tổ hợp phép tịnh tiến và phép quay (lệnh `rotate`):

Mã nguồn 38.7: Chương trình `Asymptote`: vẽ Hình 31.1.

```
pen mpen;
for(int i=0; i<n; ++i){
  if(i%2==0){mpen=pink;}else{mpen=yellow;}       // select pen color
  filldraw(shift(i*r*sin(pi/n),(i%2)*r*cos(pi/n))
          *rotate((i%2)*180)*p,mpen);
}
```

Code này thì ngắn gọn, nhưng mà đọc thì khó hiểu hơn (chưa nói việc code nào nhanh hơn). Theo thiển ý của mình, trừ khi bạn thành cao thủ, còn không cứ viết code dễ hiểu, dài một chút không sao. Mình không giải thích mã 38.7 rõ ràng, vì đây chỉ là giới thiệu về `Asymptote` thôi.

[†]Nếu bạn đang thắc mắc sao không phải là $1, 2, 3, 4$ thì câu trả lời ngắn gọn là: thói quen thôi. Bạn có thể dùng $1, 2, 3, 4$. Câu trả lời dài liên quan tới mảng.




**Ví dụ 4**. Ví dụ này yêu cầu các bạn vẽ cái lưới với các con số như trong hình bên cạnh. Qua bài này các bạn sẽ gặp vòng lặp for lồng trong một vòng lặp for khác, gọi là vòng lặp lồng (*nested loops*). Sau này lúc học đại số tuyến tính với ma trận thì các bạn sẽ gặp những vòng lặp lồng như vậy thường xuyên. Trước tiên, chúng ta vẽ cái lưới; cách vẽ như cách con nít hay vẽ trên cát: vẽ các đường ngang, xong vẽ các đường dọc. Code trong mã 38.8. Chú ý là code này tương đối tổng quát theo nghĩa là nó có thể vẽ lưới hình chữ nhật $lx \times ly$, và góc dưới bên trái của lưới có thể là bất cứ điểm nào trong mặt phẳng Descartes.

Mã nguồn 38.8: Chương trình `Asymptote`: vẽ lưới.

```
void draw_grid(pair A, real lx, real ly, int nx, int ny, pen p)
{
  real dx = lx/nx; real dy = ly/ny;
  for(int i = 0; i < ny+1; ++i){       // draw horizontal lines
    pair p1 = (A.x,    A.y+i*dy);
    pair p2 = (A.x+lx, A.y+i*dy);
    draw(p1--p2,p);
  }
  for(int i = 0; i < nx+1; ++i){       // draw vertical lines
    pair p1 = (A.x+i*dx, A.y   );
    pair p2 = (A.x+i*dx, A.y+ly);
    draw(p1--p2,p);
  }
}
draw_grid((0,0),4,4,4,4,black+1.4pt);
```

Code vẽ các con số được cho trong mã 38.9. Chúng ta sẽ vẽ theo từng hàng (*row*) một, và trong mỗi hàng thì sẽ vẽ theo từng cột (*row*). Ví dụ, cho hàng 1 (từ dưới lên) thì $i = 0$, vòng lặp với $j$ ta sẽ có $j = 0$, vẽ số 1 tức là `num`, tăng `num` lên 1 (để thành 2), sau đó lặp lại với $j = 1$, rồi $j = 2$, cuối cùng với $j = 3$. Hết hàng 1, ta lại sang hàng 2 ($i = 2$), và làm tương tự. Chú ý: hàm `label` chỉ chấp nhận đối số đầu tiên là chuỗi kí tự, trong khi `num` là một số nguyên $(1, 2, 3, \ldots)$, nên chúng ta phải dùng hàm `string` để ép nó thành chuỗi kí tự. Sau khi làm bài này thì các bạn có thể vẽ một bàn cờ vua như Hình 39.2a.

Mã nguồn 38.9: Chương trình `Asymptote`: vẽ các con số.

```
void draw_grid(pair A, real lx, real ly, int nx, int ny, pen p)
{
  ...
  int num = 1;                   // num = 1 at beginning
  for(int i = 0; i < ny; ++i)    // loop over rows
  {
    for(int j = 0; j < nx; ++j)  // loop over columns
    {
      label(string(num),(.5*dx + j*dx,.5*dy + i*dy ),red);
      num += 1;                  // increase by one
    }
  }
}
```

Hồi sinh viên ở BK thì mình dĩ nhiên dùng `AutoCAD` để vẽ; rất dễ, chỉ dùng chuột, không coding gì cả. Lúc viết luận văn thạc sỹ (bằng LaTeX) thì rất bất tiện vì hình vẽ trong `AutoCAD` không xuất ra PDF được. Khi làm NCS ở TU Delft thì vì là dùng máy tính chạy trên hệ điều hành Ubuntu nên mình dùng `Inkscape`; cũng là dùng chuột, nhưng đây là phần mềm vẽ đồ họa vector nên hình ảnh rất đẹp. Sau đó, khi làm hậu TS ở Cardiff thì mình bắt chước một chú người Scotland: dùng `Adobe Illustrator`. Đó là năm 2013 và mình mê `Adobe Illustrator` từ đó cho đến 2020. Vì Covid nên trường mình làm việc cắt giảm ngân sách: không mua `Adobe`

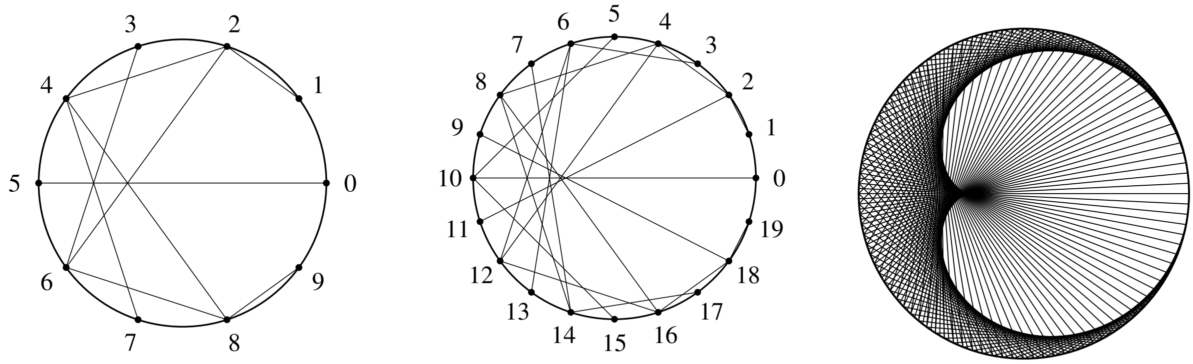
`Illustrator` cho nhân viên nữa. Mình đành quay lại dùng `Inkscape` nhưng không thích vì đã quen với `Adobe Illustrator`. Cũng không sao vì mình có Tushar vẽ rồi, và chú này chưa biết mùi `Adobe Illustrator` nên vẫn dùng `Inkscape`.

Thời gian Covid (2020-2022) là lúc mình viết quyển sách Toán. Lúc đầu mình vẽ tay (dùng iPad), vì vẽ như vậy sẽ nhanh, mà cũng vì mình đã mất vũ khí `Adobe Illustrator`. Rồi vì lí do mình đã trình bày ở đầu quyển sách này, mình lên Facebook chém gió, và tình cờ gặp nhóm *Vẽ hình học Tikz-Asymptote* của anh Lê Huy Tiễn–giảng viên Toán Đại Học Quốc Gia Hà Nội. Mình thấy hình vẽ dùng `Tikz` hay `Asymptote` rất đẹp, tuyệt đẹp mới đúng. Hơn nữa có một bạn tên Trần Quân comment rằng sách Toán mình viết nhiều hình vẽ tay quá (ngụ ý là xấu). Cái comment này không ngờ nó lẫn quẩn trong đầu mình, mà mình không hay biết.

Rồi một hôm tháng 11 năm 2022 mình quyết định sẽ học `Asymptote`. Có lẽ comment của Trần Quân là một lí do, cũng có lẽ các nhà Toán học (hay người thích Toán) hay dùng `Asymptote`, mà mình thì hay bắt chước những người mình hâm mộ. Kết quả là mình đã vẽ lại gần 200 hình trong sách Toán dùng `Asymptote`.

`Adobe Illustrator` hay `Asymptote`? Nếu vẽ được bằng `Asymptote` mình sẽ dùng nó. Tại vì dùng cái sau sẽ phải suy nghĩ, và mình cần suy nghĩ để tập thể dục cho cái não. Dùng `Adobe Illustrator` thì phải dùng con chuột, chỉ mỏi tay.

**Ví dụ 5.** Ví dụ này không đơn thuần là một bài về lập trình; nó là một minh chứng dễ hiểu cho thấy sự liên hệ giữa các nhánh toán học khác nhau. Ai trong chúng ta đều biết bảng cửu chương; con trai mình cũng đang học cái món này lúc mình đang gõ những dòng này. Chúng ta đều biết rằng $2 \times 1 = 2$, $2 \times 2 = 4$, $2 \times 3 = 6$ và cứ thế tiếp tục. Hãy mô tả điều này theo hình học và một hình trái tim sẽ xuất hiện! Bắt đầu với một đường tròn (bất kỳ bán kính nào) và đánh dấu một số điểm (được chỉ định bằng ký hiệu $N$) trên đường tròn, sao cho các điểm này nằm cách đều nhau quanh đường tròn, và đánh số chúng theo thứ tự từ số 0: $0, 1, 2, \dots, N-1$. Sau đó, cho mỗi $n$, vẽ một đoạn thẳng nối các điểm $n$ và $2n$ mod $N$. Ví dụ, với $N = 10$, nối 1 với 2, 2 với 4, 3 với 6, 4 với 8, 5 với 0 (giống như kim đồng hồ: sau 12 giờ, kim giờ quay trở lại vị trí ban đầu), 6 với 2, 7 với 4, 8 với 6, 9 với 8. Hình 38.6 là kết quả cho $N = 10, 20, 200$, tương ứng. Phần bọc của những đoạn thẳng này tạo thành một hình trái tim, đặc biệt là khi $N$ lớn (Hình 38.6c). Ôi, không thể tin được! Nếu bạn thích lập trình thì hãy viết một chương trình vẽ Hình 38.6; thậm chí làm cả hình ảnh động.

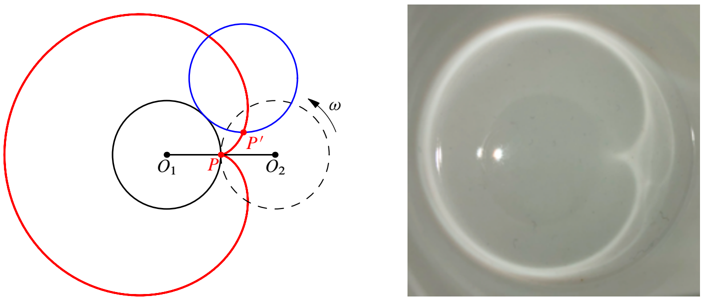


(a) $N = 10$ (b) $N = 20$ (c) $N = 200$

Hình 38.6: Một hình trái tim xuất hiện từ bảng cửu chương của số hai khi $N$ lớn.

Giờ thì hãy quên bảng cửu chương đi và chúng ta hãy chơi với các đường tròn. Đây là trò chơi và câu hỏi: quay một đường tròn, mà trên đó có một điểm được đánh dấu, xung quanh một đường tròn khác có cùng bán kính, điểm này sẽ tạo ra một đường cong.Trong Hình 38.7a, chúng ta quay đường tròn nét đứt xung quanh đường tròn đen, và chúng ta theo dõi điểm $P$, điểm này tạo ra một đường cong hình trái tim tuyệt đẹp, được gọi là hình trái tim (*cardioid*).

Nếu như chừng đó là chưa đủ làm bạn hưng phấn. Bạn đã chuẩn bị cà phê chưa? Bật đèn pin của điện thoại và chiếu sáng vào cốc từ phía bên. Ánh sáng phản xạ từ các bên của cốc và tạo ra một đường caustic trên bề mặt của cà phê. Đường caustic này là một hình trái tim (Hình 38.7b). Thật thú vị, phải không?




(a) $P$ tạo ra hình trái tim (b)

Hình 38.7: Hình trái tim xuất hiện trong hình học và trong ly cà phê của bạn.

**Ví dụ 6.** Ở Chương 31 chúng ta có một bài toán về dãy số như sau: Một dãy số được định nghĩa bởi $D_0 = 0$, $D_1 = 0$, $D_2 = 1$, và $D_n = D_{n-1} + D_{n-3}$ cho $n \geq 3$. Hãy xác định tính chẵn lẻ của ba số $(D_{2021}, D_{2022}, D_{2023})$. Bây giờ, ta sẽ giải bài này, dùng máy tính, bằng cách tính trực tiếp $D_{2021}$. Mình sẽ dùng ngôn ngữ `Julia`. Rõ ràng $D_n = D_{n-1} + D_{n-3}$ là một công thức đệ quy, và ta đã biết cách lập trình hàm đệ quy rồi. Mã 38.10 là chương trình; chạy cho $D_{10}$ thì kết quả đúng, nhưng mà khi chạy cho $D_{2021}$ thì đứng máy luôn!

Mã nguồn 38.10: Chương trình `Julia`: $D_0 = 0$, $D_1 = 0$, $D_2 = 1$, và $D_n = D_{n-1} + D_{n-3}$ cho $n \geq 3$.

```
function my_sequence1(n::Int)
  if n <= 2                     # n = 0, 1, 2
    return n == 2 ? 1 : 0       # n = 2 => 1
  else
    return my_sequence1(n-1) + my_sequence1(n-3);
  end
end
```

Chương trình này chậm là vì nó tính toán lại các giá trị giống nhau nhiều lần. Để làm cho nó nhanh hơn, ta có thể sử dụng việc ghi nhớ (memoization) để lưu trữ các giá trị đã tính toán trước đó và tránh tính toán trùng lặp. Mã 38.12 là chương trình cải thiện, trong đó ta thêm một biến gọi là `cache` để chứa các số đã tính. Ban đầu `cache` là một mảng chứa $n$ số 0 (để ám chỉ là chưa tính), sau khi ta đã tính được một $D_k$, ta lưu nó ngay vào `cache[k]`. Sau này, khi cần $D_k$, ta không cần tính lại, mà lấy từ `cache`.

Mã nguồn 38.11: Chương trình `Julia`: $D_0 = 0$, $D_1 = 0$, $D_2 = 1$, và $D_n = D_{n-1} + D_{n-3}$ cho $n \geq 3$.

```
function my_sequence(n::Int, cache::Vector{BigInt})
    if n <= 2
        return n == 2 ? 1 : 0
    elseif n <= length(cache) && cache[n] != 0
        return cache[n]
    else
        result   = BigInt(my_sequence(n - 1, cache) + my_sequence(n - 3, cache))
        cache[n] = result
        return result
    end
end

function compute_my_sequence(n::Int)
    cache = zeros(BigInt, n)
    return my_sequence(n, cache)
end
```

Và kết quả của $D_{2021}$ (có khoảng hơn 60 chữ số!) là: 9002963773863334333...2240578. Đúng là số chẵn như ta đã dùng logic tìm ra. Mà tại sao ta phải tính ngược (tức là $D_7 = D_6 + D_4$ rồi

$D_6 = D_5 + D_3$ cho tới $D_0 = D_1 = 0$), ta có thể tính xuôi như tính tay, và mã 38.12 là một chương trình như vậy.

Mã nguồn 38.12: Chương trình Julia: $D_0 = 0$, $D_1 = 0$, $D_2 = 1$, và $D_n = D_{n-1} + D_{n-3}$ cho $n \geq 3$.

```
function my_sequence2(n::Int)
  res     = zeros(BigInt, n)
  res[1] = 0, res[2] = 0, res[3] = 1
  for i=4:n
    res[i] = res[i-1] + res[i-3]
  end
  return res[n]
end
```

Giờ thì mình muốn nói về một công cụ rất quan trọng cho những người lập trình: `git`. Tất cả code mình viết đều để trên `github`. Làm như vậy có nhiều điều lợi: (1) mình có thêm một backup miễn phí, (2) mình không cần mang kè kè cái laptop khi đi làm; ở nơi làm việc mình có một máy tính, ở nhà mình có một máy tính; vì code của mình luôn ở trên `github` khi nào cần nó mình chỉ việc `ggpull` (nghĩa là kéo code từ trên `github` xuống máy tính mình đang có), (3) chia sẻ code với mọi người (chỉ việc cho họ cái link), (4) viết code chung với ai đó và cuối cùng (5) quản lý mã nguồn (*version control*); ví dụ chúng ta thêm gì vào code và nó không còn chạy như trước nữa, với `git` chúng ta có thể quay lại với phiên bản trước đó.

Trong phần cuối cùng của chương này, mình xin giới thiệu một số sách dạy lập trình. Hồi làm luận văn thạc sỹ thì mình mua cuốn *Lập trình hướng đối tượng với C++* của tác giả Nguyễn Thanh Thủy (hình như giảng viên Đại học Bách Khoa Hà Nội). Hồi đó mình chưa biết gì về `C++` nhưng thấy quyển này đọc dễ hiểu. Sau khi qua Hà Lan, vì có tiền mình mua rất nhiều sách `C++`, giờ không thể nhớ quyển nào là chất lượng. Bây giờ thì mình thấy mấy quyển sách sau rất tốt:

- *Think Like a Programmer: An Introduction to Creative Problem Solving* của V. Anton Spraul (Spraul, 2012),
- *Programming: Principles and Practice Using C++*, của Bjarne Stroustrup, cha đẻ của `C++`, (Stroustrup, 2009)

Vậy đọc xong hai cuốn này tui có thành cao thủ lập trình không? Stroustrup có câu trả lời nè, trong cuốn sách kể trên, ông viết: "Khi kết thúc cuốn sách này, bạn sẽ trở thành chuyên gia lập trình và C++ chứ? Dĩ nhiên là không!"

Ngày 3 tháng 10 năm 2022

# Chương 39

# Bàn về kỹ năng giải quyết vấn đề

CHƯƠNG trước bàn về lập trình và một kỹ năng quan trọng trong lập trình là cách giải quyết vấn đề. Mình chưa hề học qua một lớp nào về vấn đề này, mình học được một số cách giải quyết vấn đề khi giải Toán. Chỉ vậy thôi. Đã viết thì viết cho nó coi được một tí nên mình mạnh dạn viết về đề tài này. Thông qua chương này, mình chỉ muốn nhấn mạnh tầm trọng của kỹ năng giải quyết vấn đề cho công việc sau này, và các bạn trẻ nên chú ý đến các kỹ năng này.

Mà giải quyết các vấn đề chi rứa Phính? Môi trường à? Hay kẹt xe ở Sài Gòn? Không, tài cán chỉ có nhiêu làm gì có khả năng đó. Ở đây, vì đối tượng chính của mình vẫn luôn là các bạn trẻ (học sinh cấp 2/3 và sinh viên) nên mình sẽ dùng các câu đố tìm được trên mạng hay trong sách. Thông qua việc giải các câu đố này mình trình bày một số cách thức tiếp cận một vấn đề.

Trước khi bắt đầu các bạn trẻ nên nhớ những gì George Pólya đã nói:

> *Giải quyết vấn đề là một kỹ năng thực tiễn, giống như biết bơi lội. Chúng ta học được bất kỳ kỹ năng thực tiễn nào thông qua việc bắt chước và luyện tập.*

Không nhất thiết phải thông minh mới làm được.

## 39.1 Con cáo, con ngỗng và bắp ngô

Vấn đề cổ điển đầu tiên chúng ta sẽ thảo luận là một câu đố về một người nông dân cần vượt qua một con sông. Hồi nhỏ đã có ai đó đố mình bài này hay mình đọc ở đâu đó, mình suy nghĩ trong vòng khoảng 10 phút, không tìm ra lời giải và mình give up: bài này làm để làm chi, mình suy nghĩ như vậy! Đó là một điều rất đáng tiếc trong đời mình. Làm để rèn luyện cái não, và đó là một điều rất quan trọng.

Vấn đề như sau.

Một người nông dân mang theo một con cáo, một con ngỗng và một túi ngô cần đi qua một con sông. Người nông dân có một chiếc thuyền nhỏ, nhưng chỉ đủ chỗ cho người nông dân và một trong ba món đồ của ông ta. Thật không may, cả con cáo và con ngỗng đều đói. Con cáo không thể được để một mình với con ngỗng, nếu không con cáo sẽ ăn thịt con ngỗng. Tương tự, con ngỗng không thể được để một mình với túi ngô, nếu không con ngỗng sẽ ăn ngô. Làm thế nào để người nông dân có thể đưa mọi thứ qua sông?

Nếu bạn giải được ngay, xin chúc mừng: bạn có tiềm năng. Nếu bạn không giải được ngay, bạn là bông hoa nở muộn, không có chi lo lắng, hoa sẽ nở, cứ giải nó trong vài ngày, hay trong vài tháng. Đây không phải là bài tập về nhà, không có gì phải vội. Quan trọng là không xem lời giải, nhất quyết không!

Suy nghĩ đầu tiên nên là thế này: chúng ta có ba đồ vật, mà thuyền chỉ cho phép một đồ vật thôi nên chắc chắn là người nông dân phải đi nhiều chuyến. Tiếp theo câu hỏi đặt ra là: chuyến đầu tiên ông chở cái gì? Ở đây vì chỉ có ba đồ vật–một con số rất nhỏ–chúng ta dùng ngay *phương pháp loại trừ*: thử từng đồ vật, xem thứ nào ok. Chúng ta có ba trường hợp như sau:

- Trường hợp 1: Giả sử bác nông dân chở bắp ngô trước, trên bờ gần (bờ sông lúc người nông dân mới đến) như vậy có con cáo và con ngỗng, và con ngỗng sẽ ra đi ngay. Lựa chọn này vì vậy bị loại.

- Trường hợp 2: Giả sử bác nông dân chở con cáo trước, trên bờ gần như vậy có con ngỗng và bắp ngô, và con ngỗng sẽ ăn ngô ngay. Lựa chọn này vì vậy cũng bị loại.

- Trường hợp 3: bác nông dân chở con ngỗng trước, trên bờ gần như vậy có con cáo và ngô. Lựa chọn này ok vì con cáo không thèm ăn ngô.

Vạn sự khởi đầu nan mà chúng ta đã xong bước thứ nhất rồi, tiến lên thôi. Cứ xài phương pháp loại trừ có chi mô. Sau khi để con ngỗng ở bờ xa (bờ bên kia), bác chèo thuyền lại cho chuyến thứ hai. Giờ chỉ có 2 hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Giả sử bác nông dân chở bắp ngô, bỏ ngô lại và quay về đón con cáo, trên bờ xa như vậy có ngô và con ngỗng. Con ngỗng sẽ vui mừng và ăn ngô ngay. Lựa chọn này vì vậy bị loại.

- Trường hợp 2: Giả sử bác nông dân chở con cáo, bỏ nó lại và quay về. Trên bờ xa như vậy có con ngỗng và cáo, và con ngỗng sẽ bị ăn thịt ngay. Lựa chọn này vì vậy cũng bị loại.

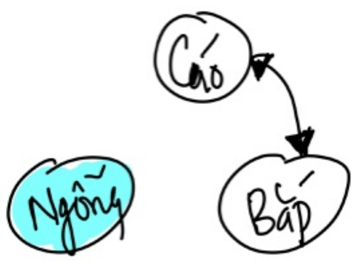
Ôi, hai trường hợp đều không thể. Điều đó có nghĩa gì? Có nghĩa là, bác nông dân lúc chèo lại về bờ gần (để làm chuyến thứ ba) thì không thể đi một mình; bác phải chở một thứ về cùng. Chúng ta lại xét các trường hợp:

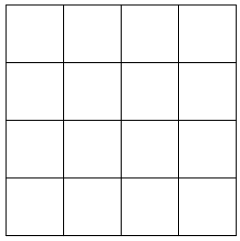
- Trường hợp 1: Giả sử bác nông dân chở bắp ngô, bỏ ngô lại và mang con ngỗng quay về đón con cáo. Trên bờ gần, bác bỏ con ngỗng trên bờ, mang con cáo sang bờ xa. Ở đó có ngô và con cáo; không có vấn đề gì. Cuối cùng, bác quay lại và mang con ngỗng sang. Vấn đề giải xong.

- Trường hợp 2: Giả sử bác nông dân chở con cáo, bỏ nó lại và quay về với con ngỗng. Trên bờ gần bỏ con ngỗng trên bờ, mang ngô sang bờ xa. Ở đó có ngô và con cáo; không có vấn đề gì. Cuối cùng, bác quay lại và mang con ngỗng sang Vấn đề cũng giải xong.

Như vậy, bài này này khó vì hầu hết mọi người không bao giờ nghĩ đến việc đem một trong ba thứ (ngỗng, cáo, ngô) từ bờ xa trở về bờ gần! Điều này minh họa một nguyên tắc quan trọng trong việc giải quyết vấn đề: *Nếu bạn không nhận ra được tất cả những hành động có thể thực hiện, bạn có thể không thể giải quyết vấn đề.*

Nếu bạn là một người suy nghĩ bằng hình ảnh thì lời giải cũng có thể tìm ra như sau. Hãy vẽ 3 hình tròn ở các đỉnh của một tam giác, mỗi hình tròn ứng với một thứ. Sau đó ta vẽ một mũi tên kết nối hình tròn chứa cáo và hình chứa bắp; vì hai thứ này sống chung với nhau được. Trong hình bên cạnh, rõ ràng là lòi ra con ngỗng phải cho đi chuyến đầu tiên, vì nó không chơi với ai cả. Và sau đó, con ngỗng phải đi theo bác nông dân lúc bác quay lại cho chuyến thứ ba, đơn giản vì nó chỉ chơi được với bác nông dân thôi.





Tại sao lúc nhỏ mình không nhìn ra bước quan trọng trong việc giải bài này: chở một cái gì đó khi chèo về lại bờ gần (chứ không phải đi một mình)? Rứa mà cũng hỏi, thì xì tu pít chứ còn chi nữa. Cũng chưa hẳn là vậy, không cẩn thận, không chú ý đủ sâu có lẽ đúng hơn. Ví dụ đối với câu hỏi “hình bên có bao nhiều hình vuông”, nhiều người sẽ trả lời 16; họ không xì tu pít, họ chỉ trả lời vội vàng, không quan sát kỹ. Con số đúng phải là 30: ngoài 16 hình vuông đơn lẻ, còn có chín hình vuông $2 \times 2$, bốn hình vuông $3 \times 3$ và một hình vuông lớn $4 \times 4$, làm tổng cộng là ba mươi hình vuông. Nhân vật Sherlock Holmes có thể dạy cho chúng ta điều này. Trong truyện *A scandal in Bohemia* của Arthur Conan Doyle (1859–1930), Holmes hỏi Watson có bao nhiêu bước thang dẫn lên căn hộ Baker Street của họ. Mặc dù Watson đã đi lên cầu thang hàng trăm lần, nhưng anh ta không biết. Sherlock biết: có mười bảy bước. Do đó, xin nhớ rằng nhìn và quan sát là hai điều hoàn toàn khác nhau.

(Mà nè, Phính, làm sao chúng ta có thể tin vào Holmes một nhân vật hư cấu? Xin thưa, Doyle có bằng cử nhân Y khoa và Thạc sĩ Phẫu thuật từ Đại học danh giá Edinburgh (Scotland). Hơn nữa, Holmes được mô phỏng một phần dựa trên giáo sư đại học trước đây của Doyle, bác sĩ Joseph Bell, một bác sĩ phẫu thuật nổi tiếng với khả năng quan sát tỉ mỉ. Nếu bạn còn nghi ngờ, xin tìm hiểu về George Edalji, xem Conan Doyle làm sao cứu ông này.)

Quay lại bài toán cáo, ngỗng và ngô, ở đây chúng ta có thể dùng một khái niệm trong Toán học để tìm ra bước quan trọng này: tính đối xứng. Tại sao phải phân biệt bờ gần và bờ xa ? Chúng như nhau cả: do đó nếu từ bờ gần bác nông dân có thể chở một thứ gì đó, thì ở bờ bên kia bác cũng có thể làm như vậy.

Chúng ta có thể luyện tập để có một cái nhìn đa chiều về các sự vật. Sau đây mình gom góp một số câu đố (mà lời giải rất đơn giản, và có thể tìm trên mạng; mình không để lời giải ở đây đề phòng bạn nhìn chúng trước khi suy nghĩ đủ lâu) để các bạn làm.

**Tài xế Uber**. "Một tài xế Uber đang đi ngược chiều trên đường một chiều. Trong quá trình đi, anh ấy đi qua năm cảnh sát, nhưng không ai từng ngăn anh ta lại. Tại sao vậy?"

**Bốn người trong xe**. "Hai ông bố và hai người con trai đang ở trong một chiếc ô tô, tuy nhiên chỉ có ba người trong xe. Tại sao vậy?”

**Chiếu tướng**. "Hai người đang chơi cờ và cả hai đều thắng. Điều này đã xảy ra như thế nào?"

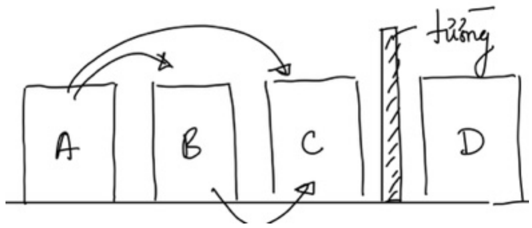
**Cái gì xuyên qua kính**. "Cái gì có thể đi qua kính mà không làm vỡ nó?"

Bài toán cây cầu và cây đèn lồng.

Bốn người đến một con sông vào ban đêm. Có một cây cầu hẹp, nhưng chỉ chứa được hai người một lúc. Họ chỉ có một cây đèn lồng và, vì là ban đêm, phải sử dụng đèn lồng khi băng qua cầu. Người A có thể băng qua cây cầu trong 1 phút, B trong 2 phút, C trong 5 phút và D trong 8 phút. Khi hai người cùng băng qua cây cầu, họ phải đi theo tốc độ của người chậm hơn. Câu hỏi là, liệu họ có thể vượt qua hết cây cầu nếu đèn lồng chỉ cháy trong vòng 15 phút?

## 39.2 Mũ của các tù nhân

Bốn tù nhân đang dọn dẹp một bãi biển bị rác như một phần của chương trình công việc tù nhân. Người cai ngục, người đang giám sát công việc, quyết định chơi một trò chơi nhỏ với những tù nhân này. Ông nói với họ rằng nếu họ thắng trò chơi, ông sẽ để họ tự do! Sau đó, ông chôn bốn phạm nhân đến cổ trong cát như được hiển thị trong Hình 39.1. Những tù nhân bị cố định trong đất và không thể xoay người để nhìn người phía sau. Người cai ngục cho họ thấy hai chiếc mũ màu đen và hai chiếc mũ màu trắng, sau đó đặt những chiếc mũ vào một cái túi để che giấu chúng. Sau đó, ông đứng phía sau mỗi phạm nhân, chọn một chiếc mũ từ túi và đặt lên đầu họ.




Hình 39.1: Giữa tù nhân $C$ và $D$ có một bức tường: họ không thấy nhau. Tù nhân $A$ có thể thấy tù nhân $B$ và $C$, tù nhân $B$ có thể thấy $C$. Ngoài ra, không ai có thể nhìn ngược lại.

Luật chơi đơn giản. Nếu bất kỳ tù nhân nào có thể đoán được màu sắc chiếc mũ trên đầu mình, cả bốn tù nhân sẽ được thả tự do. Nhưng họ phải chắc chắn, nếu một trong số họ đoán mò và sai, tất cả họ sẽ bị ở tù chung thân! Các tù nhân không được phép nói chuyện với nhau và họ có 10 giây.

Cai ngục đếm ngược "mười, chín, tám, bảy". Cả bốn tù nhân đều im lặng. Cai ngục cười, biết rằng ông đã đặt mũ sao cho không có tù nhân nào có thể biết được màu sắc của chiếc mũ trên đầu mình. Ông tiếp tục "sáu, năm, bốn, ba.."

"Tôi biết màu sắc chiếc mũ của mình!" một trong số tù nhân cuối cùng nói. Câu hỏi là: tù nhân nào đã lên tiếng và tại sao anh ta chắc chắn 100% về màu của chiếc mũ trên đầu mình?

Suy nghĩ đầu tiên là chúng ta sẽ liệt kê tất cả các trường hợp (ví dụ, tù nhân $A$ mũ đen, $B$ mũ trắng ...) và xem ai có khả năng chắc chắn nhất để đoán trúng mũ của mình. Đó là một chiến lược hợp lý. Tuy nhiên, các tù nhân chỉ có 10 giây nên họ phải dùng đầu óc một cách thông minh. Chú ý rằng tù nhân $A$ có thể thấy $B$ và $C$, do đó $A$ có nhiều khả năng đoán mũ của mình và của $D$. Vì vậy, chúng ta chỉ cần tập trung vào các khả năng cho $B$ và $C$: mũ của hai người này có chung màu (hoặc đen, hoặc trắng) hay mũ của họ khác màu. Như vậy có 4 khả năng như trình bày trong Bảng 39.1.

Bảng 39.1: Bốn khả năng xảy ra cho $B$ và $C$.

| Tù nhân | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| TH1 | Đen | Trắng | Trắng | Đen |
| TH2 | Trắng | Đen | Đen | Trắng |
| TH3 | Đen/Trắng | Trắng | Đen | Trắng/Đen |
| TH4 | Đen/Trắng | Đen | Trắng | Trắng/Đen |

Nhìn vào bảng này ta thấy trong hai trường hợp đầu tiên (khi mà $B$ và $C$ đội mũ cùng màu) $A$ có thể đoán ngay ra mũ của mình. Ví dụ, nếu $B$ đội mũ đen (và $C$ cũng vậy), nên còn lại 2 mũ trắng, do đó $A$ phải là đang mang mũ trắng. Tương tự, nếu $B/C$ đội mũ trắng thì $A$ đội mũ đen. Như vậy, nếu là TH1 hay TH2 thì $A$ sẽ lên tiếng ngay. Nhưng mà trong mô tả của bài toán thì phải gần hết giờ mới có người lên tiếng. Thế thì người này không phải là $A$ và trường hợp xảy ra là TH3 (hay TH4). Trong trường hợp này, thì $B$ và $C$ đội mũ khác màu nhau, mà $B$ thấy được $C$ nên $B$ là người lên tiếng trả lời: mũ của anh là trắng nếu $C$ mang mũ đen, hay $B$ mang mũ đen nếu ngược lại.

## 39.3 Người đàn ông bịt mắt và các đồng xu

Một người đàn ông bịt mắt ngồi trước một cái bàn với 20 đồng xu. Anh ta không biết sự sắp xếp của các đồng xu, chỉ biết rằng có mười đồng xu úp và mười đồng xu ngửa. Anh ta đang đeo một cặp găng tay và trong khi anh ta có thể cảm nhận được vị trí của các đồng xu, anh ta không thể cảm nhận được chúng là đồng xu úp hay đồng xu ngửa. Nhiệm vụ của anh ta là tạo ra hai nhóm đồng xu có cùng số đồng xu úp và đồng xu ngửa. Anh ta chỉ được di chuyển hoặc lật đồng xu. Làm thế nào anh ta có thể hoàn thành nhiệm vụ này (trong khi vẫn bị bịt mắt)?

Trước khi giải bài này thì chúng ta phải hiểu rõ yêu cầu của bài toán. Bài toán yêu cầu anh M chia 20 đồng xu thành 2 nhóm (việc này rất dễ, và M có thể làm với một tay). Cái khó là ràng buộc (lại là nó) rằng hai nhóm xu phải có cùng số xu ngửa (N) và số xu úp (U). Giả sử ta gọi $x$ là số xu ngửa trong nhóm 1 và $y$ là số xu úp trong nhóm 1, thì nhóm 2 cũng có chừng đó xu ngửa và xu úp. Tổng cộng hai nhóm có $(x+y)+(x+y)=2(x+y)$ xu, và số xu phải là 20 (anh M không có nhu cầu ăn xu), do đó[†]:

$$2(x+y)=20 \iff x+y=10$$

Như vậy trước hết M phải chia xu thành hai nhóm, mỗi nhóm có 10 xu: M làm được điều này vì anh có tay và biết đếm. Nhưng như vậy đã giải xong bài toán chưa? Thử là biết ngay: nhóm 1 có thể có 10 xu N, 0 xu U và như vậy nhóm 2 có 0 xu N, 10 xu U. Không thỏa mãn yêu cầu. Vậy M phải làm thêm gì đó. Đọc lại đề bài thì thấy M có thể lật đồng xu (tức là biến xu N thành U và ngược lại), và đó chính là lời giải. Giả sử nhóm 1 có $x$ xu N và $(10-x)$ xu U, thì nhóm 2 phải có $(10-x)$ xu N và $x$ xu U. Ta tóm tắt tình hình xu như sau:

$$\begin{array}{lll} & \text{Ngửa} & \text{Úp} \\ \text{Nhóm 1:} & x & 10-x \\ \text{Nhóm 2:} & 10-x & x \end{array} \tag{39.1}$$

Nhìn vào Eq. (39.1), ta thấy ngay điều mình muốn: muốn cho x trong nhóm 2 biến thành x trong nhóm 1. Và để làm điều đó ta chỉ việc lật tất cả các xu trong nhóm này. Sau khi làm vậy nhóm 2 sẽ có $x$ xu N và $(10-x)$ xu U.

## 39.4 Số lẻ

Có bốn số lẻ liên tiếp cọng lại thì được 152. Tìm số cuối cùng. Bài này mình lấy từ một quyển sách con đầu mình đang học. Nó làm được bài này nhưng bằng phương pháp thử và sai[††]. Phương pháp này tuy ok cho bài này, nhưng mà mình muốn giới thiệu phương pháp chính thống cho vui.

Thông tin quan trọng trong bài là số lẻ. Vậy thì chúng ta sẽ 'chơi' với các số lẻ như sau:

$$1,3,5,7,9,11,13,\dots \tag{39.2}$$

Đã gọi là chơi mà, chúng ta chọc các số lẻ bằng cách trừ chúng cho một, ta được các số chẵn:

$$0,2,4,6,8,10,12,\dots \tag{39.3}$$

Cái gì thế này? Nó gợi cho chúng ta bảng cửu chương 2, do đó ta lại viết các số chẵn ở trên dưới dạng sau:

$$2\times 0, 2\times 1, 2\times 2, 2\times 3, 2\times 4, 2\times 5, 2\times 6,\dots \tag{39.4}$$

Ta thấy ngay quy luật: mỗi số chẵn ở trên có thể viết dưới dạng: $2\times a=2a$, trong đó $a$ là một số nguyên dương bất kỳ. Như vậy, các số lẻ sẽ có dạng: $2a+1$. Đó chính là cái ta cần! Tiếp theo,

[†] Rõ ràng là nếu đề bài viết trên bàn có 21 (hay bất kỳ số lẻ nào) đồng xu thì anh M sẽ bó tay.

[††] Suy nghĩ của nó có thể thế này: tổng 4 số bằng 152 thì mỗi số chừng 30 trở lên. Rồi từ đó mà mò mà mẫm.

thế nào là số lẻ liên tiếp? Ví dụ, $3, 5, 7$ hay $7, 9, 11$ là các số lẻ liên tiếp: từ một số lẻ, ta chỉ cần thêm 2 sẽ được số lẻ tiếp theo.

Vậy thì, nếu $2a + 1$ là số lẻ đầu tiên trong bốn số, thì những số lẻ tiếp theo là: $(2a + 1) + 2$, $(2a + 3) + 2$, $(2a + 5) + 2$. Và câu 'bốn số lẻ liên tiếp cọng lại thì được 152' giờ dịch ra ngôn ngữ đại số là:

$$(2a + 1) + (2a + 3) + (2a + 5) + (2a + 7) = 152 \tag{39.5}$$

Bài toán trở thành giải phương trình trên; tức là tìm $a$ sao cho 2 vế của phương trình bằng nhau. Ta đơn giản nó thành:

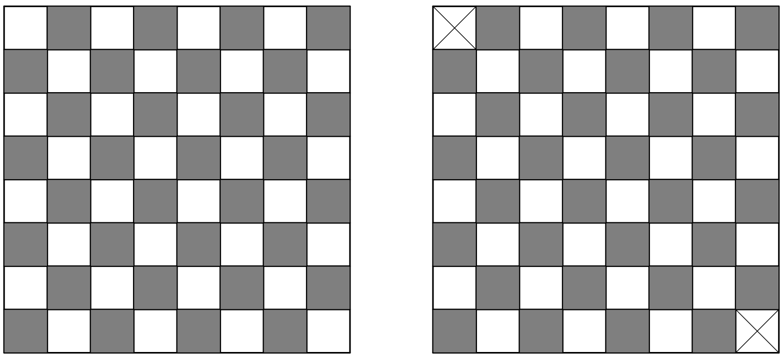
$$8a + 16 = 152 \Longleftrightarrow 8a = 136 \Longleftrightarrow a = \frac{136}{8} = 17 \tag{39.6}$$

Do đó $2a + 1 = 2 \times 17 + 1 = 35$. Như vậy bốn số ta tìm là: $35, 37, 39, 41$. Và câu trả lời là: $41$.

Ở đây mình muốn nói cái gì? Là các bạn trẻ có thể hoàn toàn khám phá toán học chứ không cần ngồi chờ thầy/cô bảo rằng số lẻ là số có dạng $2a + 1$. Muốn vậy thì hãy 'chơi' với các con số, như Messi chơi với trái banh vậy. Có như vậy thì Messi mới phát hiện ra những chiêu qua người mê hoặc.

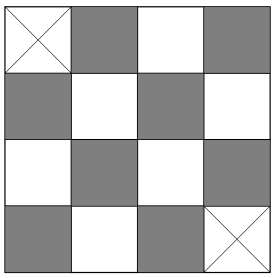
## 39.5 Bàn cờ vua và domino

Một bàn cờ vua có $8 \times 8 = 64$ ô vuông với hai màu trắng đen xen kẻ (Hình 39.2a). Giờ ta có 32 quân domino mà mỗi quân domino có kích thước sao cho chính xác che phủ hai ô vuông kề nhau trên bàn cờ. Vì vậy, 32 quân domino có thể che phủ tất cả 64 ô vuông trên bàn cờ[†]. Nhưng bây giờ giả sử chúng ta cắt bỏ hai ô vuông ở hai góc đối diện nhau trên đường chéo của bàn cờ (Hình 39.2b) và loại bỏ một viên domino. Liệu có thể đặt 31 quân domino còn lại trên bàn cờ sao cho tất cả 62 ô vuông còn lại được che phủ không? Nếu có, hãy chỉ ra cách làm. Nếu không, hãy chứng minh là không thể. Bài này trích từ sách *My Best Mathematical and Logic Puzzles* của Martin Gardner (1914–2010) (Gardner, 1994).



(a) (b)

Hình 39.2: Bàn cờ vua.



Sẽ có ba kiểu phản ứng khác nhau khi gặp phải bài này. Kiểu thứ nhất: người lười như mình hồi xưa. Những người này sẽ không chịu khó suy nghĩ giải bài này và do đó mất một cơ hội luyện tập trí thông minh. Kiểu thứ hai: người *tay nhanh hơn não* (ví dụ Hồ Thiết Hoa trong truyện Sở Lưu Hương hay bác sỹ Watson trong truyện Sherlock Holmes). Những người nóng vội này sẽ làm thử ngay, lấy giấy bút ra vẽ cái bàn cờ rồi thử đặt các quân domino lên. Đối với những bạn này thì mình có một lời khuyên: thử trên bàn cờ $8 \times 8$ tốn thời gian lắm, thử trên $4 \times 4$ đi (xem

[†]Xếp như thế nào? Và có bao nhiêu cách xếp?

hình bên). Kiểu thứ ba: người bình tĩnh, dùng cái đầu trước khi động chân tay như Sở Hương Soái hay Sherlock Holmes vậy.

Trước hết chúng ta nên tìm hiểu kỹ trường hợp ở Hình 39.2a. Vì mỗi quân domino chiếm hai ô và các quân domino không chồng chéo nên 32 quân domino sẽ chiếm $32 \times 2 = 64$ ô. Cho nên 32 quân có thể che phủ toàn bộ bàn cờ (có 64 ô). Bây giờ trong hình Hình 39.2b, chúng ta có 31 quân domino và chúng chiếm $31 \times 2 = 62$ ô và bàn cờ cũng có 62 ô. Suy nghĩ như vậy thì câu trả lời cho câu đố là có. Tuy nhiên, nếu ta thử cho bàn cờ $4 \times 4$ thì thấy không làm được.

Vậy thì nguyên nhân là gì? Nếu để ý kỹ thì ta sẽ thấy chúng ta loại đi không chỉ là hai ô cờ *mà là hai ô trắng* , và vì vậy trong số 62 ô sẽ có 32 ô đen và 30 ô trắng. Trong khi đó, 31 quân domino luôn che 31 ô trắng và 31 ô đen. Câu trả lời cho câu đố là không thể, và lí do là không còn sự đối xứng giữa ô đen và ô trắng.

**AMC 12 2021**. Cho biểu thức sau:

$$S = (2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)(2^8+3^8)(2^{16}+3^{16})(2^{32}+3^{32})(2^{64}+3^{64})$$

Câu hỏi: $S$ tương đương với lựa chọn nào dưới đây:

$(a)\ 3^{127}+2^{127},\quad (b)\ 3^{127}+2^{127}+2\times 3^{63}+3\times 2^{63},\quad (c)\ 3^{128}-2^{128},\quad (d)\ 3^{128}+2^{128}$

Dĩ nhiên là chúng ta sẽ giải bài này mà không dùng máy tính. Trước hết, chúng ta phải quan sát bài toán kỹ, và khi làm như vậy ta sẽ thấy có hai điều đặc biệt: (1) các số mũ trong $S$ là $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$, là một chuỗi hình học. và (2) tại sao lại là 2 và 3 mà là không 2 và 5? Cũng vì có chuỗi hình học $1, 2, \dots, 64$ mà ta có con số 127 và 128 trong các lựa chọn. Thật vậy, ta có, nếu cho $A = 1+2+4+\cdots+32+64$ thì

$$\begin{aligned}
A-1 &= 2+4+8+16+32+64 = 2(1+2+4+8+16+32)\\
A-1 &= 2(A-64) \Longleftrightarrow A-1 = 2A-128 \Longleftrightarrow A = 127
\end{aligned}$$

Dù có thành công nhỏ này, chúng ta vẫn chưa giải quyết được bài toán. Lúc thế này thì một cách rất hay là đơn giản bài toán: chúng ta sẽ giải bài dễ hơn với $S_2 = (2+3)(2^2+3^2)$, tức là chỉ hai số hạng ban đầu trong biểu thức $S$. Vì $S_2$ đơn giản nên ta có thể tính nó trực tiếp

$$S_2 = (2+3)(2^2+3^2) = (2^3+3^3) + 2\times 3^2 + 3\times 2^2 = 65$$

Và $S_2$ này cũng chính bằng $3^4 - 2^4$. Như vậy cho $S_2 = (2+3)(2^2+3^2)$ thì đáp án là *(c)*. Nhưng mà tại sao ta có:

$$(2+3)(2^2+3^2) = 3^4 - 2^4 \tag{39.7}$$

Để trả lời câu hỏi này thì chúng ta lại quay về những cái thân thuộc sau:

$$\begin{aligned}
a^2-b^2 &= (a-b)(a+b)\\
a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2)\\
a^4-b^4 &= (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)
\end{aligned} \tag{39.8}$$

Với $a = 3$ và $b = 2$ (tức là $a-b = 1$), ta có ngay $3^4-2^4 = (3+2)(3^2+2^2)$, cũng chính là Eq. (39.7). Bây giờ thì các bạn đã hiểu tại sao trong đề bài ta phải có 2 và 3. Giờ thì ta đoán ngay lời giải cho bài toán ban đầu là *(c)*. Nếu xét $S_3 = (2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)$, dùng Eq. (39.7) ta có thể tính $S_3$ ngay như sau:

$$S_3 = (2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4) = (3^4-2^4)(3^4+2^4) = 3^8-2^8$$

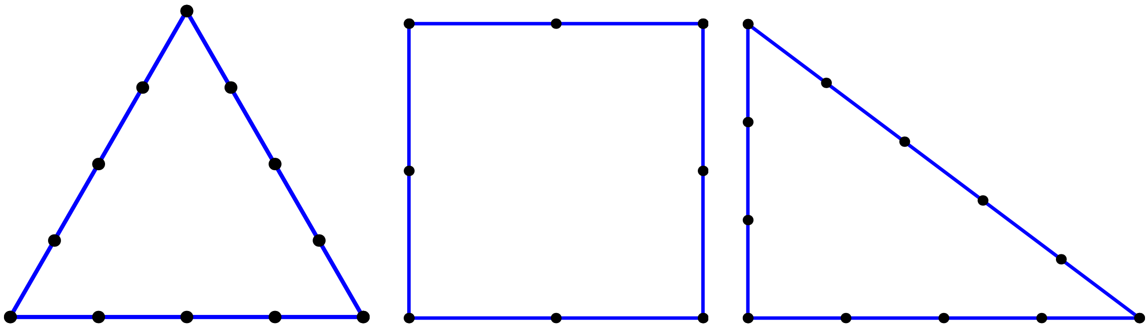
Tiếp tục như vậy, ta có:

$$S_4 = (2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)(2^8+3^8) = (3^8-2^8)(3^8+2^8) = 3^{16}-2^{16}$$

Bây giờ nhìn lại thì ta thấy để giải bài này chúng ta cần biết Eq. (39.8), một chuyện không có chi đặc biệt; ngoài ra ta còn cần biết chuỗi hình học. Tiếp theo là một kỹ năng giải quyết vấn đề rất lợi hại: *giải bài đơn giản hơn nếu chưa làm được bài gốc*. Một số người thì gọi cách này là xét các trường hợp đặc biệt; giải chúng rồi quay lại giải bài toán gốc.

## 39.6 Vài bài toán que diêm

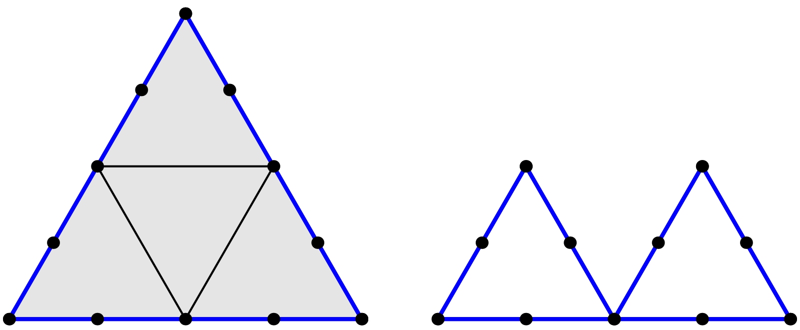
Bây giờ chúng ta sẽ làm một vài bài toán que diêm như trên Hình 39.3. Vì vẽ que diêm khó nên mình dùng tăm thay cho. Các bài này có dạng như sau: có một hình được tạo thành bởi một số cây tăm, yêu cầu của bài toán là di chuyển một số cây hay thêm vào một số để được một hình khác. Đừng coi thường mấy bài này nhé, nếu bạn thích chúng và giải được dễ dàng bạn có khiếu để làm một nhà toán học topo (Chương 35). Còn nếu không thích hay không giải được thì không sao, bạn có thể thành Messi thứ hai sau này; có khi còn ngon hơn nhà topo ☺.



(a) (b) (c)

Hình 39.3: Bài toán cây diêm. Mỗi cạnh ở hình (a) tạo bởi 3 cây tăm (1 cây tăm là đoạn thẳng với hai chấm đen hai đầu) và các cây tăm không dính nhau (dù hình vẽ không minh họa được điều này). Các cây tăm có thể di chuyển thoải mái.

**Bài 1**. Cho Hình 39.3a, di chuyển bốn cây tăm sao cho diện tích hình giảm một nữa. Cũng như các bài về hình học, ở đây chúng ta vẽ thêm ba đoạn thẳng nối trung điểm của ba cạnh của tam giác. Làm như vậy chúng ta thấy ngay hình ban đầu bằng bốn hình tam giác nhỏ (Hình 39.4a). Để cho diện tích giảm một nửa, do đó, chúng ta cần xóa đi hai tam giác, và để được như vậy ta di chuyển bốn cây như Hình 39.4b.

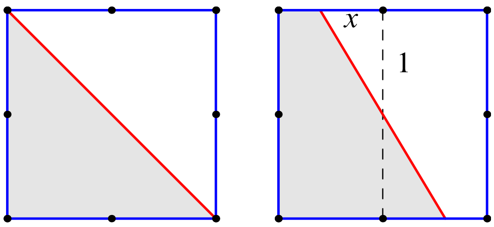


(a) (b)

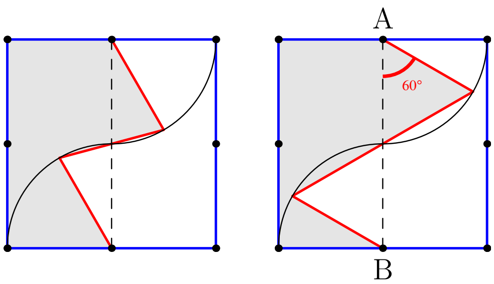
Hình 39.4

**Bài 2**. Cho Hình 39.3b, thêm bốn cây tăm làm sao để chia hình này thành hai phần bằng nhau. Giả sử mỗi cây tăm dài 1 (đơn vị gì không quan trọng). Chúng ta có thể bắt đầu với hai cách trình bày ở Hình 39.5. Rõ ràng là chúng ta đã chia hình vuông cho trước thành hai phần bằng nhau. Nhưng mà liệu cái đoạn màu đỏ có độ dài bằng 4 (tức là 4 cây tăm)? Định lý Pythago cho hình phải cho ta độ dài đoạn màu đỏ là $2\sqrt{2}$ và không phải là 4. Vậy ta loại cách này. Tương tự như vậy, cho hình bên phải, để cho độ dài đoạn màu đỏ bằng 4 thì $x$ phải là $\sqrt{3}$, mà $\sqrt{3} > 1$; một điều vô lý vì $x$ phải nhỏ hơn 1. Cách này vì vậy cũng bị loại.

Tới đây chúng ta chỉ còn một cách duy nhất: chúng ta phải chia hình này bằng một đường gấp khúc. Lời giải cho ở Hình 39.6. Chúng ta sử dụng sự đối xứng ở đây: từ đường nét đứt $AB$ mà chia hình vuông thành hai phần bằng nhau, ta thêm bốn cây tăm sao cho có sự đối xứng hai bên đường nét đứt này. Cây tăm thứ nhất phải tạo thành 1 góc $60°$ so với $AB$ và cây tiếp theo đi qua tâm của hình vuông.

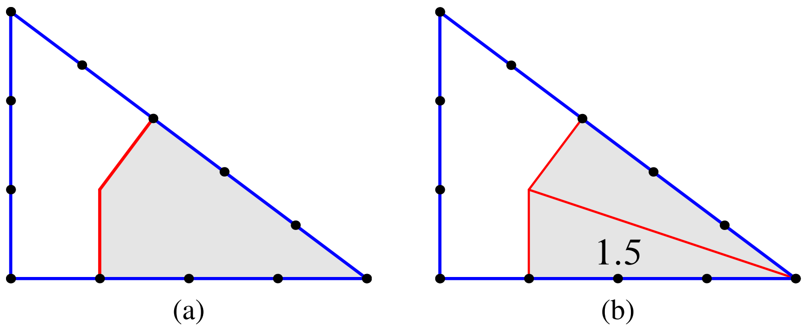



Hình 39.5: Lời giải sai cho bài 2.




Hình 39.6: Lời giải đúng cho bài 2.

**Bài 3**. Cho Hình 39.3c, thêm hai cây tăm làm sao để chia hình này thành hai phần bằng nhau. Lời giải như trình bày ở Hình 39.7a. Tại sao? Chú ý là, nếu xem mỗi cây tăm dài 1 (đơn vị gì không quan trọng), thì diện tích tam giác ban đầu là 6, cho nên diện tích của hai phần mới phải là 3. Có thể thấy rằng diện tích phần tô là 3 (Hình 39.7b) vì nó gồm hai tam giác vuông với hai cạnh là 3 và 1 (với diện tích là 1.5).




Hình 39.7: Lời giải cho bài 3.

## 39.7 Bài toán cháy dây

Bài toán "cháy dây" là một bài toán logic cổ điển. Bạn có hai sợi dây mà mỗi sợi cần một giờ (tức 60 phút) để cháy, nhưng cháy với tốc độ không đều nhau. Làm cách nào để bạn có thể đo 45 phút? (Bạn có thể thắp sáng một hoặc cả hai sợi dây ở một hoặc cả hai đầu dây cùng một lúc.)

Lúc chúng ta muốn tán tỉnh một cô gái mà không thể cua nàng được thì chúng ta làm gì, hỡi các chàng trai? Chúng ta tiếp cận cô bạn thân của nàng. Giải quyết vấn đề cũng vậy. Bốn mươi lăm phút? Khó quá. Thế 60 phút thì sao? Ồi, cái này thì dễ: đốt một dây (từ một đầu) và khi nó cháy hết là 60 phút. Còn 120 phút thì thế nào? Cũng dễ: đốt sợi 1 cho cháy hết rồi đốt sợi 2, lúc sợi 2 cháy hết là 120 phút. Nhưng các cô gái thì không có dễ như vậy. Giờ thử trường hợp này: đo 30 phút. À, đốt một sợi từ hai đầu, lúc nó cháy hết là 30 phút. Bạn đã gần 'nàng' (tức là 45 phút) hơn bao giờ hết rồi đó. Suy nghĩ thêm tí nữa sẽ thấy cách vào trái tim nàng thôi.

Đó là: đốt sợi 1 từ hai đầu và sợi 2 từ một đầu cùng một lúc. Lúc sợi 1 cháy hết là ta có 30 phút và sợi hai đã cháy đi một nữa. Ngay lúc này ta đốt đầu kia của sợi 2 đang cháy. Lúc nó cháy hết là ta có thêm 15 phút. Vị chi là 45 phút.

Nếu đề bài yêu cầu đo 47 phút thì sao? Thì bạn đang đụng phải hoa hậu thế giới. Bó tay!

## 39.8 Bài toán về nghệ thuật đếm

Ở mục này mình giới thiệu một số bài toán về nghệ thuật đếm; tên gọi chính thức là toán tổ hợp. Toán tổ hợp thuộc nhánh gọi là toán rời rạc và bạn nào giỏi môn này thì nên học khoa học máy tính khi vào đại học; hoặc là học toán thuần túy chuyên về tổ hợp, xác xuất. Giả sử bạn được yêu cầu giải quyết các vấn đề sau:

- Tại một bữa tiệc, mỗi người đàn ông bắt tay với tất cả mọi người trừ vợ mình, và các phụ nữ thì không bắt tay. Nếu có 13 cặp vợ chồng tham gia, có bao nhiêu lần bắt tay xảy ra giữa 26 người này?
- Một cái bàn tròn có chính xác 60 cái ghế xung quanh nó. Có $N$ người ngồi quanh cái bàn này sao cho người tiếp theo phải ngồi cạnh một người nào đó. Giá trị $N$ nhỏ nhất có thể là bao nhiêu?

Làm thế nào bạn sẽ tiếp cận với những vấn đề này? Trong quá trình giải chúng, bạn sẽ nhận thấy rằng đòi hỏi đếm các khả năng, nhưng đôi khi khá phiền phức khi cần theo dõi tất cả các khả năng. Nếu các bạn đang tự hỏi tại sao các nhà Toán học lại rảnh rỗi đi làm những bài toán trông vô bổ thế này, thì xin thưa chính trong quá trình giải những bài tương tự, các nhà toán học đã phát triển toán tổ hợp, chính là nghệ thuật đếm: đếm một cách thông minh. Ở Chương 40, nhân nói về vài mẫu chuyện của Euler, mình sẽ trình bày bài toán '7 cây cầu ở Königsberg' và sự hình thành của lý thuyết đồ thị (graph theory).

Kiến thức cơ bản về tổ hợp gồm có giai thừa, hoán vị và tổ hợp:

1. Giai thừa: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$;
2. Hoán vị:
$$P(n,r) = P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{39.9}$$
3. Tổ hợp:
$$\binom{n}{r} = C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{P_n^r}{r!} \tag{39.10}$$

Mình sẽ không đi vào chi tiết mà chúng ta sẽ giải một số bài toán tổ hợp sau.

**Bài 1.** Giờ chúng ta giải bài toán sau: "Có bao nhiêu bộ ba số nguyên không âm, được sắp xếp $(x,y,z)$ thỏa mãn phương trình $x+y+z=11$?" Ví dụ, bộ ba $(0,1,10)$ là một bộ ba số thõa mãn phương trình. Bài toán hỏi là có bao nhiêu bộ ba như vậy. Sau khi đã hiểu bài toán, chúng ta sẽ giải nó. (Ghi chú: chúng ta cũng có thể phát biểu bài toán đơn giản hơn như sau: phương trình $x+y+z=11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?)

Một sai lầm mà mình đã mắc là như sau: có 12 lựa chọn cho $x$, 12 lựa chọn cho $y$ và 1 lựa chọn cho $z$; do đó, kết quả là 144. Điều này là sai vì chúng ta không thể sử dụng quy tắc nhân ở đây vì $x,y,z$ không độc lập! Thực ra, chúng ta có thể giải phương trình này khá dễ dàng bằng cách lý luận như sau: cố định $x$ ($x=x^*$), sau đó tìm cách có bao nhiêu cách chúng ta có thể có cho $y+z=11-x^*$. Sau đó, chúng ta thay đổi $x^*$ từ 0 đến 11 và đếm số cách tương ứng (chú ý rằng với mỗi $x^*$, và một $y$ nào đó, thì chỉ còn một lựa chọn cho $z$ mà thôi vì $z=11-x^*-y$):

$$\begin{aligned}
x^* = 0: &\quad \text{có 12 lựa chọn cho } y\text{: } y = 0,1,2,\dots,11\\
x^* = 1: &\quad \text{có 11 lựa chọn cho } y\text{: } y = 0,1,2,\dots,10\\
\dots &\quad \dots\\
x^* = 11: &\quad \text{chỉ có 1 lựa chọn cho } y\text{: } y = 0
\end{aligned} \tag{39.11}$$

Do đó, có $12 + 11 + \cdots + 1 = 78$ bộ ba số nguyên không âm $(x, y, z)$ thỏa mãn $x + y + z = 11$. Có nên dừng lại ở đây không? Không! Tại sao lại là 78? Nó liên quan như thế nào đến 11 và $x, y, z$? Nếu chúng ta không thể trả lời các câu hỏi này, khi gặp bài toán sau $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 150$, làm sao chúng ta có thể giải quyết nó? Cách tiếp cận thô sơ như trên sẽ trở nên rất phiền toái (và vì thế không phải là một cách giải tinh tế–theo tiêu chuẩn đẹp của Toán học).

May mắn cho chúng ta, chúng ta có số 78 từ $12 + 11 + \cdots + 1$, đó chính là $\binom{13}{2}$. Nhiệm vụ bây giờ là hiểu tại sao $\binom{13}{2}$ lại ở đây. Để làm được điều này, có nhiều cách tiếp cận khác nhau. Thay vì coi $x, y, z$ là lời giải cho phương trình $x + y + z = 11$, chúng ta nghĩ về *"11 vật thể cần phân phối vào ba hộp"*. Và có thể có hộp trống (tương ứng với nghiệm bằng không). Với cách nhìn này, chúng ta có thể phát triển cách để *trực quan hóa vấn đề*: chúng ta có thể sử dụng các dấu sao để đại diện cho các vật thể và dấu thanh để biểu thị ranh giới của các hộp. Ví dụ, bây giờ chúng ta không còn xem bộ ba số $(0, 0, 11)$ và $(3, 3, 5)$ như nghiệm phương trình $x + y + z = 11$ nữa; thay vào đó chúng là:

$$\begin{array}{lcl} (0,0,11) & : & \big|\big| \star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star \\ (3,3,5) & : & \star\star\star\big|\star\star\star\big|\star\star\star\star\star \end{array}$$

Với biểu diễn này, lời giải của bài toán bỗng nhiên xuất hiện một cách rất tự nhiên: trong vấn đề luôn có 13 vị trí: 11 vị trí cho 11 dấu sao và 2 vị trí cho 2 dấu thanh, và chúng ta chỉ cần chọn hai vị trí trong 13 (để đặt dấu thanh vào), đó là $\binom{13}{2}$, tương đương với $\binom{11+3-1}{3-1}$. Công thức cuối cùng cho phép chúng ta tổng quát hóa cho $n$ đối tượng và $k$ hộp: $\binom{n+k-1}{k-1}$. Và với công thức này, bài toán $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 150$ (hay tương tự) trở nên rất đơn giản. Phương pháp này có tên gọi là “sao và thanh”, và được phổ biến bởi nhà toán học Mỹ gốc Croatia William Feller (1906–1970)[††].

Nhưng nếu gặp bài này thì sao? "Có bao nhiêu bộ ba số nguyên dương, được sắp xếp $(x, y, z)$ thỏa mãn phương trình $x + y + z = 11$?" Chú ý rằng giờ bộ ba $(0, 1, 10)$ không còn thõa mãn yêu cầu, nhưng $(1, 1, 9)$ thõa mãn. Chúng ta có thể dùng kỹ thuật biến bài toán trở thành bài toán mà ta đã biết giải. Làm sao? Trước hết ta cho vào mỗi hộp một 1 vật thể, và vậy là ta có bài toán: "Có bao nhiêu bộ ba số nguyên không âm, được sắp xếp $(x', y', z')$ thỏa mãn phương trình $x + y + z = 11 - 3 = 8$?" Lời giải là $\binom{10}{2}$.

Còn gì liên quan để tìm hiểu không? Dĩ nhiên là còn! Ví dụ, phương trình $x + y + z = 8$ có bao nhiêu nghiệm nguyên $x, y, z \geq -3$? Không có gì phải lo lắng. Bổn cũ soạn lại: biến bài toán thành bài ta đã biết. Yêu cầu $x \geq -3$, mà ta muốn $x' \geq 0$ (nghiệm nguyên không âm), vậy ta giới thiệu $x' = x + 3$, và $x' \geq 0$. Tương tự, ta giới thiệu $y' = y + 3$ và $z' = z + 3$, do đó:

$$x' + y' + z' = (x + 3) + (y + 3) + (z + 3) = (x + y + z) + 9 = 8 + 9 = 17$$

Và đáp án sẽ là $\binom{19}{2}$.

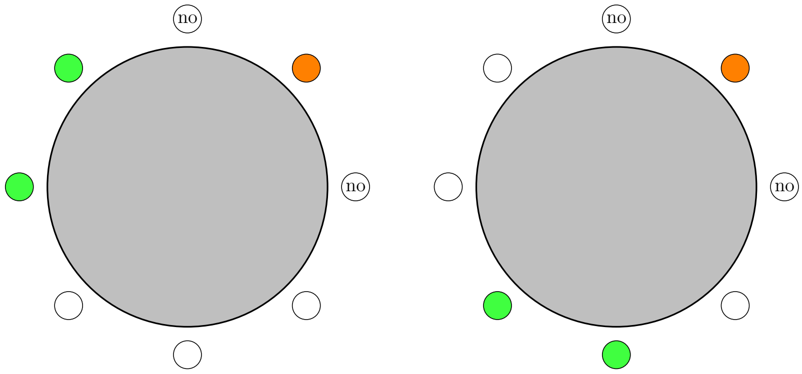
**Bài 2.** Nếu bạn thích thì xin mời giải bài này. Có bao nhiêu số điện thoại 7 chữ số thỏa mãn điều kiện số đó tăng dần (các chữ số có thể giữ nguyên hoặc tăng)? (ví dụ: $0115566$, $1346789$, vv.) Gợi ý: Chuyển bài toán này thành vấn đề về sao và thanh.

**Bài 3.** Tám người đang ngồi xung quanh một cái bàn tròn, mỗi người cầm một đồng xu bình thường. Tất cả tám người ném đồng xu của họ và những người được mặt sấp đứng lên trong khi những người được mặt trái vẫn ngồi xuống. Xác suất để không có hai người cạnh nhau cùng đứng là bao nhiêu?

Chúng ta dùng định nghĩa của xác suất thôi: tìm tất cả các khả năng có thể có (cái này thì không khó, đó là $2^8$), và tìm các khả năng mà không có hai người cạnh nhau cùng đứng (giả sử số khả năng này là $n$), thì xác suất cần tìm là $P = {}^{n}/_{2^8}$. (Tương tự như tung một con súc sắc 6 mặt, tìm xác suất được số chẵn vậy: $3/6$.) Cái khó của bài này là tìm $n$. Hít thật sâu và ngồi đếm các khả năng thôi; có những trường hợp như sau mà không có hai người cạnh nhau cùng đứng:

[††] Feller là một trong những chuyên gia xác suất vĩ đại nhất của thế kỷ hai mươi.

- Tám người cùng ngồi hay 0 người đứng: chỉ có 1 khả năng thôi.
- Bảy người ngồi và 1 người đứng: người này có thể đứng ở 8 vị trí, do đó có 8 khả năng.
- Sáu người ngồi và 2 người đứng: trường hợp này khó hơn, chúng ta nên làm thế này: tìm tất cả số khả năng có hai người đứng (có $\binom{8}{2} = 28$ khả năng), nhưng trong 28 khả năng này có 8 trường hợp 2 người đứng cạnh nhau (vẽ hình sẽ thấy); do đó có $28 - 8 = 20$ khả năng cho trường hợp này;
- Năm người ngồi và 3 người đứng: thành công thường nối tiếp thành công, cho nên ta lại xài chiêu cũ: tìm tất cả số khả năng có ba người đứng (có $\binom{8}{3} = 56$ khả năng), nhưng trong 56 khả năng này có nhiều trường hợp có ít nhất hai người đứng cạnh nhau. Có hai trường hợp mà ít nhất hai người đứng cạnh nhau. Trường hợp 1: ba người đứng cạnh nhau (có 8 khả năng). Trường hợp 2: hai người đứng cạnh nhau, và người còn lại chỉ là kẻ thứ ba (tức không được đứng cạnh cặp kia); trường hợp này có $8 \times 4 = 32$ (Hình 39.8). Vậy, có $56 - 8 - 32 = 16$ khả năng cho trường hợp 3 người đứng.




Hình 39.8: Trường hợp 3 người đứng và có hai người đứng cạnh nhau: trước hết cho người cô đơn (màu cam) đứng 1 chỗ (có 8 lựa chọn cho người này), sau đó 2 người còn lại sẽ còn 5 ghế để đứng, và có 4 khả năng (mình vẽ hai ở đây). Đó là lí do chúng ta có $8 \times 4$ khả năng.

- Bốn người ngồi và 4 người đứng: cái này ta có thể tìm trực tiếp, đây là tình huống ngồi-đứng-ngồi-đứng-ngồi-đứng-ngồi-đứng và có 2 trường hợp (vẽ hình đi các bạn);

Không thể có trường hợp $5, 6, 7, 8$ người đứng mà không có 2 người đứng cạnh nhau (vẽ hình, vẽ hình sẽ thấy mọi chuyện). Cuối cùng, xác suất cần tìm là:

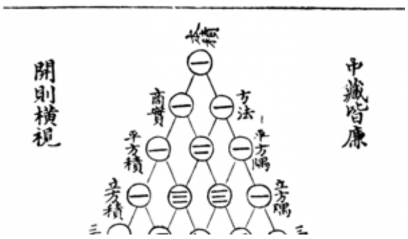
$$P = \frac{1 + 8 + 20 + 16 + 2}{2^8} = \frac{47}{256} = 0.18359375$$

Đây là một câu trong kỳ thi AMC 10 - Test A - năm học 2014 - 2015, dành cho các bạn 'giỏi toán'.

**Tam giác Pascal.** Nói về nghệ thuật đếm mà không nhắc tới khai triển nhị thức và tam giác Pascal là một thiếu sót. Học sinh cấp hai ai cũng quen biết với $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, và $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Người tò mò sẽ hỏi ngay vậy $(a+b)^4$ sẽ như thế nào? Và thậm chí $(a+b)^{20}$. Khi ta viết $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, ta đã làm cái gọi là khai triển nhị thức, vì nhị thức là biểu thức toán học có dạng $(a+b)^n$ với $a, b$ là các số thực và $n$ là một số nguyên dương. Muốn trả lời câu hỏi vừa nêu không khó, nhưng mà chúng ta phải để cho mấy đứa $(a+b)^n$ ngồi lại với nhau, rồi quan sát chúng, ta sẽ thấy một mối liên hệ. Do đó, mình sẽ viết $(a+b)^n$, cho $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ở đây:

$$\begin{array}{lcc}
(a+b)^0 & = & 1 \\
(a+b)^1 & = & a+b \\
(a+b)^2 & = & 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
(a+b)^3 & = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 & = & a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{array} \tag{39.12}$$

Trong $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, các số $1, 2, 1$ được gọi là hệ số trong nhị thức. Điều đáng kỳ quái là các hệ số trong những khai triển nhị thức này tạo nên một tam giác (Hình 39.9b), thường được gọi là tam giác Pascal (1623-1662), dù phân tích nhị thức này đã được nhà toán học Trung Quốc Yang Hui (khoảng 1238-1298) biết đến từ lâu trước khi Blaise Pascal nắm bắt (Hình 39.9a).



(a)

| | |
|---|---|
| 1 | row 0 |
| 1 1 | row 1 |
| 1 2 1 | row 2 |
| 1 3 3 1 | row 3 |
| 1 4 6 4 1 | row 4 |
| 1 5 10 10 5 1 | row 5 |
| 1 6 15 20 15 6 1 | row 6 |

(b)

Hình 39.9: Tam giác Pascal. Sai không gọi là tam giác Yang Hui? Vì lịch sử Toán học do các nhà Toán học châu Âu viết!

Tam giác Pascal có thể được xây dựng như sau (Hình 39.9b): đầu tiên đặt các số 1 ở cạnh trái và cạnh phải, sau đó tam giác có thể được điền từ trên xuống bằng cách cộng hai số ở phía trên bên trái và phải của mỗi vị trí trong tam giác. Không những ta có một ngạc nhiên thú vị là các nhị thức cho ta một tam giác rất đẹp, mà tam giác này cho ta cách khai triển bất cứ nhị thức nào, ví dụ, nhìn vào hàng 5 của tam giác Pascal, ta viết ngay

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Quá hay. Tuy nhiên, làm cách này khá chậm chạp vì trước hết ta phải xây tam giác Pascal thật lớn, rồi dùng nó. Có cách nhanh hơn để biết hệ số của một thành phần cụ thể trong $(a+b)^n$ mà không cần thông qua tam giác Pascal không? Để trả lời câu hỏi đó, hãy xem xét $(a+b)^3$. Chúng ta triển khai nó như sau:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\ &= (aa+ab+ba+bb)(a+b)\\ &= aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb\end{aligned}$$

Mọi thành phần trong biểu thức cuối cùng đều có ba thành phần chứa chỉ $a$ và $b$ (ví dụ $aba$). Chúng ta cũng biết rằng một số trong những thành phần này sẽ được nhóm lại; chẳng hạn $aab = aba = baa$, vì chúng đều bằng $a^2b$. Đó là lí do trong $(a+b)^3$ có $3a^2b$. Nhiệm vụ của ta bây giờ là tìm ra một công thức giải thích cho con số 3 này. Và đây chính là lúc tổ hợp ra tay: $aab$ hay $baa$ hay $aba$ giống như có ba cái hộp đặt cạnh nhau và trong đó ta sẽ chọn hai hộp để chứa $a$ (hộp còn lại dĩ nhiên phải chịu sống với $b$). Có ba hộp, và chọn hai hộp, phải có $\binom{3}{2}$ cách chọn. Thế đó, đó là vì sao hệ số của $a^2b$ là $\binom{3}{2} = 3$.

Trong nhị thức $(a+b)^5$, hệ số của $a^3b^2$ là nhiêu? Ta có 5 hộp, và phải chọn 3 hộp cho $a$, do đó hệ số đó phải là $\binom{5}{3} = 10$. Có đúng không? Nhìn lại tam giác Pascal: chuẩn không cần chỉnh luôn. Giờ thì không có gì có thể ngăn các nhà Toán học tổng quát hóa những gì họ đã làm.

Sự tổng quát hóa cho phép chúng ta viết định lý nhị thức sau đây:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^0b^n \tag{39.13}$$

Làm ví dụ, hệ số của $a^6b$ trong $(a+b)^7$ là gì? Chúng ta có: $n = 7$ và $k = 1$, do đó hệ số là $\binom{7}{1} = \frac{7!}{6!1!} = 7$. Bạn có thể kiểm tra kết quả bằng cách sử dụng tam giác Pascal.

Nhưng nếu bạn dừng ở đây các nhà Toán học sẽ không bị thuyết phục là công thức trên đúng cho bất kỳ $n$ nào. Bạn phải làm bước cuối cùng: chứng minh chặt chẽ Eq. (39.13). Mình xin bỏ qua bước này, vì nó chỉ là vấn đề kỹ thuật.

**Bài 4.** Giả sử mỗi năm có 365 ngày, và ta tìm hiểu những bài sau:

- Trong phòng cần có ít nhất là bao nhiêu người thì chắc chắn có ít nhất hai người cùng ngày sinh?
- Trong phòng cần có ít nhất là bao nhiêu người thì xác suất có ít nhất hai người cùng ngày sinh là 0.5? Bài này có tên là bài toán nghịch lý sinh nhật. Bạn sẽ hiểu cái tên này.

Để trả lời câu thứ nhất thì suy nghĩ thế này: nếu trong phòng có 365 người thì có khả năng tất cả có sinh nhật khác nhau (người 1 sinh ngày 1 của năm, người 2 sinh vào ngày 2, ..., người 365 sinh ngày 365–ngày cuối cùng của năm). Do đó, chỉ cần có 366 người thì chắc chắn có ít nhất hai người cùng ngày sinh. Đây gọi là nguyên lý Dirichlet hay nguyên lý chuồng bồ câu. Tại sao có cái tên chuồng bồ câu? Tưởng tượng chúng ta có 5 chuồng bồ câu, mà có tới 6 con thì chắc chắn có một chuồng chứa hơn hai con.

Về câu hỏi thứ hai thì những bạn rành về đại số sẽ làm như vậy. Gọi $n$ là số người trong phòng, và $P(n)$ là xác suất có ít nhất hai người cùng ngày sinh, tính $P(n)$, rồi giải phương trình $P(n) = 0.5$. Suy nghĩ như vậy rất hợp lý, còn tiến hành được hay không là chuyện khác. Tuy nhiên, đối với các bạn chưa rành với đại số, ta có thể giả sử $n = 5$, tính xác suất tương ứng $P(5)$, xem nó bằng nhiêu. Giờ ta làm cái này trước. Ta không làm trực tiếp mà làm gián tiếp: tìm xác suất $p$ mà không ai trong 5 người có cùng sinh nhật (vì cái này thì nhẹ nhàng), sau đó $P(5) = 1 - p$. Đáp án là

$$P(5) = 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times 362 \times 361}{365^5} = 0.027$$

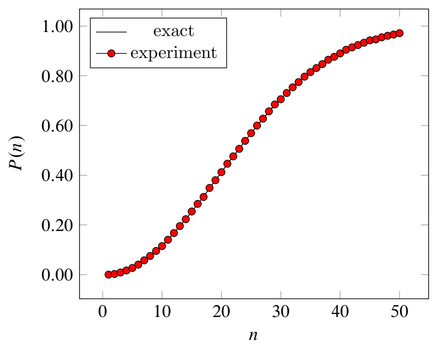
Xác suất cỡ 2%, có vẻ hợp lý. Nếu giờ bạn đoán cần khoảng 365/2 = 182 người trong phòng để có ít nhất hai người cùng ngày sinh với xác suất 50%, thì bạn chỉ phỏng đoán mà thôi. Xác suất rất kỳ lạ. Nhưng mà không cần phải đoán mò, ta có thể tính $P(n)$ cho $n$ người (vì $n$ hay 5 cũng vậy thôi):

$$P(n) = 1 - \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^5} \tag{39.14}$$

Bài toán giờ trở thành giải phương trình sau:

$$P(n) = 0.5 \iff 1 - \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^5} = 0.5 \tag{39.15}$$

Thay vì giải nó, ta làm một bước rất quan trọng: xem $P(n)$ như một hàm số theo $n$, tính $P(n)$ cho vài giá trị của $n$, vẽ đồ thị, ta sẽ biết sự biến thiên của nó. Ngoài ra ta cũng có thể tìm ra $n$ tương ứng với 0.5. Đây là phương pháp đồ hoạ để giải phương trình khó.




Bây giờ, chúng ta tính $P(n)$ cho các giá trị khác nhau của $n$ từ 1 đến 50. Dĩ nhiên mình viết một chương trình trên máy tính cho nhiệm vụ này. Hình vẽ[§] bên cạnh cho chúng ta $P(23) \approx 0.5$, vì vậy với chỉ 23 người trong một phòng, có 50% khả năng ít nhất hai người trong số họ có cùng ngày sinh. Và với khoảng 50 người, khả năng đó tăng lên khoảng 90%. Phỏng đoán của ta đúng là tào lao thật. Vì thế bài toán mới có tên gọi là nghịc lý sinh nhật. Lý do chính khiến vấn đề này được gọi là một nghịch lý là nếu bạn ở trong một nhóm có 23 người, *bạn nghĩ rằng bạn chỉ đang thực hiện 22 sự so sánh*: giữa bạn–trung tâm của vũ trụ–và 22 người tầm thường còn lại! Điều này có nghĩa là chỉ có 22 cơ hội để trùng ngày sinh với ai đó. Tuy nhiên, chúng ta không chỉ thực hiện 22 sự so sánh; bạn suy nghĩ thế nào thì người khác cũng vậy. Số lượng đó lớn hơn nhiều và đó chính là lý do chúng ta cảm thấy vấn đề này như một nghịch lý. Thực tế, việc so sánh ngày sinh sẽ được thực hiện giữa mọi cặp cá nhân có thể. Với 23 người, có $\binom{23}{2} = (23 \times 22)/2 = 253$ cặp để xem xét, đó là một con số lớn hơn nhiều so với nửa số ngày trong một năm (182,5 hoặc 183).

[§]Trong hình 'exact' là đường vẽ từ Eq. (39.14), tức là dựa trên lý thuyết xác suất, còn đường 'experiment' là dựa trên thí nghiệm trên máy tính.

Có một câu chuyện thật về bài toán nghịc lý sinh nhật như sau. Có người trên chương trình của Johnny Carson đã cố gắng giải thích bài toán này. Johnny Carson–vốn không tin vào điều đó–đã lưu ý rằng có khoảng 120 người (tức nhiều hơn 23) trong khán giả trực tiếp của buổi ghi hình và hỏi có bao nhiêu người trong số họ có ngày sinh nhật giống với của anh, chẳng hạn như ngày 6 tháng 6. Không ai có, và vị khách mời–người không phải là một nhà toán học–đã nói một cái gì mập mờ để bào chữa. Điều anh ấy nên nói là cần ít nhất hai mươi ba người để có 50% khả năng rằng có một ngày sinh chung, chứ không phải là ngày sinh cụ thể nào đó như ngày 6 tháng 6.

Đúng vậy, cần một số lượng lớn người, cụ thể là 253 người, để có 50% khả năng rằng có ai đó trong nhóm có ngày 6 tháng 3 là ngày sinh của họ. Lí do như thế nào? Gọi $N$ là số người để có 50% khả năng rằng có ai đó trong $N$ người có ngày sinh nhằm ngày 6 tháng 6. Ta tính xác suất không ai trong $N$ người có ngày 6/6 là ngày sinh, xác suất này là $(364/365)^N$[†], do đó xác suất cần tìm là $1 - (364/365)^N$. Giờ ta cần tìm $N$ sao cho: $1 - (364/365)^N = 0.5$ hay $(364/365)^N = 0.5$. Hàm mũ! Và do đó $N$ phải dính tới logarit:

$$N = \frac{\ln 0.5}{\ln 364/365} = 252.65 \Longrightarrow N = 253$$

Ngoài phương pháp đồ họa để giải Eq. (39.15), liệu có cách nào khác? Một chút biến đổi đến $P(n)$ sẽ hữu ích; biến đổi như sau, chúng ta viết lại $P(n)$ bằng cách sử dụng $365^n = 365 \times 365 \times \cdots \times 365$, và ghép mỗi 365 với một số trong tử số:

$$\begin{aligned} P(n) &= 1 - \left(\frac{365}{365}\right)\left(\frac{364}{365}\right)\cdots\left(\frac{365-n+1}{365}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{365}{365}\right)\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{365}\right) \end{aligned} \tag{39.16}$$

Bây giờ đến phần nghệ thuật gần đúng, chú ý rằng Eq. (39.16) có các thành phần có dạng $1 - x$, và hãy nhớ rằng đối với $x$ nhỏ gần bằng không, chúng ta có $e^x \approx 1 + x$ hay $e^{-x} \approx 1 - x$. Vì vậy, Eq. (39.16) trở thành

$$\begin{aligned} P(n) &\approx 1 - \left(e^{-\frac{1}{365}}\right)\left(e^{-\frac{2}{365}}\right)\cdots\left(e^{-\frac{n-1}{365}}\right) \approx 1 - \exp\left(-\frac{1+2+\cdots+n-1}{365}\right) \\ &\approx 1 - \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2\times 365}\right) \approx 1 - \exp\left(-\frac{n^2}{2\times 365}\right) \end{aligned}$$

và ta lại thấy tổng của $n$ số tự nhiên đầu tiên! Ngoài ra đã xấp xỉ rồi thì thay $n(n-1)$ bởi $n^2$ luôn; các bạn sẽ thấy việc này giúp ta tránh giải phương trình bậc hai ở bước tiếp theo.

Với ước tính này, việc tìm giá trị $n$ sao cho $P(n) = 0.5$ sẽ dễ dàng hơn:

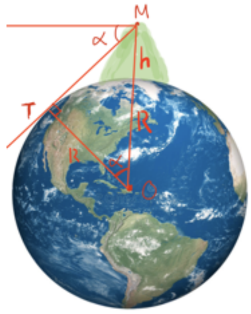
$$1 - \exp\left(-\frac{n^2}{2\times 365}\right) = 0.5 \Longrightarrow \frac{n^2}{2\times 365} = \ln 2 \Longrightarrow n = \sqrt{\ln 2 \times 730} = 22.494$$

Và từ đó chúng ta có $n = 23$.

## 39.9 Đo bán kính trái đất

Nếu giờ bạn phải giải bài toán 'tính toán bán kính trái đất chỉ dùng kiến thức lượng giác' thì các bạn làm sao? Mình thì chắc bó tay, nhưng may mắn là, Abu Reyhan Al-Biruni (973–1050), thiên tài toán học Hồi giáo của thế kỷ thứ 10, đã kết hợp lượng giác và đại số để tính ra bán kính trái đất ($R$). Dĩ nhiên là ông sẽ dùng phương pháp gián tiếp; tức là đo đạc những vật thể mà ông có thể làm, rồi dùng Toán học để tính ra $R$, nếu cho rằng trái đất là một hình cầu.

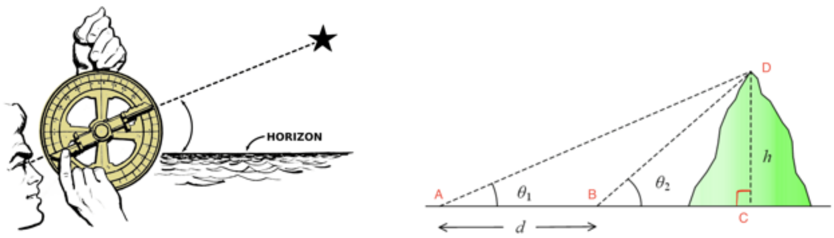
[†]Xác suất một người không có ngày sinh là 6/6 là $p = 364/365$, và vì các người này độc lập nhau, nên xác suất để không ai trong số họ sinh ngày 6/6 là tích của $N$ xác suất $p$, hay $p^N$.




Đầu tiên, ông đo chiều cao của một ngọn đồi gần Pháo đài Nandana ở tỉnh Punjab, Pakistan ngày nay (là $h$ trong hình minh họa). Sau đó, ông đã leo lên đỉnh ngọn đồi để góc $\alpha$ đến đường chân trời. Sử dụng lượng giác và đại số, ông thu được giá trị tương đương với 392 877 dặm Anh, tương đương khoảng 99 phần trăm so với bán kính của Trái đất ngày nay. Chi tiết như sau. Sử dụng định luật sin cho tam giác vuông $OTM$[†], chúng ta có

$$\frac{h+R}{\sin\pi/2} = \frac{R}{\sin(\pi/2-\alpha)} \implies \boxed{R = \frac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

Nếu Al-Biruni biết $h$ và $\alpha$ thì ông có thể tính $R$ dễ dàng. Ông cho biết chiều cao của ngọn núi là $h = 305.1$ mét và góc $\alpha$ là 0,566 7 độ. Sử dụng những dữ liệu này và một máy tính (mà ông không có), mình tính được rằng $R = 6\,238$ km. Và theo Google thì bán kính của Trái đất là 6 371 km. Kết quả của Al-Biruni thật tuyệt diệu.




(a) bàn đo thiên văn (b) đo $\theta_1, \theta_2, d$

Hình 39.10: Cách Al-Biruni đo chiều cao của một ngọn đồi.

Làm thế nào Al-Biruni đo được $h$, chiều cao ngọn đồi? Dĩ nhiên, ông lại làm gián tiếp. Xin xem Hình 39.10b, ông đã đo góc nghiêng của đỉnh núi tại hai điểm khác nhau nằm trên một đường thẳng, $\theta_1$ và $\theta_2$; ông dùng bàn đo thiên văn (Hình 39.10a) cho việc đo góc. Sau đó, ông đã đo khoảng cách $d$ giữa hai điểm này. Cuối cùng, việc áp dụng đơn giản của lượng giác vào 2 tam giác vuông $ADC$ và $BDC$ cho chúng ta chiều cao $h$:

$$d = |AC| - |BC| = \frac{h}{\tan\theta_1} - \frac{h}{\tan\theta_2} \implies h = \frac{d\tan\theta_1\tan\theta_2}{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}$$

Kí hiệu $|AC|$ là chỉ định chiều dài của đoạn thẳng $AC$. Nó có nguồn gốc từ kí hiệu trị tuyệt đối: $|x|$–khoảng cách từ $x$ đến 0.

Như vậy đó, chỉ với các tam giác vuông đơn giản mà Al-Biruni đã tính ra bán kính trái đất cách đây 1000 năm. Các bạn có thể xem nhà Toán học người Anh Hannah Fry (sinh 1984) làm lại 'thí nghiệm' của Al-Biruni tại `https://www.youtube.com/watch?v=ckcdqlo3pYc` bằng cách dùng một tòa nhà cao tầng ở London (thay cho đồi) và ứng dụng *Clinometer* để đo $\alpha$.

# 39.10 Tìm đồng tiền giả

## 39.10.1 Một đồng tiền giả trong tám đồng tiền

"Có tám đồng tiền giống nhau về ngoại hình; và một trong số chúng là tiền giả và được biết là nhẹ hơn so với các đồng tiền thật. Cần ít nhất bao nhiêu lần cân để xác định được đồng tiền giả bằng cân hai mâm mà không quả cân?"

Vì cân không có quả cân nên để biết nặng nhẹ của 1 đồng tiền ta chỉ còn một cách là phải cân với các đồng tiền khác nhau. Vì $8 = 4 \times 2$, ta có thể chia 8 đồng tiền thành 4 cặp, và tiến hành cân

[†] Vì $TM$ là tiếp tuyến, do nó là hướng chân trời. Nếu còn khúc mắc thì xin lên một tòa cao tầng (thật cao) nhìn về một điểm thật xa nào đó trên mặt đất, đó chính là điểm $T$ trong hình.

bốn lần. Chắc chắn trong 4 lần cân đó sẽ có một lần cân mất thăng bằng, và do đó ta biết đồng tiền nào là giả. Dễ quá! Bạn đã quên là bài toán yêu cầu là số lần cân phải ít nhất rồi. Ok. Ta lại có $8 = 2 \times 4$, ta chia 8 đồng tiền thành 2 nhóm (mỗi nhóm có 4 đồng tiền), cân 2 nhóm này. Sau đó ta chọn nhóm nhẹ hơn, chia nó thành 2 cặp, cân 2 cặp này, chọn cặp nhẹ hơn, cuối cùng cân thêm một lần nữa cho cặp nhẹ này, ta sẽ biết chú nào là đồng tiền giả. Đáp án là 3 lần cân!

Đó là lời giải của mình, và khi xem lời giải thì mình biết mình đã ăn mừng hơi sớm. Thật ra, còn có một cách để viết 8: $8 = 2 \times 3 + 2$, do đó ta có thêm một cách nữa: chia 8 đồng tiền thành 3 nhóm, hai nhóm với 3 đồng tiền và nhóm còn lại với 2 đồng tiền. Cân hai nhóm với 3 đồng; có hai khả năng. Nếu chúng bằng nhau, thì đồng xu giả phải ở nhóm 2 đồng, cân thêm một lần nữa là xong. Nếu chúng không bằng nhau, chọn nhóm nhẹ hơn (có 3 đồng). Lấy ra 2 đồng bất kỳ trong 3 đồng này, cân chúng, nếu chúng bằng nhau thì đồng giả là đồng tiền còn lại. Tóm lại, chỉ cần 2 lần cân!

### 39.10.2 Một túi đồng tiền giả

"Có 10 túi với mỗi túi chứa 10 đồng tiền giống nhau. Tất cả đồng tiền trong một trong số 10 túi này là giả, và tất cả đồng tiền trong các túi còn lại là đồng thật. Mỗi đồng tiền thật nặng 10 gram, và mỗi đồng giả nặng 11 gram. Bạn có một cái cân có thể xác định được trọng lượng chính xác của bất kỳ số lượng đồng tiền nào. Cần ít nhất bao nhiêu lần cân để xác định được túi có đồng tiền giả?"

Ta tìm lời giải dựa trên bài đơn giản hơn: có 3 túi, và mỗi túi có 3 đồng tiền. Đồng thật nặng $x$ gram và đồng giả nặng $x + 1$ gram. Trước hết, ta có thể cân ba lần (tức là cân 3 túi, mỗi lần cân một túi) và tìm ra túi nào chứa các đồng tiền giả. Rõ ràng là giọng điệu của câu đố cho ta biết sẽ có lời giải mà số lần cân là ít hơn 3. Làm sao tìm ra nó?

Để số lần cân ít hơn 3 (ít hơn số túi) ta phải cân một lần tất cả các túi. Tại sao lại một lần tất cả ba túi? Vì nếu mỗi lần chỉ cân 2 túi thì ta cần 3 lần cân: cân túi 1, túi 2; cân túi 2, túi 3; và cân túi 3, túi 1. Nhưng rõ ràng nếu ta cân 3 túi cùng lúc với tất cả đồng tiền có trong mỗi túi, ta chẳng thể rút ra kết luận gì cả. Cho nên, số đồng tiền lấy từ mỗi túi để đem đi cân phải khác nhau. Không có cách gì tốt hơn cách từ túi 1 lấy 1 đồng, từ túi 2 lấy 2 đồng, và từ túi 3 lấy 3 đồng. Cân chúng và giả sử con số trên cân cho ta: $6x + 3$, tức là $x + 2x + (x + 1) + (x + 1) + (x + 1)$, nghĩa là túi 3 chứa các đồng tiền giả. Tương tự, nếu con số trên cái cân là $6x + 2$ thì túi 2 chứa các đồng giả. Và cách giải này áp dụng cho 10 túi hay 100 túi.

Trên đây chỉ là một số bài tập cho các bạn trẻ luyện tập cái não. Một điều các bạn có thể thấy là sau khi đọc lời giải thì chúng ta thấy không khó. Nhưng mà cái khó là tại sao ta lại không thấy/nghĩ ra được lời giải. Đó là sự khác biệt lớn giữa người tự tìm ra lời giải và người chỉ quen xem lời giải người khác. Những người tự tìm ra lời giải, không phải họ quá thông minh so với ta, mà là họ không có thói quen nhìn lời giải; họ muốn chính bản thân làm. Và từ những bài tập nhỏ như thế này, họ tạo thành thói quen giải quyết vấn đề mà chưa có lời giải.

Ngày 15 tháng 7 năm 2023

# Chương 40

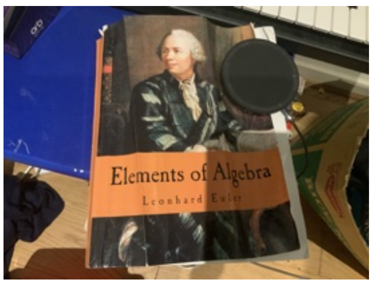
# Leonhard Euler

Ai mà đã học Toán thì không thể không biết tới công thức thần sầu quỹ khốc: $e^{i\pi} + 1 = 0$. Tác giả của nó không ai khác chính là Leonhard Euler (1707–1783), nhà Toán học vĩ đại người Thụy Sỹ, người mà làm Toán nhưng không nhìn thấy được Toán của mình.

Trong bài này mình xin trình bày một vài mẫu chuyện về Euler (đọc là Oi lơ), dịch từ sách *Dr Euler's fabulous formula* của kỹ sư điện Paul Nahin. Nahin là tác giả yêu thích của mình, và là nguồn khích lệ cho mình; rằng kỹ sư cũng viết về Toán được. Và nhà văn cũng được. Why not? Câu chuyện đầu tiên là về kinh nghiệm học Toán của Euler. Ông viết trong tự truyện của ông viết cho con trai cả: "Tôi nhanh chóng tìm thấy cơ hội được giới thiệu với một giáo sư nổi tiếng Johann Bernoulli ... Đúng là ông ấy rất bận nên đã thẳng thừng từ chối dạy riêng cho tôi; nhưng ông ấy đã cho tôi nhiều lời khuyên quý giá hơn để bắt đầu tự mình đọc những cuốn sách toán học khó hơn và nghiên cứu chúng một cách chăm chỉ nhất có thể; nếu tôi gặp trở ngại hoặc khó khăn nào đó, tôi được phép tự do đến thăm ông vào mỗi chiều thứ Bảy và ông đã tận tình giải thích cho tôi mọi điều tôi không thể hiểu được ... và đây chắc chắn là phương pháp tốt nhất để thành công trong các môn toán."

Nơi ông làm việc đầu tiên là Viện Hàn lâm Khoa học Hoàng gia Nga ở St. Petersburg. Viện này được thành lập bởi Peter Đại đế vào năm 1724. Tại sao có Viện này? Chuyện là nước Nga muốn trở thành siêu cường nên bắt chước Pháp và Anh. Năm 1733 là năm viên mãn của Euler. Ông thay thế Daniel Bernoulli (con trai út của Johann Bernoulli) làm nhà toán học hàng đầu của Học viện St. Petersburg và ông cưới bà Katharina Gsell (1707-1773), con gái của một họa sĩ dạy ở trường trực thuộc Học viện. Sự kiện này được tổ chức bởi một nhà thơ của Viện hàn lâm, và nhà thơ này làm bài thơ sau về Euler:

Có ai có thể nghĩ được thế,
Rằng Euler của chúng ta cũng biết yêu?
Ngày đêm anh không ngừng suy nghĩ.
Làm thế nào anh ấy muốn nhiều hơn để tính toán số...




Nhưng Euler không phải lúc nào cũng nghĩ đến các con số: đứa con đầu lòng trong số mười ba đứa con của Euler chào đời ngay vào cuối năm sau. Mười ba người con! Và Euler chỉ viết 500 sách và báo về Toán thôi. Nếu con số 500 chưa làm bạn giật mình thì xin thưa rằng chỉ riêng Euler đã đóng góp 1/3 côngn trình Toán học từ 1726 to 1800. Thậm chí sau khi ông chết, ông vẫn xuất bản! Vì vậy mà Laplace nói như thế này: *"Đọc Euler, đọc Euler, ông ấy là bậc thầy của tất cả chúng ta."* Mà Laplace không phải thằng Tèo thằng Tí. Ông được người Pháp gọi là "Newton của nước Pháp"! Nghe theo Laplace, mình đã mua quyển sách do Euler viết (xem hình). Mặc dù là siêu cao thủ, ông viết rất dễ hiểu! Newton của nước Pháp nói quả không ngoa!

Vậy Euler trở nên nổi tiếng lúc nào và như thế nào? Đó là lúc ông 27 tuổi và nhờ bài toán Basel. Bài toán Basel lần đầu được đặt ra bởi nhà toán học và linh mục người Ý Pietro Mengoli

(1626 - 1686) vào năm 1650. Bài toán Basel yêu cầu tính tổng chính xác của nghịch đảo bình phương của các số tự nhiên, tức là tổng chính xác của dãy vô hạn:

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \cdots = ? \tag{40.1}$$

Bài toán này đã đứng vững trước sự tấn công của các nhà toán học hàng đầu của thời đại (Leibnitz, các anh em Bernoulli, Wallis). Jacob Bernoulli, thể hiện sự bực tức phải thốt lên "Nếu ai đó thành công trong việc tìm ra điều mà cho đến nay đã chống lại sự nỗ lực của chúng ta và truyền đạt nó cho chúng tôi, chúng tôi sẽ biết ơn rất nhiều người đó". Trước tiên Euler tính ra được $S = 1.6449340668482264$ (chú ý rằng Euler không có máy tính và ông phải phát triển công thức mà sau này được gọi là Euler-Maclaurin để tính $S$; bạn thử dùng máy tính tính thử được $S$ với chừng đó số thập phân không). Sau đó ông còn đoán đúng và chứng minh rằng $S$ không phải là gì hết, mà chính là $\pi^2/6$, tức là:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \tag{40.2}$$

Không ngạc nhiên bài này đã mang lại cho ông sự nổi tiếng ngay khi ông mới 28 tuổi. Vấn đề này, sau đó, được đặt tên theo Basel, quê hương của Euler cũng như của gia đình Bernoulli, người đã không thành công trong việc giải quyết vấn đề này.

Khi Euler thông báo kết quả này cho Johann Bernoulli, Johann đã phải thốt lên đầy tiếc nuối "Ước chi anh trai của tôi còn sống", vì anh ông, Jacob Bernoulli người rất muốn biết lời giải, đã qua đời quá trẻ vào năm 1705. Có gì ở Eq. (40.2) mà hấp dẫn vậy? Thứ nhất đó là ám ảnh đối với các nhà Toán học (họ không chịu nổi việc không tìm ra kết quả). Thứ hai, đó là một liên hệ không ngờ giữa $1, 1/4, 1/9, \ldots$ và $\pi$. Tại sao $\pi$ lại ở đây? Có hình tròn không? Toán học chứa đựng rất nhiều liên hệ đầy bất ngờ như vậy. Tiếc là ở trường cấp 2/3 thì ít khi học sinh được dạy những thứ này.

Sau khi làm ở Viện Hàn lâm Khoa học Hoàng gia Nga ở St. Petersburg thì điểm dừng chân tiếp theo của Euler là Viện Hàn lâm Khoa học Berlin, do quốc vương Phổ Frederick II "Đại đế" mới thành lập. Mình thực sự sốc khi đọc về cách Frederick II này nhìn về viện hàn lâm do chính mình lập ra. Trong một bức thư đề ngày tháng 7 năm 1737, gửi cho Voltaire, Frederick đã viết rằng "một vị vua cần duy trì Viện Hàn lâm Khoa học cũng như một cận vệ của đất nước cần một đàn chó." Chu cha. Mặc dù nói như vậy, kế hoạch của Frederick là, ông này viết cho Voltaire: "*triết học, lịch sử, thơ ca, âm nhạc. Về toán học, tôi thú nhận với bạn rằng tôi không thích nó; nó làm đầu óc khô cạn*". Frederick II còn nói thế này về Toán học: "*Một nhà đại số học bị nhốt trong tủ của mình, không thấy gì ngoài những con số và mệnh đề, những thứ không tạo ra hiệu quả gì trong thế giới đạo đức. Sự tiến bộ của cách cư xử có giá trị đối với xã hội hơn tất cả các tính toán của Newton.*" Ấy vậy mà Frederick II chính là quốc vương mà Euler phải cúi mình! Chúng ta biết đến lí do tại sao Euler chấp nhận đến Berlin sau khi ông đến Berlin vào cuối tháng 7 năm 1741. Lúc đó mẹ của Frederick, bối rối không hiểu tại sao Euler có vẻ không muốn trả lời dài dòng bất kỳ câu hỏi nào, đã thẳng thừng hỏi ông tại sao ông lại quá dè dặt, gần như rụt rè, trong bài phát biểu của mình. Câu trả lời của Euler cũng thẳng thừng không kém: *"Thưa hoàng thái hậu, đó là vì tôi mới đến từ một đất nước nơi mọi người nói đều bị treo cổ."*

Có lẽ một dấu hiệu thực sự của sự nổi tiếng, là khi mọi người bắt đầu bịa chuyện về bạn. Có một ví dụ nổi tiếng về điều này, ít nhất là nổi tiếng trong thế giới toán học, trong trường hợp của Euler. Chuyện kể rằng khi triết gia người Pháp Denis Diderot đến thăm Tòa án Nga, ông đã trò chuyện rất thoải mái và sôi nổi với các thành viên trẻ hơn của Tòa án về nhiều đề tài chủ nghĩa vô thần. Tại đó, Diderot được thông báo rằng một nhà toán học uyên bác đang sở hữu một chứng minh đại số về sự tồn tại của Chúa, và sẽ đưa nó cho anh ta trước Tòa án, nếu anh ta muốn nghe nó. Diderot đồng ý. Sau đó, Euler tiến về phía Diderot và nói một cách nghiêm túc với giọng điệu hoàn toàn tin tưởng: "Thưa ông, $a + b/n = x$, và vì vậy Chúa tồn tại. Trả lời đi!" Diderot, người mà đại số như tiếng Hờ mông, cảm thấy xấu hổ và bối rối, trong khi những tràng cười rộ lên từ mọi phía. Ông xin phép trở lại Pháp ngay lập tức!

Giờ thì xin mời mọi người cùng thưởng thức lời giải của Euler cho bài toán Basel. Từ chuỗi lũy thừa của $\sin(x)$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

ta viết ${}^{\sin x}/_{x}$ như sau:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \left(\frac{1}{3!}\right)x^2 + \left(\frac{1}{5!}\right)x^4 + \cdots \tag{40.3}$$

Ở vế phải ta có một đa thức ... vô hạn. Giờ thì ta quay lại với đa thức hữu hạn mà ta quen thuộc, ví dụ $p(x) = 1 - {}^{5x}/_{6} + {}^{x^2}/_{6}$. Vì $p(x) = 0$ có 2 nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = 3$, ta có thể viết $p(x)$ theo một cách khác như sau

$$p(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{3}\right)$$

Tức là ta đã phân tích đa thức $p(x)$ thành dạng tích của các thừa số tuyến tính theo các nghiệm của nó. Giờ Euler cũng làm điều tương tự cho đa thức vô hạn ${}^{\sin x}/_{x}$ (dù ông không chắc chắn điều này có thể làm được hay không!, cứ làm thôi, toán là của bạn, thích làm gì thì làm)†.

Vì các nghiệm khác không của ${}^{\sin x}/_{x} = 0$ là $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, v.v, ta viết ${}^{\sin x}/_{x}$ thành

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdots \\ &= 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots\right)x^2 + \cdots\end{aligned} \tag{40.4}$$

Bằng cách so sánh hệ số cho $x^2$ trong Eqs. (40.3) and (40.4), ta thu được

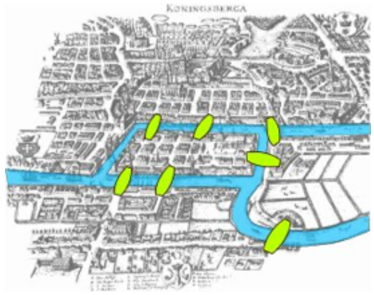
$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots = \frac{1}{3!}$$

Nhân 2 vế của phương trình với $\pi^2$, Euler đã tìm ra lời giải của bài Basel. Và với món đồ chơi mới này, Euler tiếp tục và tính toán các tổng sau đây (lưu ý rằng tất cả đều liên quan đến lũy thừa chẵn)

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots &= \frac{\pi^2}{6} \quad \text{(lũy thừa 2)}\\ 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \cdots &= \frac{\pi^4}{90} \quad \text{(lũy thừa 4)}\end{aligned}$$

Nhưng Euler và không ai sau ông có khả năng giải quyết tổng với lũy thừa lẻ. Ví dụ, $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} \cdots$ là gì? Có thể là ${}^{\pi^3}/_{n}$ không? Không ai biết.

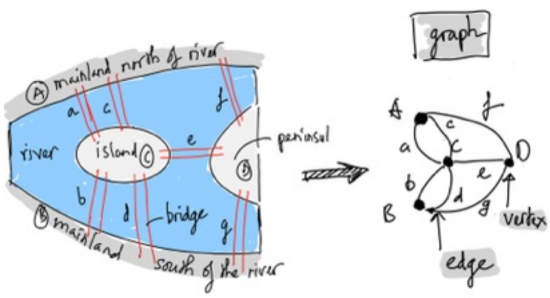
†Mãi 100 năm sau Euler, nhà toán học người Đức Karl Weierstrass (1815 – 1897), cha đẻ của giải tích hiện đại, đã chứng minh rằng biểu diễn của Euler về hàm sine dưới dạng một tích vô hạn là hợp lệ, thông qua định lý phân rã Weierstrass.



Bây giờ là câu chuyện 7 cây cầu ở Königsberg và Leonard Euler và lý thuyết đồ thị. Thành phố Königsberg ở Phổ (nay là Kaliningrad, Nga) chia làm hai bởi con sông Pregel, và bao gồm hai đảo lớn— Kneiphof và Lomse — được kết nối với nhau, và đến hai phần đất liền của thành phố, bằng bảy cây cầu. Theo truyền thuyết, các công dân của Königsberg từng dành những buổi chiều Chủ nhật để dạo quanh thành phố xinh đẹp của họ. Trong khi đi bộ, người dân thành phố quyết định tạo ra một trò chơi cho chính họ: trò chơi là nghĩ ra một cách mà họ có thể đi bộ quanh thành phố, băng qua mỗi cây cầu trong số bảy cây cầu chỉ một lần. Hơn nữa, có thể bắt đầu từ một nơi và kết thúc cuộc dạo chơi ở một nơi khác. Mặc dù không một công dân nào của Königsberg có thể phát minh ra một tuyến đường cho phép họ đi qua mỗi cây cầu chỉ một lần, họ vẫn không thể hiểu tại sao điều đó là không thể.

May mắn cho họ, Königsberg không quá xa St. Petersburg, nơi Euler đang sống. Carl Leonhard Gottlieb Ehler, thị trưởng của Danzig, đã hỏi Euler một giải thích cho vấn đề này vào năm 1736. Và đây là những gì Euler trả lời : "Vì vậy, ngài thấy đấy, thưa ngài cao quý, bài toán bảy cây cầu này có ít mối quan hệ với toán học, và tôi không hiểu tại sao ngài lại mong đợi một nhà toán học có thể giải quyết nó, chứ không phải bất cứ ai khác" Mặc dù Euler nhận thấy vấn đề này thật tầm thường, nhưng ông vẫn bị hấp dẫn bởi nó. Trong một bức thư được viết cùng năm cho nhà toán học và kỹ sư người Ý Giovanni Marinoni, Euler viết, "Câu hỏi này thật tầm thường, nhưng đối với tôi dường như đáng chú ý ở chỗ cả hình học và đại số cũng không, thậm chí cả nghệ thuật đếm cũng không đủ để giải nó."

Và như thường lệ, khi Euler đã chú ý đến một vấn đề, ông sẽ xử đẹp nó. Vì cả hình học và đại số (nói cách khác là toán học hiện tại không đủ để giải quyết vấn đề này), trong quá trình đó, ông đã phát triển một phép toán mới, mà bây giờ chúng ta gọi là lý thuyết đồ thị (Hình 40.1). Euler là nhà Toán học mà vừa bồng con và vừa giải Toán. Nhiều công trình Toán học của ông viết lúc ông bị mù hai mắt. Vì vậy người ta có câu: "Beethoven không thể nghe nhạc của mình. Tương tự như vậy, Euler không thể nhìn thấy các tính toán của mình."




Hình 40.1

Lý thuyết đồ thị đã bắt đầu như thế đó, rất tầm thường. Vậy mà ngày này nó được sử dụng để mô hình hóa nhiều loại quan hệ và quá trình trong hệ thống vật lý, sinh học, xã hội và thông tin.

Ngày 7 tháng 9 năm 2023

# Chương 41

# Luật Goodhart

SAU một thời gian chìm đắm trong đời, Phính mới phát hiện ra một quy luật: "Life is so easy with nice people" Ông sếp nghe xong thì bảo, mày quên KPI (*Key Performance Indicator*) rồi hả Phính. Một câu trên là không đủ đâu nhé. Trả cho mày một mớ tiền mà làm ăn thế hả? Phính về phòng suy nghĩ mãi mà không ra thêm một chân lý nào cả. Gần đến ngày phải báo cáo cho sếp, tự nhiên nhờ trời độ, Phính cho ra luôn mấy cái chân lý: "Life is hard with bad people" "Life is not easy with not-nice people" "Life is very very easy with good people" ... Sếp bảo: "chục chân lý luôn hả Phính, thỏa KPI rồi, năm sau cứ như vậy nhé".

Có một câu chuyện thật ở nước Mỹ giàu có và hùng mạnh như sau[†]. Một cựu cảnh sát đi dạy học tại một trường cấp hai trong một khu dân cư bị ảnh hưởng bởi nghèo đói, lạm dụng ma túy và gia đình tan vỡ. Học sinh trong trường học kém, và trường có nguy cơ bị đóng cửa nếu điểm kiểm tra của học sinh không được cải thiện. Vì vậy, trong sáu tuần trước khi các bài kiểm tra đọc và viết tiếng Anh tiêu chuẩn được tổ chức, hiệu trưởng của trường đã hướng dẫn các giáo viên tập trung toàn bộ thời gian trên lớp vào việc luyện tập cho các bài kiểm tra, bỏ qua hoàn toàn các môn học khác. Chiến lược được gọi một cách hoa mỹ là "điều chỉnh chương trình đào tạo". Tuy nhiên tên đúng phải là "dạy để qua các bài kiểm tra", và nó giống như đánh lừa các số liệu thống kê. Đây là một cách mà các tổ chức bị biến chất, đã chuyển hướng khỏi mục đích thực sự của tổ chức (là giáo dục) để đáp ứng các mục tiêu số liệu mà sự tồn tại của nó phụ thuộc vào đó.

Bây giờ xin mời mọi người quay sang nước Anh–cũng hùng mạnh không kém. Ở đó, Jed Mercurio, một cựu bác sĩ bệnh viện, đã viết ra bộ phim truyền hình tên *Bodies*, có hoàn cảnh tại khoa sản của một bệnh viện (Muller, 2018). Trong tập đầu tiên, một bác sĩ phẫu thuật cấp cao mới đến thực hiện ca phẫu thuật cho một bệnh nhân mắc các bệnh phức tạp, sau đó người bệnh nhân không may qua đời. Biết vậy, đối thủ của anh ta đưa ra lời khuyên như sau: "Bác sĩ phẫu thuật siêu hạng sử dụng khả năng phán đoán vượt trội của mình để tránh mọi tình huống có thể thử thách khả năng vượt trội của anh ta." Đó là, anh ta tránh những trường hợp khó khăn như một cách để duy trì tỷ lệ thành công của mình. Một chiến lược cổ điển là "làm kem", nghĩa là tránh các trường hợp rủi ro có thể có tác động tiêu cực đến hiệu suất được đo lường của một người. Cái giá của chiến thuật này là những bệnh nhân có nguy cơ cao bị phẫu thuật thất bại sẽ gần như chết vì không bác sỹ nào dám phẫu thuật họ! *Bodies* là một bộ phim truyền hình về y học, nhưng những hiện tượng mà nó miêu tả lại tồn tại trong thế giới thực.

Trên đây là những bằng chứng thực, hùng hồn cho cái gọi là luật Goodhart[††]. Trong tiếng Anh nó phát biểu như sau: "*When a measure becomes a target, it ceases to be a good measure*", hay (tạm dịch) "Khi một tiêu chí trở thành mục tiêu, nó không còn là một tiêu chí tốt".

Hai câu chuyện kể trên không là trường hợp cá biệt. Bây giờ, ở bất cứ tổ chức nào, mọi người đều bị đánh giá dựa trên tiêu chí. Ví dụ, người làm nghiên cứu như Phính này, thì bị đánh giá dựa

[†]Nguồn: cuốn *The Tyranny of Metrics*, của Jerry Z. Muller (Muller, 2018).

[††]Được đặt theo tên của nhà kinh tế người Anh Charles Goodhart, người được ghi nhận đã diễn đạt ý chính của luật này trong một bài báo năm 1975 về chính sách tiền tệ tại Vương quốc Anh.

trên số bài báo xuất bản trong một năm. Do đó nhà nghiên cứu bổng nhiên trở thành người viết báo. Viết mà không quan tâm bản chất vấn đề, viết càng nhiều ta càng giỏi! (Dĩ nhiên cái gì cũng có ngoại lệ, mình nói số đông). Bác sỹ phẩu thuật thì bị đánh giá dựa trên số ca sống sót (dù họ chỉ chọn ca dễ thôi!). Người làm độc lập như youtuber hay tictoker thì 'câu view'.

Thêm một ví dụ nữa nè. Ở Anh, trong nỗ lực giảm thời gian chờ đợi tại các khu cấp cứu, Bộ Y tế đã áp dụng chính sách phạt các bệnh viện có thời gian chờ đợi lâu hơn bốn giờ. Chương trình đã thành công–ít nhất là trên bề mặt. Trên thực tế, một số bệnh viện đã phản ứng bằng cách để bệnh nhân đến xếp hàng chờ xe cấp cứu, bên ngoài cửa bệnh viện, cho đến khi nhân viên tin tưởng rằng bệnh nhân có thể được khám trong vòng bốn giờ quy định sau khi nhập viện (Muller, 2018). Vậy tại sao chúng ta–những người luôn tự hào mình là động vật thông minh nhất–lại rơi vào cái tình cảnh này? Jerry Z. Muller đã có câu trả lời trong cuốn sách của mình. Tiếc là dù biết là vậy, mọi người vẫn vũ như cẩn!

Chúng ta, những người bình thường, không có quyền lực để thay đổi một hệ thống, thì chúng ta làm gì? Chúng ta nên đọc sách nhiều, nên học thống kê (ngày nay có người nói thống kê quan trọng hơn giải tích), VÀ CUỐI CÙNG KHÔNG NÊN TIN VÀO CÁC CON SỐ MỘT CÁCH MÙ QUÁNG. Phính ơi, nói dễ mà làm khó. Bạn nói đúng, chúng ta chỉ có các con số thôi, không dùng nó để lựa chọn thì còn dùng cái gì? Hehe, Phính cũng không biết; viết ra chỉ mong các bạn để ý cái luật Goodhart này. Tuy nhiên, đối với youtuber, tictoker thì không khó. Dù youtuber có 100 triệu người xem, chúng ta cũng không tin sái cổ. Phải xem bằng chính hai con ngươi của bạn, rồi đưa ra nhận xét của riêng bạn: youtuber đó good hay bad. Đi học là để có cái suy nghĩ đó. Nếu không có thì bị lừa thôi.

Một chuyện rất vô lý mà tiêu chí gây ra là thế này. Có tiêu chí thì phải có dữ liệu (data) mà muốn có dữ liệu thì phải có người thu thập chúng. Thế là (lấy bối cảnh là trường đại học), trường đại học phải thuê rất nhiều người làm việc thu thập dữ liệu. Cái này dẫn đến việc sinh viên phải đóng học phí cao hơn (để trả tiền cho mấy vị ngồi làm dữ liệu!). Mấy vị giảng viên cũng bị ảnh hưởng. Nhiều khi, những vị làm dữ liệu này còn bày nhiều trò và cuối cùng giảng viên đại học phải chạy theo họ!!! Vì răng? Vì họ là người đặt ra tiêu chí mà, không theo họ thì bạn không 'perform' tốt, có nguy cơ out of the game. Như vậy, người không đích thân giảng dạy, lại nghĩ ra cách dạy thế nào cho tốt. Đúng là ngu ngốc hết sức. Thanh quan ngày xưa, nếu rơi vào tình huống này, sẽ từ chức về quê sống ở ẩn. Phính này, dù cũng muốn làm thanh quan, cũng không thể làm vậy. Xã hội chúng ta phát triển như vậy sao?

Ngày 10 tháng 10 năm 2023

# Chương 42

# Mình học tiếng Anh như thế nào?

THẬT ra mình chưa viết về cái đề tài này vì mình nghĩ thế hệ sau mình phải giỏi tiếng Anh hơn mình cả 100 lần. Ai cần anh Phính chém nữa. Nhưng không hẳn vậy, vì có người đặt câu hỏi cho mình là làm sao cải thiện tiếng Anh (dù người đó chắc là muốn hỏi về writing).

Whatever, mình vẫn chém thôi.

Xưa thật là xưa thì ba mình làm nghề cho khách nước ngoài thuê xe máy. Nhưng ông không biết tiếng Anh mà chỉ biết sơ sơ tiếng Pháp. Có lẽ do thấy mình bị thiệt thòi trong công việc và không muốn thằng con cũng chịu cảnh đó sau khi lớn lên, ông cho mình đi học tiếng Anh từ rất sớm. Mình thì dễ nuôi lắm: cho chi ăn nấy, sai chi làm nấy, và ... không sai thì không bao giờ làm.

Mình đi học thêm tiếng Anh năm lớp 5 hay 6 gì đó. Học lớp thầy Nguyễn B là thầy dạy tiếng Anh có tiếng ở Huế. Ông này đi học ở Úc về, và có óc khôi hài nên dạy rất hay. Kiểu như ông nói: see you again, rồi lại nói see you cả gèn. Dễ nhớ! Mình học ông không lâu, không biết vì sao. Có lẽ học phí cao? Sau khi không đi học thầy B thì mình đi học thêm cô Dung là cô dạy tiếng Anh trên lớp mình ở trường Nguyễn Chí Diểu (NCD).

Mình còn nhớ rõ là quyển sổ ghi thuốc của khoa Dược bệnh viện Huế, mà mẹ mình mang về, rất to và dày. Thế mà mình ghi đầy nó, kiểu như:

go went gone, go went gone, go went gone
eat ate eaten, eat ate eaten, eat ate eaten
do did done, do did done, do did done

Nhàm chán như vậy đó mà không hiểu nguyên cớ chi mà mình ngày nào cũng làm. Còn có thi đấu nội công với các bạn nữ nửa chứ. Trong xóm ga nhà mình có bạn Hoa rất dễ thương và thích tiếng Anh và cũng hiếu chiến. Hoa và mình hay thi xem ai biết nhiều từ vựng hơn. Cũng vui. Về mặt từ vựng như thế tạm ổn còn về ngữ pháp thì sao? Lúc đó Toán mình còn yếu lắm nhưng mà mình thấy ngữ pháp tiếng Anh nó rất logic. Ví dụ: "I go, we go" nhưng "He goes, she goes". À, như vậy thì chỉ việc lấy GO, và thêm ES cho he/she. Có quy luật thì rất dễ! Vì mình là người dễ nuôi mà. Trái lại, bạn nào bướng một tí thì không học được. Kiểu như: tại sao không là He go, và I goes???

Có một chuyện tình cờ mà mình nghĩ có liên quan tới việc mình thích tiếng Anh. Nhà mình không ở đâu ở Huế mà ở ngay ga Huế. Ở đây thì không có chi đặc biệt đối với mọi người, nhưng với mình thì lại rất chi là cơ duyên. Số là khách du lịch nước ngoài hay dùng tàu lửa để đi lại nên ở ga Huế rất nhiều những vị này. Mà con nít thời đó rất thích họ, cứ "hello, hello" và chạy theo. Mình thì không bao giờ như vậy vì mình nhút nhát, nhưng mà mình có Đồ Long Đao. Thế là đám nhóc cùng xóm nói "Phính, tới chém gió với mấy ông Tây đi". Thấy mình không nhúc nhích, tụi nó đẩy mình tới gần mấy bà đầm. Thì tới gần rồi thì Phính mình rút đao Đồ Long chém thôi. Nhiều khi tàu trể tới 5 giờ đồng hồ là mình nói chuyện cả 5 tiếng. Không biết nói chi, không nhớ nổi. Ngoài nguồn Tây từ ga Huế mình còn có thêm mấy vị da trắng từ ba mình, vốn làm nghề cho khách du lịch thuê xe máy (Hình 42.1a). Hồi đó ba mình hay chở mấy vị này về nhà chơi; có anh Robert người Anh mê mệt dì Nghi nhà mình (Hình 42.1b). Chú này thấy dì Nghi mặc áo dài đẹp quá chạy từ Huế lên tận Gia Lai để cua. Có lẽ chú tấn công vũ bão như đội tuyển bóng đá Braxin nên dì mình sợ, rồi lấy một chú Việt Nam.

Có lẽ những lúc nói chuyện như vậy làm mình cảm thấy hữu dụng nên mình thích học tiếng Anh chăng? Không biết được.

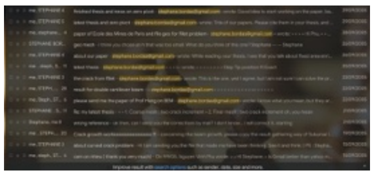
(a) Robert người Anh (b) Karen người Úc ở nhà ôn nội mình

Hình 42.1

Ngoài việc đi học thêm cô Dung, như là chưa đủ, mình còn đi học thêm buổi tối ở trung tâm Ngoại ngữ Cenlet. Tới lớp 9 thì mình đã lấy bằng A, B, C. Mà cái bằng C này là có sự giúp đỡ lúc thi: môn nghe của mình yếu xìu, mấy anh sinh viên làm hộ.

Mình học tiếng Anh sớm như vậy, học chăm như vậy, lại có mấy ông Tây bà đầm cho mình chém, thì không khó cho mình học giỏi tiếng Anh nhất lớp và có thể là nhất trường NCD. Với sự tự tin cao độ như vậy, cùng với thanh đao Đồ Long (chưa kể là dì Nghi của mình là sinh viên khoa Anh, cho mình thêm tài liệu tham khảo), mình đi dự đại hội võ lâm, với ước mơ làm bá chủ. Mà đời không như là mơ. Mình không có giải nào cả, dù là giải khuyến khích. Thì ra dù không ở ga Huế, nhiều bạn chuyên Anh trường Nguyễn Tri Phương giỏi hơn mình nhiều. Có lẽ từ đây mà mình ấn tượng các bạn chuyên, và sau đó là thần tượng Thảo.

Không biết anh Phính buồn có lâu không, và không biết ai xúi, mà anh đổi kèo. Anh chuyển qua luyện Tịch Tà Kiếm Pháp, rồi vào Hai Bà Trưng. Suốt 3 năm cấp 3 anh không đụng tới tiếng Anh, chỉ có Toán Lý Hóa thôi. Thế mà vẫn nhất (hay nhì) lớp môn này. Anh quả thật có nền tảng tiếng Anh tốt.



Vào đại học, vì ham tiền, mình chọn lớp tiếng Pháp, thế là gần 5 năm đại học không đụng tới English. Sau đó mình vào cao học Việt-Bỉ, và cơ duyên với tiếng Anh lại nối tiếp ở đây. Lần đầu tiên trong đời mình được đọc tài liệu tiếng Anh. Sách gốc chứ không phải bản copy nhé. Mình mê tủ sách của chương trình cao học Việt-Bỉ lắm. Rồi được nghe GS Pháp/Bỉ nói tiếng Anh (ngộ ngộ nhưng dễ hiểu cho mình). Rồi thì viết luận văn bằng tiếng Anh, nhất là một năm trao đổi email với Stéphane Bordas bằng tiếng Anh (xem hình). Tất cả những cái đó cải thiện khả năng viết, đọc tiếng Anh, mặc dù giờ xem lại các email và luận văn thạc sỹ, thấy buồn cười lắm.

Thời ở TU Delft thì mình may mắn có người chơi thân là Oriol–người Tân Ban Nha và đến từ thành phố Barcelona. Vâng, là thành phố có câu lạc bộ FC Barcelona huyền thoại đó. Đi chơi, nói chuyện với Oriol cải thiện khả năng nói English của mình. Văn phạm thì mình ok từ xưa rồi. Viết lách thì tàm tạm; mình hay chú ý lúc đọc sách báo thấy câu nào hay thì cho vào sổ tay, để sau này dùng. Chỉ còn nghe là một vấn đề nhức nhối.

Có một câu chuyện rất vui như sau. Một hôm mình đang ở văn phòng làm việc thì có một chú da đen đi vào, tới trước mặt mình và nói một tràng tiếng ... Hờ mông. Mình không hiểu mô tê chi cả. Chú lặp lại vài lần, khi thấy mình vũ như cẩn, chú hiểu mình không biết tiếng Hờ mông, chú nói tiếng Việt, đại loại: "Tau là X, chúng ta đã trao đổi email lâu nay. Giờ nhân tau tới TU

Delft phỏng vấn, tạt ngang thăm Phính một tí." Mình thở phào và cả hổ thẹn. Đó là lúc mình biết mình phải hành động. Không thể lập lại cái kinh nghiệm hổ thẹn này nữa. (Một số người Việt để tránh rơi vào hoàn cảnh đáng thương như mình chọn giải pháp 'an toàn': họ luôn nói 'yes', 'yes' và 'yes' khi chưa hiểu bên kia nói gì. Đây không phải là giải pháp tối ưu. Cứ đối diện với sự thật và làm gì đó.)

Sau Tịch tà thì mình luyện Hấp Tinh Hóa Công Đại Pháp.

Không biết ai chỉ cho, mình mua file mp3 chương trình 'Effortless english' của AJ Hoge (https://www.youtube.com/@effortlessenglishbyajhoge), bỏ vào điện thoại và lúc nào cũng nghe nó. Ví dụ lúc đi xe đạp từ trường về nhà hay ngược lại... Và mình cố tình xem phim Mỹ rất nhiều, vừa giải trí vừa học English. Ngoài ra mình còn cố gắng không đọc báo tiếng Việt. Tức là mình cố ép mình vào thế giới tiếng Anh, đó là cách học English tốt. Mình có người bạn học MIT, bạn này thậm chí khuyên mình "đi nước ngoài thì tránh người Việt". Quả thật tiếng Anh bạn đó rất siêu. Đây là lựa chọn cá nhân tùy vào mỗi người, mình chia sẻ mọi người tham khảo thôi. Nếu để ý một tí thì các bạn sẽ thấy các tài liệu tham khảo trong sách này toàn là tài liệu tiếng Anh dù một số đã có bản tiếng Việt. Tại sao mình phải vất vả đọc sách tiếng Anh thay vì chọn việc dễ dàng hơn là đọc tài liệu tiếng mẹ đẻ? Mình cố ép mình như vậy. Hơn nữa đọc sách thì nên đọc sách gốc, ai bảo đảm sách dịch còn nguyên ý của tác giả?

Thời gian ở Mỹ là tuyệt vời nhất cho việc học tiếng Anh. Mình xem CNN mỗi tối. Tiếc là mình không có bạn chơi người Mỹ và ở đó chỉ có 6 tháng nên trình cũng không lên là bao.

Những tưởng English với mình chỉ có vậy thôi thì đùng một cái năm 2017 mình phải thi PTE! Mình ghét thi vô cùng. Nhưng mà đây là lệnh của sếp bự. Vậy là học ôn để thi. May mà chính phủ Úc không yêu cầu PTE cao (5.5 hay 6 gì đó) cho giảng viên, thế là ôn xong, đi thi và ... tạ trời đất, mình đậu. Cái bằng PTE này là để chứng minh mình sống sót được ở xứ Kanguru. Úc lo xa quá cả ngày tui dùng tiếng Việt không à.

Và điều cuối cùng mình muốn chia sẻ là mình chưa bao giờ suy nghĩ bằng tiếng Việt trước rồi mới dịch sang tiếng Anh. À, còn điều này nữa: mình cũng hay nói tiếng Anh với anh Phính, đó là một cách học hay vì không phụ thuộc vào ai cả. Anh Phính luôn sẵn sàng nói với mình. ngày hay đêm.

Như vậy mình không có bằng TOEFL cũng như IELTS. Mình không thi để lấy chúng là vì mình không nghĩ có ngày Phính này đi nước ngoài. Mặc dù vậy không phải ai có TOEFL thì giỏi tiếng Anh hơn mình. Làm như mình thì có 2 điều không hay: khó xin học bổng đi du học (ĐH, cao học, TS) và từ vựng rất hạn chế. Viết tới đây mình phải cảm ơn TU Delft đã không thèm quan tâm tới bằng cấp Anh văn. I like it! Hơn nữa, Học như vậy thì đủ dùng thôi, không thể nào bắn tiếng Anh được. Nhưng mà mình chưa bao giờ có mục đích phải bắn tiếng Anh cả.

Học tiếng Anh thời nay phải khác thời mình. Mình đề nghị một cách học mà bạn không tốn một xu (trừ tiền internet) như sau. Bạn học văn phạm với ChatGPT[*], học nói và nghe trên Youtube. Có nhiều kênh lắm, mình dùng kênh này https://www.youtube.com/@SpeakEnglishWithVanessa và thấy rất ok (mình vẫn học tiếng Anh, phần nghe, dù không thường xuyên). Nếu có thể thì bạn đi gặp mấy ông Tây mà nói chuyện trực tiếp với họ[††]. Ngoài ra xem phim Holywood cũng là một cách học nghe rất hiệu quả; trong đó bộ phim hài *Friends*[†] với những Jennifer Aniston là một bộ phim hay và tốt cho học tiếng Anh. Chỉ cần mỗi ngày học tiếng Anh một giờ thôi, nhưng ngày nào cũng duy trì như vậy trong một thời gian dài, chắc chắn tiếng Anh của bạn sẽ ok. Đừng học kiểu cảm hứng: hôm ni học cả ngày, rồi cả tuần sau mới học lại. Một lời

[*] Xem thử kênh này https://www.youtube.com/watch?v=f-eDFsnzNh8.

[††] Jack Ma thì ai cũng biết. Vậy bạn có biết ông này học tiếng Anh như thế nào không? Khi còn là một thiếu niên nghèo khó, Jack Ma quyết định hàng sáng đến khách sạn Shangri-La để tìm du khách phương Tây. Ông Ma đổi những chuyến tham quan miễn phí xung quanh quê hương Hangzhou của mình để thực hành nói tiếng Anh. Ông đã làm điều này hàng sáng trong vòng 9 năm, dù mưa, hay nắng. Ông này không thành công thì còn ai?

[†] Đây là bộ phim mà cầu thủ bóng đá diển trai David Beckham vẫn xem lúc anh cảm thấy buồn. Mình cũng vậy. Ngoài ra thì bộ phim *The Big Bang Theory* cũng giúp học tiếng Anh và giải trí.

khuyên nữa: đừng học tiếng Anh như là ngôn ngữ đầu tiên bạn học, thay vào đó hãy so sánh nó với tiếng Việt mà bạn đã rành. Chú ý rằng tiếng Anh–như tiếng Việt–là một ngôn ngữ nói nên sẽ có sự giống nhau giữa nó và tiếng Việt (danh từ, động từ, tính từ vv). Ngoài ra, các bạn cũng nên chú ý tới sự khác biệt giữa hai ngôn ngữ; ví dụ tiếng Việt thì 'nhà đẹp' nhưng tiếng Anh thì ngược lại 'beautiful house'. Các bạn thấy đó, chỉ cần nhớ sự khác biệt này, bạn sẽ không bao giờ mắc sai lầm kiểu 'car big'.

Còn muốn có bằng IELTS thì sao? Mình ghét nhất là bằng cấp, nên xin các bạn tự tìm tòi.

Ngày 1 tháng 4 năm 2023

# Chương 43

# Bạn muốn lái một chiếc Ferrari hay chiếc Honda CRV?

HÔM ni cuối tuần mà trời không chịu lòng 2 con chó nhà mình–trời mưa. Khổ nỗi là nhà chỉ có con Ferrari mui trần nên trời mưa không đi mô được. Đó là lí do lên Facebook chém gió.

Năm 2004 mình làm luận văn thạc sỹ với Stéphane, và lúc viết luận văn thì Stéphane bảo mình dùng LaTeX để viết. Mình hiếm khi nói không với đồ chơi mới. Thế là viết luận văn bằng LaTeX. Bây giờ là 2022, tức là 18 năm sau và mình vẫn dùng LaTeX để viết báo, sách (kể cả tập sách nhỏ này).

Để đi từ một điểm này tới một điểm khác bạn có thể dùng xe Honda CRV hoặc một chiếc Ferrari. Kết quả như nhau: bạn đều đến được nơi mình muốn tới. Vậy mà nếu có thể, rất nhiều người sẽ chọn Ferrari. Chúng ta có thể ví LaTeX như một chiếc Ferrari và Microsoft Word như một chiếc Honda CRV. Nhưng Ferrari mắc tiền lắm! Chính xác, nhưng LaTeX thì hoàn toàn miễn phí. Word, tuy nhiên, phải mất tiền mua.

Word là phần mềm soạn thảo văn bản dành cho mọi người. Còn LaTeX là một công cụ do Donald Knuth, nhà Toán học người Mỹ, tạo ra để ông viết sách theo ý muốn của mình. Vì lí do này mà LaTeX là số một để viết tài liệu có nhiều công thức. Các bạn theo ngành kỹ thuật hay khoa học nên dùng LaTeX để viết luận văn, báo cáo, bài tập lớn...

Nếu mình được quay ngược thời gian về cấp 2 và có máy tính mình sẽ học ngay cái này, và dùng nó để note lại những gì học được về Toán, Lý ... Quyển sách toán dày 1000 trang (link tải ở đây) mình viết bằng LaTeX, từ 2020-2023, mà mình làm việc toàn thời gian và có con nhỏ. Điều này cho thấy rằng, khi đã luyện thành LaTeX thì kiếm chiêu rất nhanh, như Tịch tà kiếm pháp vậy. Nhưng không cần quy đao tự thiến khó khăn như Kim Dung mô. Knuth dễ tính hơn nhiều.

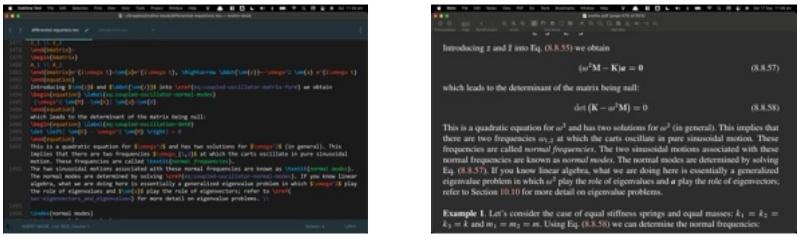
Có rất nhiều GS mà lúc tìm sinh viên làm NCS thì sẽ chọn ngay SV biết LaTeX nếu có 2 sinh viên chất lượng như nhau, một người dùng LaTeX còn một người dùng Word. Như vậy, biết thêm bất cứ món đồ chơi nào cũng giúp ích khi tìm việc hết.

Sau khi mình dùng LaTeX để viết luận văn thạc sỹ xong thì mình biết là mình có bảo kiếm rồi. Và mình tổ chức ngay một seminar cho các bạn chương trình cao học Việt-Bỉ để dụ mọi người dùng. Anh Châu Đình Thành–phụ tá của Thầy Hưng–lúc nghe mình đề nghị vậy thì rất tán thành. Thank you anh Thành. Sau mình thì có: Tri, Phong, anh Mỹ dùng (tất cả bắt đầu từ luận văn của Stéphane). Đó là những người mình biết. Anh Mỹ hồi đó mê tít LaTeX, cứ nằng nặc đòi mình chỉ LaTeX. Cũng vui. Một đồ chơi làm cho công việc nó trở nên thích thú hơn. Word không mang lại cái cảm giác đó.

Một lần nữa, thứ mình chọn cho vui này lại có ích cho NCS của mình ở Hà Lan năm 2007. Ở chỗ ông Bert Sluys thậm chí không có sự lựa chọn. Ai cũng phải dùng LaTeX hết! Đơn giản vì ở đó họ dùng hệ điều hành Linux và MS Word không có phát triển cho Linux. Và vì vậy mình lại có thêm món đồ chơi là Linux. Từ 2007 đến giờ mình chưa bao giờ đụng lại một PC chạy Windows. Có ông GS người Mỹ từng nói: tại sao gọi là Windows? Vì dùng nó thì bạn sẽ vứt nó ra ngoài cửa sổ! Và mình thần tượng ông ta!

Còn có một nguyên nhân khiến mình thích LaTeX hơn MS Word. Không đơn thuần là vì LaTeX tạo ra PDF đẹp hơn mô. Word cũng tiến bộ lắm. Vấn đề là mình thích lập trình nên muốn cải thiện khả năng tư duy logic, và LaTeX cho mình cơ hội đó. Word thì không! Như vậy, bằng cách "ép" mình dùng LaTeX, hay terminal (thay vì dùng con chuột click này nọ), mình buộc bản thân phải tư duy như người lập trình. Và lâu rồi nội công mình tăng lên một cách tự nhiên. Một mũi tên 2 con chim.

Vậy bắt đầu học LaTeX từ đâu? Hồi xưa Stéphane gửi toàn bộ luận văn tiến sỹ viết bằng LaTeX của ổng cho mình. Mình học từ đó. Nếu bạn nào thích học kiểu này thì có thể lấy từ link sau `https://github.com/vinhphunguyen/how-to-write-a-paper` nguồn LaTeX cho một bài báo của mình. Chỉ việc đối chiếu file PDF (kết quả) và file tex, thì hiểu ngay. Nói nôm na thì chúng ta dùng một editor (`emacs`, `vim`, `Sublime Text` hay chương trình gì viết văn bản đều được), rồi gõ text theo phương thức của LaTeX (Hình 43.1a). Sau đó thì biên dịch nó và kết quả là file PDF (Hình 43.1b).



(a) Nguồn LaTeX (b) Kết quả PDF

Hình 43.1: Dùng LaTeX để soạn thảo tài liệu khoa học kỹ thuật.

Nếu bạn không thích cách tự học thì giờ thì mọi chuyện dễ hơn nhiều: lên YouTube, tìm LaTeX tutorial. Mình thấy cái bài giảng LaTeX này ok. Bây giờ thì có nhiều lựa chọn lắm về LaTeX nhưng mình vẫn dùng pdflatex do anh Hàn Thế Thành (sinh năm 1972) tạo ra. Anh Thành lúc làm thạc sỹ và tiến sỹ ở đại học Masaryk ở thành phố Brno, Cộng Hòa Séc thì đã phát triển pdflatex. Sau khi xong tiến sỹ thì ảnh về làm giảng viên Đại học Sư Phạm ở Xì gòn.

Ferrari hay Honda CRV, bạn cho đi.

Ngày 5 tháng 9 năm 2022

# Chương 44

# Làm một bài thuyết trình

MỘT bài thuyết trình gồm có:

- thứ nhất là câu chuyện,
- thứ hai là vài slides, và
- cuối cùng là kể chuyện dùng hai cái trên.


Có một sự thật là rất dễ để làm một bài thuyết trình. Chỉ việc làm một số slides, rồi lúc thuyết trình chỉ việc đọc các slide đó. Thật là chán nếu chúng ta phải làm khán giả cho bài thuyết trình đó. Vậy thì làm thế nào để có một bài thuyết trình tạm được? Chúng ta không cần vắt óc suy nghĩ đâu, vì đã có người tìm ra lời giải tối ưu rồi. Có một nguyên lý gọi là "reinventing the wheel" nghĩa là cố gắng lặp lại — rất có thể với kết quả kém hơn — một phương pháp đã được người khác tạo hoặc tối ưu hóa trước đó. Steve Jobs được xem là bậc thầy thuyết trình (dù bạn có đồng ý hay không). Và chúng ta nên bắt chước ổng thôi, bằng cách xem các bài thuyết trình lúc ổng giới thiệu chiếc điện thoại iPhone đầu tiên, cái iPad đầu tiên vv.

Không có gì là xấu hổ khi làm chuyện đó cả. Chính phủ Hàn Quốc bê nguyên xi giáo trình của người Nhật về dùng (chỉnh sửa các môn Lịch sử, Địa Lý)! Họ áp dụng nguyên lý "reinventing the wheel" rất hay. Nếu bạn đang cầm một chiếc điện thoại Samsung thì là một phần nhờ hành động dũng cảm này của các nhà lãnh đạo Hàn Quốc.

Trong ba thành phần của một bài thuyết trình: câu chuyện, slides và cách kể chuyện thì bài này chỉ bàn về slides. Đơn giản đây là phần dễ nhất. Thực ra nếu có một câu chuyện hay và slides thiết kế đúng thì dù có kể dở cũng không sao. Dù gì thì phần lớn chúng ta cũng không phải giới thiệu một sản phẩm thay đổi thế giới như Jobs.

Học tập từ Steve Jobs và một số nhà khoa học khác (links sẽ trình bày ở phần cuối), giờ mình thiết kế bài thuyết trình theo những hướng dẫn sau:

- Dùng phông chữ Sans-Serif: Arial, Calibri, Helvetica, ...
- Dùng cỡ chữ thật to: tầm 20-36 points.
- Màu: hoặc là chữ màu đen trên nền sáng, hoặc là chữ sáng trên nền đen (Jobs thích cái này).
- Tiêu đề slide: một câu quan trọng trả lời cho câu hỏi “slide này để làm gì?”
- Mỗi slide chỉ trình bày 1 ý (hay vấn đề). Có thể 2 ý nếu liên quan. Không nhiều hơn.
- Chỉ trình bày những nội dung sẽ được đề cập. (Nếu không định trình bày nó thì xóa đi).

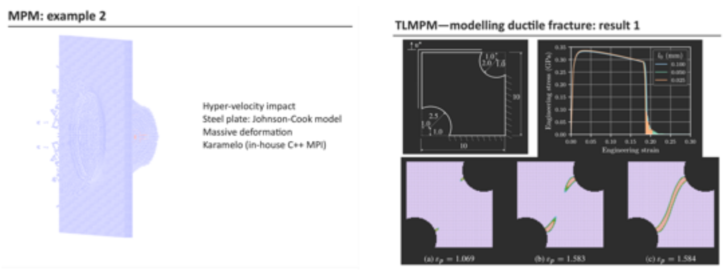
- Logo trường/công ty, ngày trình bày: ở slide đầu tiên thôi. Không nên để ở tất cả slides. Các bạn muốn khán giả nghe các bạn nói hay muốn họ dành thời gian đọc những thông tin tào lao kia?
- Rộng rãi với không gian trống. Một ý tưởng sai lầm rất thông dụng là chèn chữ/dữ liệu/phương trình/hình ảnh bao trùm hết slide. Đó là sai lầm. Có slide chỉ cần 1 cái hình, hoặc dăm ba chữ là đủ. Cái quan trọng là bạn chém gió kìa.
- Tránh việc dùng các hiệu ứng transition khi chuyển từ slide này qua slide khác. Thường thì chúng không giúp ích gì cả. Microsoft làm ra PowerPoint rồi thêm mấy cái màu mè này để bán thôi. Chúng ta không phải dùng chúng nếu không vì một mục đích nào đó. Chúng ta không cần thiết phải là nô lệ của một phần mềm nào đó.
- Hạn chế tối đa bullet points. Đặc biệt là chỉ 1 bullet point!
- Nếu phải dùng danh sách (list) thì: không nên quá nhiều item, và tiết lộ danh sách của bạn từng cái một. Chỉ khi nào nói xong về item nào đó thì tiết lộ item tiếp theo (dùng animation của software).
- Hình ảnh phải đẹp, rõ ràng, chữ trên hình phải to rõ. Không đánh số hình, bảng, phương trình; đây không phải là bài báo!
- Hạn chế viết nguyên câu. Dùng cái gọi là headlines thôi.
- KHÔNG VIẾT HOA TẤT CẢ CÁC KÝ TỰ! (như câu này) vì khó đọc, và mất lịch sự (kiểu như người nói muốn hét vào người nghe).
- Không nên tin vào nguyên tắc “một bài thuyết trình 15 phút thì khoảng 15 slides”. Slides là do bạn làm, bạn có thể có 50 slides, miễn sao bạn có thể nói trong khoảng thời gian cho phép. Có vài slides chỉ có một câu hay một cái hình thôi.
- Nếu bạn muốn người nghe chú ý lắng nghe bạn nói thì có khi chỉ cần 1 slide trống. Không có gì để cho khán giả đọc và nhìn, họ phải nghe bạn thôi (nếu họ còn thức)!
- Không nên bỏ vào slides quá nhiều kiến thức. Bạn không cần phải chứng tỏ là mình là người hiểu biết rộng. Bạn chỉ có khoảng 20 phút thôi, nên tập trung vào ý chính.
- Cũng vì lí do thời gian hạn hẹp, bạn không nên bỏ quá nhiều chi tiết kỹ thuật (như phương trình hay công thức). Sau khi nghe xong một buổi thuyết trình nếu người nghe có thể hiểu được cái hồn của câu chuyện (vấn đề, cách giải quyết) thì đó đã là một thành công lớn. Chi tiết không thể nào truyền đạt trong vòng vài chục phút.

Nhiều người viết rất nhiều thông tin vào slides vì lí do đơn giản: không nhớ nổi. Lúc xưa mình cũng làm slides như vậy. Sau này nghĩ lại thì thấy, bài thuyết trình là về 1 chủ đề người trình bày rành. Vậy thì mọi thứ (về căn bản) là đã nằm trong đầu họ rồi chứ. Cần chi slides để nhắc?

Trên đây chỉ là chém gió. Xin tham khảo https://www.researchgate.net/publication/355853901_Material_Point_Method_Theory_and_Applications để xem một slide trình bày khoa học mình làm theo những hướng dẫn trên sẽ như thế nào. Và Hình 44.1 là vài slide lấy từ đó. Dĩ nhiên còn nhiều điểm mình chưa hài lòng về slides này nhưng mà khả năng chỉ có chừng đó thôi.

Sau đây là một số Youtube videos mình tham khảo (cho các bạn làm khoa học, video thứ hai nên xem):

- https://www.youtube.com/watch?v=fdBV4uLrZ04




Hình 44.1: Cho slide bên phải, mình sẽ hiện ra từng hình một, nói về nó rồi mới hiện hình tiếp theo.

- https://www.youtube.com/watch?v=Hp7Id3Yb9XQ
- https://www.youtube.com/watch?v=sT_-owjKIbA&t=598s

Trong vòng mười năm từ 2012 đến 2023 mình đi hai hội nghị. Nhưng mà trong khoảng thời gian đó mình làm rất nhiều slides. Hâm à, Phính? Không đâu các bạn. Muốn làm cái gì tốt thì chúng ta phải làm nó nhiều lần; cần chi phải chờ tới đi hội nghị mới làm slides? Hơn nữa làm slides là một cách để cô đọng kiến thức và giúp chúng ta có một bức tranh tổng thể về một vấn đề nào đó.

Ngày 20 tháng 9 năm 2022

# Chương 45

# Bức tranh tổng thể (big picture)

MÌNH đã làm công việc giảng viên cũng được 7 năm và trong khoảng thời gian đó mình thỉnh thoảng ngồi trong hội đồng đánh giá tiến độ của các nghiên cứu sinh (NCS). Mình không dám đánh giá những sinh viên này, mình chỉ viết lên những gì mình thấy được, với hi vọng các em trẻ sẽ tránh những sai lầm này.

Có 2 điều mình nhận thấy.

Thứ nhất là đa phần NCS rất rành chi tiết kỹ thuật (ví dụ làm sao giải phương trình, làm sao dùng Matlab để biến đổi Fourier vv) nhưng mà các bạn ấy lại lúng túng khi đứng trước câu hỏi làm nghiên cứu này nhằm mục đích gì. Tại sao phải làm nghiên cứu này? Không lẽ làm chỉ để tốt nghiệp?

Thứ hai là các bạn không để ý tới kiến thức cơ bản. Hôm nọ mình ngồi hội đồng mà đề tài mình không biết chi cả (chuyện này hay xảy ra và mình chưa bao giờ cảm thấy thoải mái khi ngồi hội đồng như vậy. Đó là lí do mình chỉ thỉnh thoảng ngồi thôi. Nếu không ngồi thì nguy hiểm cho cái ghế). Vì không biết chi cả nên mình chỉ chăm chăm nhìn hình để mong có gì mà hỏi (không hỏi thì kì kì–mình đã từng ngồi hội đồng mà không hỏi gì rồi, nhưng nghĩ lại nên hỏi, cho nó vui). Và rồi, đây rồi, mình thấy một biểu đồ mà trục hoành ghi là thời gian (đơn vị là $\sqrt{s}$). Mình hỏi: tại sao thời gian mà đơn vị không là giây (s) mà là căn bậc hai của giây? Bạn NCS có 6 bài báo (trong 3 năm) trả lời rất ngây thơ: ai cũng làm vậy thì tui làm thôi.

Ôi chao. Phim Hồng Kông hay có câu: "đi chết đi", không lẽ nghe theo? Critical thinking mô?

Các bạn trẻ, xin nhớ cho một điều khi làm một cái gì hay học một môn gì thì phải chú ý tới câu hỏi: bức tranh tổng thể (mà người Tây gọi là big picture) là gì? Mình xin làm một ví dụ. Vì mình là kỹ sư xây dựng, mặc dù chỉ là kỹ sư giấy[†] vì mình chưa thiết kế một công trình xây dựng nào cả, nên ví dụ của mình là về việc học xây dựng.

Trước khi vào học xây dựng, các bạn nên đến đứng trước một tòa nhà hay cái cầu nào thật đẹp, thật hoành tráng, nhìn nó một lúc rồi nhắm mắt lại và tự hỏi: Thế nào là một công trình xây dựng tốt? Làm thế nào để xây lên một công trình như vậy? Vì là tự hỏi nên các bạn cũng tự trả lời. Một công trình xây dựng phải, trước hết, cứng cáp (tức là không bị sập trong thời gian sử dụng–50 hay 80 năm gì đó). Để biết một cái gì có cứng cáp không thì dĩ nhiên là chúng ta phải thử nó. Để biết một chiếc đũa có cứng không, chúng ta cố gắng bẻ nó. Để biết một cô nàng có thích mình không thì mình phải cua thử. Không thử sao biết được?

Chẳng lẽ chúng ta xây một cái nhà lên trước rồi thử xem nó cứng không? Làm như vậy cho tới khi có một cái nhà không sập. Có lẽ tổ tiên xa xôi của chúng ta làm vậy. Nhưng chúng ta sẽ làm cách khác. Chúng ta sẽ học một môn gọi là "Sức bền Vật Liệu". Mục đích của môn này là chỉ cho chúng ta biết khi nào thì một cái dầm sẽ bị gãy (sập) dưới tác động của tải trọng (do trọng lượng của người sống trong căn nhà chẳng hạn). Môn này cần dùng kiến thức Cơ học nên sẽ có thêm môn Cơ học. Mà Cơ học–một ngành của Vật Lý–thì dùng Toán học. Do đó kỹ sư xây dựng

[†]Kỹ sư giấy còn hơn kỹ sư dỏm.

(hay bất cứ kỹ sư gì) cũng cần Toán.

Vì chúng ta có thể dùng gạch, hay gỗ hay thép hay bê tông để làm nhà, nên sẽ có một môn học gọi là "Vật Liệu Xây Dựng". Môn này chỉ cho chúng ta (1) làm thế nào để sản xuất bê tông, thép, gỗ... và (2) làm sao bê tông cứng hơn gạch, và cứng hơn như thế nào. Đi vào chi tiết thì cái nhà có gì? Có cột nè, có dầm nè, có sàn nè, có móng nè. Rõ ràng là cột thì khác dầm, khác sàn vv. Nên sẽ có những môn "Thiết kế dầm-cột", "Thiết kế sàn", "Thiết kế móng". Những môn thiết kế thì khác với môn "Sức bền vật liệu". Trong môn Sức bền thì chúng ta giả sử đã có cái nhà rồi: dầm là $30 \times 60$ cm$^2$ dài 1m chẳng hạn, tải trọng cũng biết luôn, ví dụ 100 kN/m. Nhiệm vụ của môn Sức bền là cho chúng ta biết cái dầm như vậy có sập hay không.

Môn thiết kế thì ngược lại: chúng ta bắt đầu với con số 0 (đúng ra là từ bản vẽ của chú kiến trúc sư), và chúng ta sẽ tìm ra cái dầm phải như thế nào (tức là, chiều dài và tiết diện) để không bị gãy. Để làm được điều này chúng ta cần kiến thức từ môn Vật liệu. Điều này là hiển nhiên, vì các vật liệu là khác nhau. Chúng ta cũng cần môn Sức bền, vì thiết kế–nghe có vẻ oai–nhưng bản chất là thử và sai. Chúng ta thử xem dầm $20 \times 60$ cm$^2$ có sập không (đây là Sức bền). Nếu sập thì làm nó to ra ($30 \times 80$ chẳng hạn). Còn không sập thì chấp nhận $20 \times 60$ cm$^2$. Đó là thiết kế.

Mọi chuyện trở nên phức tạp vì chúng ta có trên cả 100 quốc gia, và mỗi quốc gia thì có tiêu chuẩn riêng để đánh giá thế nào là một công trình tốt. Điều này dễ hiểu. Với mình thì Triệu Nhã Chi là diễn viên đẹp, nhưng với bạn thì Trần Ngọc Liên mới đẹp. Do đó trong môn thiết kết chúng ta sẽ gặp TCVN (tiêu chuẩn VN). Và chúng ta PHẢI thiết kết công trình theo nó. Nếu theo nó mà nhà vẫn sập thì lỗi của nó, không phải của bạn. Và việc học xây dựng trở nên nhàm chán từ đây (đối với mình). Vì răng? Vì mọi chuyện phải theo TCVN mà TCVN từ đâu ra thì không giảng viên nào bận tâm giải thích, nên các môn thiết kế rất chán: chỉ có cọng trừ nhân chia. Hồi xưa môn thiết kế thép, nếu không có đồng hương thầy Nhân thương tình cho qua thì ôi thôi rồi Lượm ơi.

Để thấy được big picture thì thỉnh thoảng phải dừng những gì đang làm, đang học lại, nhắm mắt và hỏi: Mình đang làm gì? Và mình làm nó vì cái gì? Như ông cha ta đã nói: 'người trong cuộc tối, người ngoài cuộc sáng', thỉnh thoảng chúng ta phải làm người ngoài cuộc.

Nên chăng trong nhà trường phải có môn Big picture để giải thích cho học sinh/sinh viên: vì sao các em phải học những môn này? Mình nghĩ có thể bắt đầu từ lớp 9. Môn Big picture cho lớp 9 giải thích tại sao học Toán, Lý, Hóa, Sinh, Lịch sử, Địa Lý vv. Có mối liên quan nào giữa các môn này không? Nếu có môn đó mình tin chắc các em sẽ học tốt hơn.

Để thấy được big picture của một môn học nào đó thì **XIN ĐỪNG ĐỌC SÁCH GIÁO KHOA**. Thay vào đó đọc sách khoa học phổ thông về đề tài đó. Những sách này không đi vào chi tiết (ví dụ có sách thậm chí không có một công thức dù viết về Toán 500 trang), mà vẽ lên bức tranh tổng thể. Đọc những sách này trước, sau đó mới chạm tới sách GK.

Sau đây là danh sách một số sách mà các bạn muốn trở thành kỹ sư trong tương lai (và cả sinh viên các trường kỹ thuật) nên đọc (dĩ nhiên các bạn không muốn trở thành kỹ sư cũng có thể đọc):

- *The Science of Structures and Materials* và *Structures Or Why Things Don't Fall Down* của J. E. Gordon[†]; Gordon giải thích khoa học vật liệu trong cuốn sách của mình mà không đi sâu vào vật lý và toán học đằng sau nó. Ai thích xây dựng, cơ khí, hàng không, vật liệu đều có thể thích cuốn này;
- *Stuff Matters: Exploring the Marvelous Materials That Shape Our Man-Made World* của

[†]James Edward Gordon (1913–1998) là một trong những người sáng lập ngành khoa học vật liệu và cơ sinh học, đồng thời là tác giả nổi tiếng của ba cuốn sách về cấu trúc và vật liệu, đã được dịch ra nhiều thứ tiếng và vẫn được sử dụng rộng rãi trong các trường học và trường học. các trường đại học.

Mark Miodownik[††]. Từ thủy tinh đến sô cô la, khoa học và lịch sử được giải thích và sẽ khiến bạn đánh giá cao những vật liệu bạn sẽ sử dụng hàng ngày. Bạn nào thích hóa học, vật liệu sẽ thích cuốn này.

- *Existential Pleasures of Engineering* của Samuel C. Florman[§]
- *The Way Things Work Now* của David Macaulay[*]
- *What If?: Serious Scientific Answers to Absurd Hypothetical Questions* của Randall Munroe[‡].

Dĩ nhiên danh sách này không đầy đủ, các bạn nếu muốn đọc thêm thì xin google thêm.

Ngày 13 tháng 3 năm 2023

[††]Mark Andrew Miodownik là nhà khoa học vật liệu, kỹ sư, phát thanh viên và nhà văn người Anh tại Đại học College London.

[§]Florman (sinh năm 1925) là một kỹ sư dân dụng, tổng thầu và tác giả người Mỹ. Ông nổi tiếng với các bài viết và bài phát biểu về kỹ thuật, công nghệ và văn hóa nói chung. Cuốn sách được phân phối rộng rãi nhất trong bảy cuốn sách của ông là The Existential Pleasures of Engineering, xuất bản năm 1976, tái bản lần thứ hai năm 1994. Theo một nguồn tin, "Nó đã trở thành một tác phẩm kinh điển hiện đại thường được nhắc đến. Florman là Chủ tịch của Công ty Xây dựng Tổng hợp Kreisler Borg Florman, Scarsdale, New York. Năm 1995, ông được bầu vào Viện Hàn Lâm Kỹ thuật Quốc gia "Vì những đóng góp văn học nâng cao tính chuyên nghiệp kỹ thuật, đạo đức và giáo dục kỹ thuật tự do.

[*]David Macaulay (sinh năm 1946) là một họa sĩ và nhà văn người Mỹ gốc Anh. Macaulay là người nhận giải thưởng MacArthur Fellows Program năm 2006 và nhận Huân chương Caldecott năm 1991 cho Black and White (1990).

[‡]Randall Patrick Munroe (sinh năm 1984) là một họa sĩ truyện tranh, tác giả và kỹ sư người Mỹ (làm cho NASA) được biết đến nhiều nhất với tư cách là tác giả của webcomic xkcd.

# Chương 46

# Toán Lý Hóa

NGÀY xửa ngày xưa có một cậu học sinh cấp 2 bị đuối cả 3 môn Toán Lý Hóa. Răng bèo vậy? Vì cậu sớm yêu. Không phải yêu gái mà yêu truyện chưởng và game điện tử. May cho cậu là do thất bại trong một cuộc thi tiếng Anh–môn mà cậu ảo tưởng mình là số một–cậu quyết định chuyển kèo.

Vậy cậu ta bắt đầu môn nào? Toán hay Lý hay Hóa? Vì lí do mà mình sẽ giải thích ngay sau đây, cậu bắt đầu từ Toán. Sau khi Toán tạm ổn cậu chuyển qua Lý và cuối cùng là Hóa. Đó là một trình tự rất hiệu quả cho cậu ta (nhưng chưa chắc cho người khác). Cậu không tài giỏi chi cả. Cậu bắt đầu từ Toán vì hồi đó thi lên cấp 3 thì thi 2 môn Toán-Văn. Không học Toán thì còn học gì nữa? Sau đó, nhờ nỗ lực học hành cậu thi đậu đại học nhưng mà trong ba môn TLH thì Hóa là cậu yếu nhất.

Sau này cậu đi đó đi đây và nghe được nhiều câu chuyện khiến cậu rất ngạc nhiên. Cậu không phải là người duy nhất ok Toán mà Hóa thì ngu. Alban cũng giỏi Toán và Lý nhưng dốt Hóa và Sinh. Thậm chí có ông giải Nobel Vật Lý từng nói là Hóa không dành cho ông. Tại sao lại như vậy? Một chút phân tích có thể tìm ra câu trả lời hoặc một phần.

Trước hết chúng ta biết rằng Toán học bắt đầu bằng các tiên đề; tức là các luật của cuộc chơi. Ví dụ, hình học Euclid thì có 5 tiên đề (TD), đại số thì có 9 TD; 1 TD trong 9 TD là $ab = ba$, lý thuyết thống kê thì có 3 TD. Như vậy, người học Toán không phải nhớ quá nhiều những điều phải chấp nhận. Hơn nữa các TD thường dễ hiểu: $a$ nhân $b$ bằng $b$ nhân $a$, không dễ thì là gì? Sau khi đã nhớ các TD thì chúng ta không cần phải nhớ gì nữa cả[†], và có thể dùng logic để chứng minh các định lý. Ai mà thích tư duy logic thì không có gì hay bằng Toán.

Bây giờ chúng ta xem Vật lý nó như thế nào nhé. Vật lý có TD không? Xin thưa, không. Nhưng mà Vật lý có cái gọi là "định luật". Chúng ta có thể xem các định luật này là TD của Vật lý vậy. Nổi tiếng nhất và dễ nhất dĩ nhiên là 3 định luật về chuyển động của Isaac Newton. Chỉ có 3 cái định luật thôi mà phát biểu thì lại còn siêu đơn giản; ví dụ định luật 2 Newton chỉ vậy thôi: $F = ma$. Định luật 3 thì không cần toán để phát biểu: lực bằng phản lực.

Khi bạn ném một quả bóng và nó vẽ lên không trung một hình parabola rất đẹp đó chính là $F = ma$ của Newton đứng đằng sau điều khiển. Theo mình thì TD trong Toán học (ít nhất là toán sơ cấp) thì dễ hiểu và dễ chấp nhận hơn các định luật Vật lý. Tại sao nói vậy? Vì các đối tượng của Toán học là trừu tượng trong khi đối tượng nghiên cứu của Vật lý là thế giới thực. Muốn hiểu đối tượng Toán học rất dễ, lấy tờ giấy vẽ vài điểm, vẽ vài tam giác, nhìn nó, ngắm nó. Vậy thôi. Muốn hiểu thấu đáo $F = ma$ thì khó hơn nhiều. Chúng ta phải quan sát, phải suy nghĩ về chuyển động mới hiểu thấu đáo được. Không phải ngay cả triết gia và nhà thông thái Hy Lạp cổ đại Aristotle (384–322 TCN) cũng không tìm ra $F = ma$ đó sao? Còn phải làm thí nghiệm động tay động chân nữa. Kiểu như thấy trái táo rớt từ trên cây xuống thì suy nghĩ, chứ như mình lượm

[†] Ở đây có hai trường phái. Một là không nhớ gì cả, và bắt đầu từ những gì cơ bản. Ví dụ $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Hai là nhớ những gì có thể nhớ vì lúc làm bài thi sẽ tiết kiệm thời gian. Mình không biết cái nào là tốt nhất; nhưng theo kinh nghiệm thì trước hết phải hiểu những thứ căn bản, rồi làm Toán nhiều những gì hay gặp sẽ chui vào đầu lúc nào không hay. Tuyệt đối không có chuyện học thuộc lòng Toán nhé.

nó lên ăn thì khó mà giỏi Vật lý được.

Nhưng mà sau khi "nhớ" 3 định luật Newton rồi thì không quá khó để giải các bài tập Lý. Chỉ có $F = ma$ thôi mà. Cho lực $(F)$ tính gia tốc $(a)$, rồi tính vị trí. Không thể khác hơn. Nếu có khó khăn thì phần lớn là do Toán chưa vững; ví dụ chưa rành vi tích phân thì làm sao giải $F = ma$ được. Sau khi yêu thì có thêm định luật Ohm: $I = V/R$. Bài tập thì cho $V, R$ tính $I$ hoặc cho $I, V$ tính $R$. Chỉ là đại số thôi. Cái khó là Ohm ôm ai mà tìm ra $I = V/R$ và nó thật sự có ý nghĩa thế nào kìa.

Và giờ thì chúng ta đã rõ phải có căn bản Toán rồi mới học Lý được. (Và vì vậy ai học Toán được thì học Lý cũng được). Nhưng mà vì răng? Vì lí do mà không ai hiểu, các định luật Vật lý được diễn tả bằng ngôn ngữ của Toán học. (Ở Chương 47 mình sẽ nói về chuyện ông Galileo dùng Toán như thế nào để mô tả chuyển động.) Truyền thống này bắt đầu từ Newton; ông giải thích được chuyển động của các hành tinh. Hơn thế nữa dùng Vật lý của Newton, nhà thiên văn học và toán học người Pháp Le Verrier (1811 – 1877) còn phát hiện ra sao Hải vương. Như Francois Arago (1786 – 1853), một nhà toán học người Pháp, đã nói: "Le Verrier đã phát hiện ra một hành tinh bằng ngòi bút của mình." Để hiểu thấu đáo câu nói của Arago thì các bạn trẻ nên nhớ rằng, con người phải chĩa kính thiên văn (hay mắt thường) lên trời và ngồi chờ, ngày này qua tháng nọ, có khi phải qua nhiều năm mới phát hiện ra một ngôi sao. Vất vả biết dường nào. Le Verrier không cần cực khổ như vậy. Có trong tay Ỷ Thiên Kiếm của Newton, ông chỉ cần ngồi ở nhà, vừa uống trà sửa Đài Loan vừa phóng bút trên tờ giấy vàng úa của thế kỷ 19. Sau một hồi tính toán thì ông thông báo:

> *"Xin mời các nhà thiên văn học, vào ngày X, giờ Y, chĩa cái chi quý vị đang có lên trời ở tọa độ abc quý vị sẽ thấy sao Hải Vương!"*

Quá tuyệt vời! Không dùng Toán thì còn dùng gì nữa?

Sau đó các hậu bối của Newton cứ dùng Toán để giải thích các hiện tượng Vật lý. Chúng ta có thể kể Fourier dùng Toán để giải thích hiện tượng truyền nhiệt nè (tại sao ôm người yêu thì người ấm chẳng hạn). Sau Fourier thì có Maxwell dùng Toán để giải thích các hiện tượng điện và từ nè. Rồi thì Einstein cũng dùng Toán để cải tiến lý thuyết hấp dẫn của Newton. Toán học hiệu quả cho khoa học đến nổi nhà vật lý lý thuyết người Mỹ gốc Hungary Eugene Wigner (1902–1995) phải viết bài báo mang tên "Hiệu quả phi lý của toán học trong khoa học tự nhiên"[†]. Eugene dùng từ phi lý (unreasonable) quá hay! Mà ông là ai? Chủ nhân Nobel Vật lý năm 1963 vì những đóng góp của ông cho lý thuyết hạt nhân nguyên tử và các hạt cơ bản, đặc biệt thông qua việc khám phá và ứng dụng các nguyên lý đối xứng cơ bản.

Do đó cứ học Toán vững thì không có lí do gì mà không học Lý tốt cả. Còn muốn học Lý một cách sâu sắc (để trở thành một nhà Vật lý chẳng hạn) thì phải là người có óc quan sát thiên nhiên, kiểu thấy chiếc lá rơi cũng làm em giật mình như Einstein. Còn nếu muốn được như trình độ của Einstein thì ít nhất cần có thêm tính tò mò. Không có cái đó thì xin đừng mơ tưởng. Không phải nhà tài chính và chính khách người Mỹ Bernard Baruch (1870 –1965) đã nói

> *"Hàng triệu người đã thấy quả táo rơi nhưng chỉ có Newton hỏi tại sao."*

đó sao? Và Richard Feymnan cũng từng viết

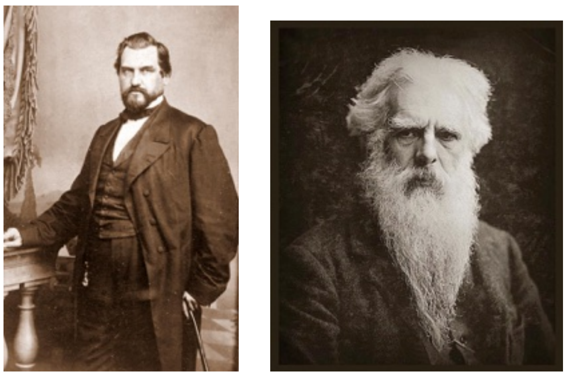
Tôi tự hỏi tại sao.<br>
Tôi tự hỏi tại sao.<br>
Tôi tự hỏi tại sao tôi tự hỏi.<br>
Tôi tự hỏi tại sao tôi tự hỏi tại sao.<br>
Tôi tự hỏi tại sao tôi tự hỏi!

[†]Link bài báo của Eugene: https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/wigner.pdf.

Và ông kể: "Khi tôi học cấp ba, tôi đã thấy nước chảy ra từ vòi phát triển hẹp hơn và tự hỏi liệu tôi có thể tìm ra điều gì quyết định đường cong đó không. Tôi thấy nó khá dễ dàng để làm".

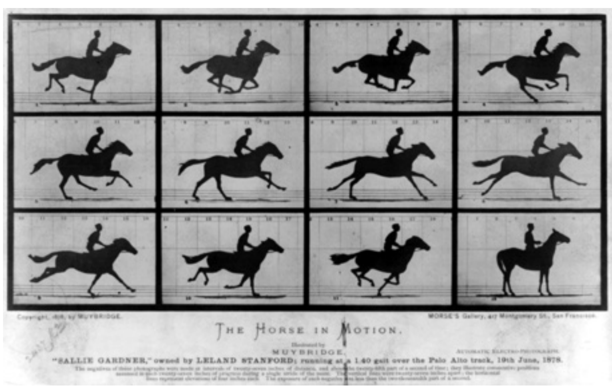
Sau đây mình sẽ kể hai câu chuyện minh họa cho tầm quan trọng của tính tò mò. Tính tò mò thể hiện qua việc đặt câu hỏi, câu hỏi về bất cứ cái gì. Câu hỏi thì không phân biệt ngớ ngẩn hay không. Cứ hỏi. Chắc chắn là người có câu hỏi sẽ hơn người không hỏi gì!

Năm 1872 cựu Thống đốc California Leland Stanford (người mà sau này thành lập đại học danh tiếng Stanford đó các bạn, Hình 46.1a) hỏi một câu hỏi trông có vẻ ngớ ngẩn: "Cả bốn chân của con ngựa có rời khỏi mặt đất cùng một lúc khi phi nước kiệu và phi nước đại không?" Chính câu hỏi này đã thay đổi lịch sử điện ảnh! Để trả lời câu hỏi này–mà Stanford nghĩ là có–ông tiếp cận nhiếp ảnh gia người Anh Eadweard Muybridge (1830 – 1904), xem Hình 46.1b. Vào tháng 6 năm 1878, Muybridge dự định chụp một loạt ảnh tại trang trại chăn nuôi của Stanford để tìm hiểu câu trả lời. Ông đặt nhiều máy ảnh tấm kính lớn thành một hàng dọc theo mép đường đua; màn trập của mỗi chiếc được kích hoạt bằng một sợi chỉ khi con ngựa đi qua. Con đường được lót bằng những tấm vải để phản chiếu càng nhiều ánh sáng càng tốt. Ông đã sao chép các hình ảnh, ở dạng bóng, vào một chiếc đĩa để xem trong một chiếc máy mà mình đã phát minh ra, mà ông gọi là máy soi động vật. Hình 46.2 là các bức ảnh của Muybridge chụp ngày hôm đó. Chúng ta phải hiểu rằng vào thời điểm đó không một họa sỹ nào trên trái đất có thể hiểu làm thế nào để vẽ một con vật đang chuyển động. Lý do rất đơn giản: mắt của chúng ta không quan sát kịp các chuyển động nhanh như vậy.



(a) Leland Stanford (b) Eadweard Muybridge

Hình 46.1

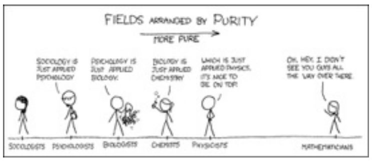



Hình 46.2: Các bức ảnh của Eadweard Muybridge, chụp con ngựa mang tên Sallie Gardner. Và con ngựa này hiện được biết đến là ngôi sao của bộ phim đầu tiên trên thế giới. Các bức ảnh cũng chứng minh chắc chắn rằng một con ngựa có một khoảnh khắc phi nước đại với tất cả các móng guốc khỏi mặt đất.

Từ đâu mà con người nghĩ ra khái niệm nguyên tố? Cũng từ một câu hỏi. Nhà triết học Hy Lạp cổ đại Leucippus, sống vào khoảng thế kỷ thứ 5 trước Công nguyên, đã hỏi: "vật chất là liên tục hay rời rạc?" Rõ ràng là chúng ta không thể chia một chất mãi được, nên vật chất phải cấu tạo bởi cái gọi là nguyên tố, mà tiếng Anh là *atom* có nguồn gốc từ chữ *Atomos* trong tiếng Hy Lạp có nghĩa là "không thể cắt được" hoặc "không thể chia cắt".

Hóa học thì sao? Hóa học có TD hay định luật không? Mình không rành về Hóa nên mình xin nói về việc tại sao học Toán/Lý ok mà gặp rắc rối với Hóa. Không may cho chúng ta là tiền đề của Hóa học là cơ học lượng tử mà môn này thì không dễ xơi tí nào. Không biết cơ lượng tử thì làm sao hiểu tại sao trong một nguyên tử electron không ngồi yên mà cứ chạy vòng vòng ở rìa ngoài, trong khi thằng proton và neutron thì cố thủ trong hạt nhân. Vì chưa biết cơ học lượng tử nên lúc học Hóa cấp 2 rất khó chịu. Có quá nhiều câu hỏi tại sao không trả lời được. Chẳng hạn, hóa trị là gì? Làm sao xác định hóa trị? Tại sao nước viết là $H_2O$? Nếu ai trả lời bạn vì nước có một nguyên tố oxy và hai nguyên tố hydro, thì hỏi tiếp 'ai tìm ra điều này?', 'làm sao tìm ra?', thậm chí 'sao không là 1.5 nguyên tố oxy?'... Nếu các bạn muốn tìm câu trả lời cho những câu hỏi này có thể tìm đọc cuốn *A short history of chemistry* của Isaac Asimov[†] (1920-1992).

Có một câu nói đùa về TLH mình tìm thấy trên mạng: "Các nhà sinh học không thể làm hóa học. Các nhà hóa học không thể làm vật lý. Các nhà vật lý không thể làm toán. Và các chuyên ngành toán học không phải học môn sinh học!" Trên Hình 46.3 chúng ta lại thấy một so sánh dí dỏm về các môn khoa học và Toán học. Xã hội học là chỉ tâm lý học ứng dụng, tâm lý chỉ là sinh học ứng dụng, sinh học là hóa học ứng dụng, mà hóa học chỉ là vật lý ứng dụng. Và các nhà Vật lý thì tự hào vì mình ở trên đầu trên cổ người khác. Còn các nhà Toán học thì sao? Họ cô đơn lắm vì họ tách rời với thế giới chúng ta đang sống. Họ ở trong thế giới của những con số, những hình, những hàm số vv. Chỉ là đùa thôi nhưng mà nó cho thấy mấy môn Toán-Lý-Hóa-Sinh bản chất rất là khác nhau.




Hình 46.3

Bạn nào yêu thích sinh học thì nên tìm đọc cuốn *A short history of biology* của Isaac Asimov.

Đây chỉ là chém gió tí cho vui thôi. Chỉ cần giỏi một trong ba là đủ sống rồi. Và nhiều người không giỏi thứ nào trong ba món này mà vẫn sống tốt, rất tốt là đằng khác. Xin đừng quá tham lam. Nếu có quay lại thời học sinh mình cũng không cố gắng học Hóa tốt hơn. Tại sao chúng ta phải học thứ chúng ta không thích? Vì một lí do nào đó mà 3 môn Toán, Lý, Hóa trở thành tiêu chuẩn lựa chọn sinh viên ngành kỹ thuật; điều này các bạn học sinh không thể thay đổi được, nhưng mà các bạn có thể chọn học nhiều hay ít, miễn sao đạt được mục tiêu. Ngoài ra đường đời rất dài, và có nhiều thứ quan trọng hơn để các bạn học. Một trong số đó là sức khỏe. Lúc trẻ chúng ta thường xem thường vấn đề sức khỏe, vì chúng ta lúc đó 'khỏe như trâu' mà. Tuy nhiên, nếu không chú ý tới sức khỏe, lúc lớn lên có thể hậu quả khôn lường. Lúc mình viết dòng này là 4 giờ sáng. Không biết vì sao mà tự dưng tối đó bụng mình đau dữ dội, chưa bao giờ mình đau đến vậy. Cơn đau kéo dài hơn 12 giờ mới dừng! Chỉ trong lúc đau đớn như vậy thì mình mới thấy sức khỏe nó quý giá thế nào: vì không có nó thì không làm được gì cả.

Xin các bạn trẻ hãy chú ý tới sức khỏe; không chỉ là chơi thể thao mà còn là tìm hiểu về một số căn bệnh thường gặp. Tại sao lại mất thời gian đọc xem Ronaldo có mấy siêu xe–một chuyện vô bổ–mà không lo cho chính mình?

[†]Asimov là nhà văn người Mỹ và giáo sư Hóa sinh tại Đại học Boston. Ông đã viết hoặc biên tập hơn 500 cuốn sách.

Ngày 10 tháng 4 năm 2023

# Chương 47

# Bàn về khoa học: Vật lý

ARISTOTLE (384–322 TCN) là một triết gia và học giả Hy Lạp cổ đại. Ông viết về một loạt các chủ đề bao quát khoa học tự nhiên, triết học, ngôn ngữ học, kinh tế học, chính trị học, tâm lý học và nghệ thuật. Ông nổi tiếng đến độ mà cậu út nhà mình (mới học lớp 2) một hôm về hỏi mình: 'Rứa ba có biết cụ A rít tố tồ khôn?' Mình đáp: 'ba biết một tí'. Nó nhanh nhẹn nói ngay 'cụ Tồ nói thế này, cụ nói thế kia ...'

Đúng là cụ Tồ nói và viết nhiều thật, nhưng không phải cái gì cụ nói cũng đúng. Và điều nổi tiếng nhất mà cụ nói sai là về chuyển động. Từ các quan sát thường nhật rằng cái là thì rơi chậm hơn cục đá, cụ Tồ tuyên bố như sau: '*Các vật thể rơi với một tốc độ tỷ lệ thuận với trọng lượng của chúng*'. Mà nói một cách dân dã và định tính thì vật nặng rơi nhanh hơn vật nhẹ. Trong vòng hai ngàn năm sau khi cụ Tồ tuyên bố như vậy thì ai cũng tin sái cổ. Nếu có người nghi ngờ thì sẽ nghe lý luận kiểu 'cụ Tồ nói rứa rồi, không sai mô.'

Ghi chú: Aristotle đang sử dụng cái gọi là suy luận quy nạp; tức là phương pháp rút ra những kết luận bằng cách diễn dịch từ cá biệt tới tổng quát. Khoa học gia hay sử dụng phương pháp này. Thật ra chúng ta đã dùng chiêu này khi đoán Eq. (31.2) từ chỉ ba trường hợp cá biệt $S(1), S(2)$ và $S(3)$.

Với các bạn học sinh ngày nay như Phính thì thật dễ ẹt để chứng minh cụ Tồ nói tào lao về chuyển động. Phính sẽ làm như sau: đi chùa Thiên Mụ với vợ, mang theo một trái mít và một trái thơm, leo lên tháp Thiên Mụ, thả hai trái xuống, vợ đứng dưới tháp quan sát. Nếu trái mít rớt xuống trước, hoan hô cụ Tồ, nếu hai trái rơi xuống cùng nhau, sorry cụ nhé, còn nếu trái thơm rớt xuống trước, thì Phính trở nên nổi tiếng, hay là trái mít đem đi là trái mít thúi. Sự thật là hai trái sẽ rơi xuống đất cùng lúc, vì vào thế kỷ 17 một cụ khác là cụ Galileo (1564-1642) đã làm thí nghiệm như Phính, dù cụ Lèo không biết tháp Thiên Mụ nên leo tháp Pisa.

Tới đây thì một câu hỏi nảy ra. Cụ Tồ là một nhà thông thái (điều này thì khỏi bàn cãi), sao cụ không biết làm thí nghiệm để kiểm tra tuyên bố của mình? Có thể giải thích như sau. Các bạn trẻ nên nhớ là nước Hy lạp cổ còn có cụ Lít (Euclid), người viết ra cuốn 'The Elements' kinh điển về hình học. Mà hình học Euclid chẳng liên quan gì ráo với thực tế cả. Ví dụ, điểm thì không có kích thước, đường thẳng thì không có bề dày, hình thì phải dựng được bằng thước không vạch và compass. Như vậy một đặc điểm của những cụ Hy lạp này là sống tách rời thực tế, thích cái gì trừu tượng, rồi dùng lý luận logic thôi.

Vậy thì một câu hỏi nữa nảy sinh. Tại sao mấy cụ lại làm như vậy? Chúng ta nên nhớ rằng các cụ này là thuộc tầng lớp quý sờ tộc, và họ có nô lệ làm mọi việc 'tầm thường' hằng ngày cho họ. Không thể nào có chuyện cụ Tồ mang hai trái mít/thơm lên chùa Thiên mụ! Không đời nào! Vậy sao cụ không sai nô lệ làm thay? Nô lệ thì làm sao mà dính vào chuyện mà cụ gọi là 'natural philosophy', một thứ mà chỉ có tầng thượng lưu có học mới có thể làm.

Định lý Thales trong hình học Euclid thì các bạn trẻ ai cũng biết, nhưng ông sống như thế nào thì có lẽ ít bạn quan tâm. Câu chuyện sau đây, do Aristotle kể lại, sẽ cho chúng ta một cái nhìn sâu sắc hơn về những nhà thông thái Hy lạp. Chuyện kể rằng, Thales té từ một ngọn đồi khi đang nghiên cứu bầu trời–một hình ảnh tiêu biểu về các triết gia cho đến ngày nay. Nhưng Thales không phải là một kẻ ngốc. Khi được hỏi tại sao, nếu ông thông minh như vậy, ông vẫn nghèo khó, Thales trả lời rằng làm giàu rất dễ. Và ông đã chứng minh điều đó. Nhận ra rằng vụ mùa cây ô liu sắp tới sẽ tốt (bằng cách quan sát thiên tượng), ông thuê hết tất cả các máy ép dầu ô liu ở địa phương. Trong mùa thu hoạch cây ô liu bội thu, sự độc quyền cho phép ông đề ra bất kỳ giá nào ông mong muốn."

Tuy nhiên, theo Aristotle, Thales không làm điều đó để kiếm tiền mà để chứng minh rằng một nhà triết học có thể sống một cuộc sống giàu có nếu họ chọn như vậy. Như vậy, Thales đã đưa ra một câu trả lời cho những người gọi nghề nghiệp của mình vô ích và chế giễu sự nghèo đói của ông. Ý của ông là một nhà triết học không nghèo nàn do số phận mà do sự lựa chọn, đồng thời chỉ ra rằng có một con đường của tri thức và tâm linh mang lại sự thỏa mãn cao hơn so với con đường của tài sản vật chất.

(Những cụ thông thái thường có cái gọi là phong cách. Ví dụ có cụ sinh ra thời những năm 1960s, nhưng nhất định không dùng máy tính. Cụ nói: 'quý ông thì không đụng vào bàn phím'! Tiếc là mình quên tên cụ này; nhưng cụ rất giỏi. Đó, xì tai là phải như thế ☺)

Thật ra trước khi đích thân leo lên tháp Pisa với trái mít và thơm thì cụ Lèo đã chắc ăn là thuyết của cụ Tồ sai rồi. Cụ Lèo lập luận thế nào? Cụ dựa trên sự thật sau: nếu từ một lý thuyết mà ta suy ra hai điều mâu thuẫn lẫn nhau thì chắc chắn lý thuyết này có vấn đề.

Theo cụ Tồ thì trái mít (không thúi) sẽ rơi nhanh hơn trái thơm. Giờ thử tưởng tượng cột hai trái này lại, rồi cho rơi tự do. Sinh tố† mít-thơm này sẽ rơi như thế nào? Nhanh hơn trái thơm hay chậm hơn? (Cái này giờ biết đến với tên gọi là *thought experiments*, tạm dịch là thí nghiệm tưởng tượng; cụm từ này có lẽ trở nên phổ biến nhờ Albert Einstein.) Có nhiều câu trả lời lắm, và đó mới chính là vấn đề của lý thuyết của Aristotle. Ví dụ, có người sẽ lập luận thế này. Trái mít muốn rơi nhanh (từ cụ Tồ), mà trái thơm lại muốn rơi chậm, do đó sinh tố mít-thơm sẽ rơi chậm hơn trái mít. (Cái này giống không sợ đối thủ dở mà chỉ sợ đồng đội như Harry Maguire.) Nghe cũng ok. Nhưng có người lại suy nghĩ thế này. Sinh tố mít-thơm nặng hơn từng trái riêng lẻ, do đó, theo cụ Tồ nói, nó phải rơi nhanh hơn từng trái.

Ai đúng? Ai sai?

Không biết được, vì cụ Tồ mà nghe những lập luận này, cụ sẽ phán (để bảo vệ quan điểm của mình): vận tốc của sinh tố thơm-mít còn phụ thuộc chúng được trộn như thế nào nữa nhé! Tới nước này thì chỉ còn một cách duy nhất: làm thí nghiệm, và cụ Lèo đã làm như thế. Ở độ tuổi 27, ông đã chiến thắng các cây đa cây đề (tức là ông Tồ, dù ông Tồ đã đi Germany 2000 năm trước và các người ủng hộ ông).

Nếu cụ Lèo chỉ làm vậy thì cụ đã không có được cái danh hiệu mỹ miều 'cha đẻ của khoa học hiện đại'. Trước khi bàn cụ đã làm thêm gì, thì chúng ta hãy tìm hiểu một chút về cuộc đời cụ. Rất thú vị. Phụ thân cụ muốn cụ thành bác sỹ (thời nào cũng vậy, nhất Y nhì Dược vẫn xịn xò), và cu vâng lời cha, đi học Y. Tuy nhiên cụ học mà không có bằng! Cụ là thiên tài, nhưng cụ không thích Y học, một hôm cụ tình cờ đi lạc vào một lớp 'hình học' và từ đó cụ biết tình yêu của cụ là 'toán và lý'.

Vì lí do gì không ai biết mà Galileo chọn nghiên cứu vấn đề rơi tự do. Không những ông chứng minh Aristotle là sai, mà ông còn đi thêm một bước nữa. Ông muốn tìm hiểu xem khi trái mít rơi trong không khí như vậy thì vận tốc nó thay đổi thế nào theo thời gian! Aristotle chỉ dừng lại ở mức *định tính* 'trái nào rơi nhanh hơn trái nào'; cụ Lèo muốn trả lời câu hỏi *định lượng* 'nếu rơi nhanh thì nhanh hơn như thế nào' Từ đây khoa học thật sự bắt đầu.

†Thèm sinh tố quá nên mình dùng từ này, không đúng nhưng mà chắc các bạn hiểu ý mình.

Để thực hiện nghiên cứu của mình cụ Lèo cần có 'cái đồng hồ Rolex' để đo thời gian. Không có Rolex cụ xài tạm đồng hồ nước (như trong mấy phim kiếm hiệp). Tuy nhiên, rơi tự do là một hiện tượng diễn ra quá nhanh, đồng hồ 'xịn' như đồng hồ nước thì không dùng được. Làm thế nào để làm chậm lại sự rơi tự do là khó khăn tiếp theo cụ vấp phải. Với trí thông minh của mình, cụ đã sử dụng mặt nghiêng, tức là một tấm gỗ có một rãnh dọc theo đó cụ lăn một quả bi kim loại nhỏ†. Nếu góc nghiêng của tấm gỗ này nhỏ thì quả bi (cụ không có mít ở Ý) sẽ lăn chậm, và đồng hồ nước sẽ có thể đo được thời gian nó lăn hết mặt phẳng. Và quả như thí nghiệm mít-thơm, khi cụ cho hai quả bi có khối lượng khác nhau lăn xuống tấm gỗ, cụ thấy chúng hoàn thành quãng đường trong cùng một khoảng thời gian. Tuyệt vời! Nhưng mà, liệu cụ có thể đem những gì thu được với tấm gỗ áp cho rơi tự do không? Cụ cho rằng là được, với lý luận như sau: rơi tự do chính là lăn trên mặt nghiêng một góc 90 độ! Quá hay!

Đây là số liệu thí nghiệm của Galileo (không phụ thuộc khối lượng quả bi), và cho một góc nghiêng nào đó:

$$\begin{aligned}
&\text{1 giây}: \text{ quãng đường bi lăn là 2 mét}\\
&\text{2 giây}: \text{ quãng đường bi lăn là 8 mét}\\
&\text{3 giây}: \text{ quãng đường bi lăn là 18 mét}\\
&\text{4 giây}: \text{ quãng đường bi lăn là 32 mét}
\end{aligned} \tag{47.1}$$

Cụ Lèo là một nhà toán học và thời cụ sống thì có cụ Viete là người cho chúng ta đại số với những $x, y, z$. Cho nên Galileo dùng $t$ cho thời gian††, $d$ cho quãng đường, và số liệu trên cho ngay:

$$\boxed{d = 2t^2} \tag{47.2}$$

Dịch ra tiếng Việt là: quãng đường bi lăn trên mặt nghiêng sau khi bắt đầu với vận tốc bằng không tỉ lệ với bình phương thời gian trôi qua. Đây là lần đầu tiên một hiện tượng thiên nhiên được diễn tả bằng một công thức toán học, thu được nhờ những đo đạc chính xác. Và từ đây, vật lý và toán học cưới nhau, và đây là một cuộc hôn nhân hạnh phúc, vì sao gần 400 năm vẫn chưa thấy Toán-Lý có vấn đề gì nghiêm trọng.

**Ghi chú** Về mặt toán học Eq. (47.2) cho ta cách tính $d$ cho mỗi thời điểm $t$, tức là đưa $t$ vào và ta có $d$. Đây chính là tiền đề sau này các nhà toán học như Libnitz, Euler phát triển ra khái niệm hàm số $y = f(x)$. Dùng cách viết của Euler, ta sẽ viết lại Eq. (47.2) như sau: $d(t) = 2t^2$.

Nói về chuyển động thì phải nói tới vận tốc. Vậy vận tốc của các quả bi của Galileo là bao nhiêu? Trước hết, chúng ta tính vận tốc trung bình $v^*$ (quãng đường chia thời gian): $v^* = {}^{\Delta d}/_{\Delta t}$:

$$\begin{aligned}
&\text{1 giây}: \text{ quãng đường bi lăn là 2 mét} \implies v^* = 2 \text{ m/s}\\
&\text{2 giây}: \text{ quãng đường bi lăn là 8 mét} \implies v^* = 4 \text{ m/s}\\
&\text{3 giây}: \text{ quãng đường bi lăn là 18 mét} \implies v^* = 6 \text{ m/s}\\
&\text{4 giây}: \text{ quãng đường bi lăn là 32 mét} \implies v^* = 8 \text{ m/s}
\end{aligned} \tag{47.3}$$

Như vậy, quả bi càng lăn càng nhanh. Trẻ em thời nay có thể kiểm chứng điều này dễ dàng: đi xe đạp xuống dốc, cho chạy tự do, sẽ thấy càng xuống dốc xe chạy càng nhanh. Dĩ nhiên cụ Lèo không có xe đạp để tự mình trải nghiệm.

Vận tốc trung bình ok rồi, nhưng mà vận tốc tại một thời điểm cụ thể thì bao nhiêu? Ví dụ vận tốc tại thời điểm $t = 1$ giây, 2 giây, ... Đây là khái niệm vận tốc tức thời, mà sau này dựa vào đó Newton cho ra khái niệm đạo hàm. Xét cho khoảng thời gian từ 0 s cho tới 1s, vận tốc trung bình là 2 m/s, vận tốc ban đầu là 0 m/s, ta có thể giả sử rằng vận tốc trung bình đạt được lúc

†Các bạn có thể xem thí nghiệm này trên Youtube: https://www.youtube.com/watch?v=ZBr8Q2ROX9s.
††Vì thời gian là *time*.

$t = 0.5$ s, như vậy trong vòng 0.5s vận tốc tăng từ 0 đến 2 m/s. Do đó, vận tốc tại $t = 1$ s phải là 2 m/s + 2 m/s = 4 m/s. Lập luận như vậy ta có:

$$\begin{aligned} 1 \text{ giây}: & \; v = 4 \text{ m/s} \\ 2 \text{ giây}: & \; v = 8 \text{ m/s} \\ 3 \text{ giây}: & \; v = 12 \text{ m/s} \\ 4 \text{ giây}: & \; v = 16 \text{ m/s} \end{aligned} \tag{47.4}$$

Số liệu này cho ta điều gì? Sau mỗi giây, vận tốc tăng thêm 4 m/s. Để nói về sự thay đổi vận tốc thì cụ Lèo cho ra đời khái niệm gia tốc (gia tăng tốc độ). Nó được định nghĩa như thế nào? *Sự thay đổi của vận tốc với thời gian được gọi là gia tốc*. Để tìm gia tốc $a$ (vì gia tốc tiếng anh là acceleration), ta chia $\Delta v$, sự thay đổi vận tốc, cho $\Delta t$, sự thay đổi thời gian. Nếu dùng khoảng thời gian từ 1 s đến 2 s ta có ngay $a = (8-4)/(2-1)$: tức là 4 m/s/s hay 4 m/s$^2$. Nếu xét các khoảng thời gian khác chúng ta đều thu được cùng một gia tốc 4 m/s$^2$. Như vậy, trong thí nghiệm mặt phẳng nghiêng của Galileo, các quả bi di chuyển với 1 gia tốc không thay đổi và như nhau.

Tới đây, chúng ta có hai phát biểu về kết quả của thí nghiệm này. Phát biểu 1: trong cùng một khoảng thời gian các quả bi lăn một quãng đường như nhau. Phát biểu 2: các quả bi di chuyển với 1 gia tốc không thay đổi và như nhau. Phát biểu nào (hay tạm gọi là định luật) tốt hơn? Phát biểu 1 rõ ràng không cho ta biết tí gì về vận tốc của các quả bi: chúng lăn với một vận tốc không thay đổi, hay nếu thay đổi thì thay đổi như thế nào? Như thiếu nữ mới lớn hay như bà già 70? Vì lí do đó, *phát biểu 1 không có sức mạnh; nó không thể là một định luật vật lý.* Ngược lại, phát biểu hai cho ta mọi thứ. Cụ thể, nếu gia tốc là hằng số và là $a$, thì vận tốc là $v = at$, và quãng đường là $d = 0.5at^2$. Công thức của quãng đường cho ngay phát biểu 1!

Sau bao nhiêu công sức như vậy, những tưởng câu hỏi 'giữa Aristotle và Galileo, ai đúng? sẽ rất dễ trả lời. Câu chuyện, hóa ra, không đơn giản như vậy. Đúng là trái mít và trái thơm rơi xuống cùng lúc; nhưng mà trái mít thì chắc chắn rơi nhanh hơn lá cây. Để giải quyết vấn đề này thì chúng ta phải làm thí nghiệm sau: lấy 2 tờ giấy giống nhau, một tờ thì vo lại, rồi thả chúng cho rơi tự do. Chắc chắn là tờ giấy vo lại rơi nhanh hơn, dù cả hai có cùng khối lượng! Vậy thì hình dạng của vật thể đóng một vai trò. Tới đây thì gió sẽ chiếm ngay suy nghĩ của chúng ta, và nguyên nhân lá cây rơi chậm, không phải do nó nhẹ, mà do sức cản không khí! (Vì sao Aristotle không nghĩ tới sức cản không khí thì mình bó tay. ) Như vậy, Aristotle không có thực sự sai. Thế thì định luật của cụ Lèo có ích không? Có chứ. Cái hay của Galileo là ngay từ đầu ông đã loại bỏ sức cản không khí ra khỏi bài toán! Và nhờ làm đơn giản hóa như vậy, ông có thể tìm ra một mô hình toán học. Sau khi đã có nó, thì việc kể thêm sức cản không khí lại không quá phức tạp. Còn như Aristotle cố giải thích mọi thứ thì sẽ thất bại! Chuyện này giống như ta xây cái nhà xong, sau đó mới thêm bàn ghế, rồi TV, rồi máy giặt ... Không thể làm tất cả cùng một lúc được.

Làm sao biết cái gì cần loại bỏ, cái gì cần giữ lại thì chỉ có tài năng đặc biệt của các nhà thông thái thôi. Cũng như đánh cờ tướng vậy, lúc nào thì nên công, lúc nào thì nên thủ?

Phính nè, cái này (bài toán rơi tự do) thì có gì mà gọi là khoa học (như trong tiêu đề của chương này)? Hỏi hay lắm. Những gì Aristotle và Galileo làm chính là khoa học, mà còn là khoa học đỉnh cao (*cutting-edge science*), nhưng là khoa học của thời các ông sống. Dần dần, chúng trở thành kiến thức phổ thông, và được dạy trong trường học. Những hiện tượng mà trước đây chỉ có cụ Tồ, cụ Lèo hiểu thì giờ học sinh ai cũng biết. Chúng ta đọc lịch sử khoa học là để xem khoa học phát triển như thế nào. Đây là con đường làm khoa học: Từ việc quan sát một hiện tượng nào đó, nhà khoa học cho ra một giả thuyết để giải thích hiện tượng đó, rồi họ làm thí nghiệm để chứng minh giả thuyết đúng. Họ đã tìm ra một quy luật của tự nhiên. Họ sẽ viết sách hay báo để công bố công trình của mình[†]. (Trong trường hợp cụ Lèo thì cụ viết tuyệt tác *The Discourses*

[†]Vì lí do này mà khả năng viết lách rất quan trọng đối với nhà khoa học. Nếu viết khó hiểu thì mọi người không hiểu mình.

*and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences* vào năm 1638 lúc 74 tuổi.) Sau này, quy luật này có thể không giải thích được các hiện tượng khác, thế là lại có một lý thuyết mới, tổng quát hơn được phát triển bởi một nhà khoa học khác. Mỗi nhà khoa học thừa kế kết quả của các bậc tiền bối và phát triển thêm, và cứ thế khoa học ngày càng phát triển. Ví như trong câu chuyện về chuyển động, những gì cụ Lèo để lại sẽ được một cụ khác, cụ Newton kế thừa và phát triển rực rỡ. (Thật kỳ lạ, năm Galileo mất cũng chính là năm Newton ra đời!) Và vì còn quá nhiều thứ về tự nhiên mà chúng ta không biết, nên khoa học vẫn còn phát triển.

Ngày 29 tháng 8 năm 2023

# Chương 48

# Bàn về khoa học: Hóa học

SAU khi đọc cuốn *A short history of chemistry* của Isaac Asimov, mình thấy nó rất hay. Nó giúp mình hiểu hơn về hóa học, về cách làm khoa học, về việc khoa học phát triển như thế nào... Dĩ nhiên chỉ đọc một cuốn sách mỏng (gần 300 trang) thì không thể hiểu trọn vẹn về hóa học, nhưng xin mạn phép bàn một tí, chủ yếu giúp các bạn trẻ đang 'đau khổ' vì môn này.'

**Nguyên tố, nguyên tử.** Khi ta quen biết một người và nhận thấy họ lúc thì tốt bụng, lúc thì xấu bụng, ta sẽ thắc mắc ngay: 'vậy, thật chất người này là tốt hay xấu?' Tương tự như vậy, các nhà thông thái Hy lạp đã quan sát thấy có rất nhiều chất như nước, không khí, lửa, đá, gỗ, ... và nếu đốt gỗ thì có tro. Như vậy gỗ là gỗ hay là tro? Hay nó không phải gỗ, cũng không phải tro, mà là một thứ hoàn toàn khác? Suy nghĩ như vậy lần đầu tiên thực hiện bởi Thales. Và từ đó, ông cho rằng tồn tại một chất cơ bản, mà từ nó tất cả mọi chất được tạo thành. Bây giờ chúng ta gọi chất cơ bản này là nguyên tố (dịch từ tiếng Anh *element*). Thales cho rằng nước là chất cơ bản. Sau này, có nhà thông thái A nói, không phải nước, mà là không khí mới là chất cơ bản. Rồi có ông B nói, chất cơ bản là lửa, rồi có ông lại nói chất cơ bản là đất. Vậy, cuối cùng chất cơ bản là chất nào trong nước, không khí, lửa và đất? Tới một thời điểm thì mọi người thống nhất: à, tại sao phải chỉ là 1 chất cơ bản, mà không phải là bốn? Từ đó, chúng ta có một lý thuyết sơ khai cho rằng tất cả vật chất tạo ra từ bốn nguyên tố: nước, lửa, không khí và đất.

Sau khái niệm nguyên tố thì các nhà thông thái Hy lạp lại cho chúng ta một khái niệm nữa: nguyên tử. Họ lý luận rằng vật chất được tạo thành từ các hạt nhỏ không thể chia tách gọi là nguyên tử.

**Các định luật cơ bản trong hóa học.** Cũng như vật lý, hóa học cũng có định luật, và giới hạn cho hóa học cơ bản thì có ba định luật cơ bản như sau, tất cả các định luật này đều được phát hiện thông qua các thí nghiệm với đo đạc tỉ mỉ (Asimov, 1965):

1. *The law of conservation of mass*: định luật bảo toàn khối lượng. Luật này–được tìm bởi nhà hóa học người Pháp Antoine-Laurent de Lavoisier (1743–1794) vào năm 1789–khẳng định rằng: 'khối lượng không được sinh ra hay mất đi trong các phản ứng hóa học.'

2. *The law of constant (or definite) proportions*: định luật tỷ lệ xác định hoặc "luật của Proust"; nó được phát biểu lần đầu tiên bởi nhà hóa học người Pháp Louis Proust (1754–1826) vào năm 1779. Luật này nêu rõ rằng: "Các nguyên tố riêng lẻ tạo nên một hợp chất hóa học cụ thể tồn tại trong một tỷ lệ cố định (theo khối lượng của chúng), bất kể nguồn gốc của chúng." Ví dụ, nước tạo bởi nguyên tố hydro và nguyên tố ôxi, và hai nguyên tố này luôn tồn tại với 11.19% ôxi và 88.81% hydro (theo khối lượng). Nếu ôxi và hydro mà không ở tỉ lệ này thì chất đó không phải là nước.

3. *The law of multiple proportions*: định luật này phát hiện bởi nhà hóa học người Anh John Dalton (1766–1844). Để hiểu định luật này, ta hãy xem phát hiện của Dalton về hai nguyên tố carbon và oxi. Khi kết hợp một cách nhất định, chúng tạo thành hợp chất quen thuộc

carbon dioxide. Trong mỗi mẫu carbon dioxide $CO_2$, có 32g oxi cho mỗi 12g cacbon. Bằng cách chia 32 cho 12, điều này đơn giản hóa thành tỷ lệ khối lượng của oxi so với cacbon là 2.66 đến 1. Có một hợp chất khác hình thành từ sự kết hợp của cacbon và oxi được gọi là carbon monoxide CO. Mỗi mẫu carbon monoxide chứa 16g oxi cho mỗi 12g cacbon. Đây là tỷ lệ khối lượng của oxi so với cacbon là 1.33 đến 1. Điều này nói lên điều gì? Là rằng *carbon dioxide có chính xác gấp đôi lượng oxi có mặt so với carbon monoxide*. Ví dụ này minh họa luật tỷ lệ đa dạng: 'mỗi khi hai nguyên tố giống nhau tạo thành hơn một hợp chất, các khối lượng khác nhau của một nguyên tố kết hợp với cùng khối lượng của nguyên tố khác sẽ nằm trong tỷ lệ của các số nguyên nhỏ.'

**Thuyết nguyên tử của Dalton**. Thông qua ba định luật ở trên, Dalton đã phát triển thuyết nguyên tử như sau:

1. Các nguyên tố được tạo thành từ các hạt nhỏ không thể chia tách gọi là nguyên tử.
2. Tất cả các nguyên tử của một nguyên tố cụ thể có khối lượng và tính chất giống nhau, nhưng nguyên tử của các nguyên tố khác nhau có khối lượng và tính chất khác nhau.
3. Hợp chất được tạo ra khi các nguyên tử của các nguyên tố khác nhau kết hợp theo tỷ lệ cố định và số nguyên.
4. Phản ứng hóa học liên quan đến việc sắp xếp lại các nguyên tử; trong một phản ứng hóa học, nguyên tử không được tạo ra hoặc mất đi.

Ghi chú: Các bạn trẻ chú ý một điều tuyệt diệu về thuyết nguyên tử này: con người phát triển thuyết này trước khi tận mắt quan sát được nguyên tử! Chỉ bằng quan sát, các thí nghiệm hóa học, và tư duy. Mãi sau này thì Albert Einstein mới chứng minh bằng toán học rằng nguyên tử là có thật (thông qua bài toán chuyển động Brownian). Và cuối cùng, khi công nghệ phát triển đủ mạnh thì con người mới quan sát được nguyên tử. Chỉ để khẳng định điều mà Leucippus đã tiên đoán mấy ngàn năm trước.

Vào những năm đầu thế kỷ 19 con người đã phát hiện ra rất nhiều nguyên tố và từ đó nảy sinh nhu cầu tìm ra ký hiệu cho từng nguyên tố. Nhà hóa học người Thụy Điển Jons Jakob Berzelius (1779–1848) đã phát triển ký hiệu hóa học. Ông đã đưa ra các ký hiệu nguyên tố đầu tiên, bao gồm các chữ cái đầu tiên của tên tiếng Latinh của nguyên tố đó[††]. Ví dụ, H là ký hiệu cho hydro, O là ký hiệu cho oxi, và C là ký hiệu cho cacbon. Các ký hiệu này được sử dụng rộng rãi ngày nay. Nhiều khi chữ cái thứ hai cũng được dùng, như Al (nguyên tố Aluminum). Để mô tả phân tử thì các nhà hóa học dùng chỉ số dưới để diễn tả số nguyên tố; ví dụ nước có hai nguyên tố hydro và một nguyên tố oxy, do đó ký hiệu hóa học của nó là $H_2O$.

**Cân bằng phản ứng hóa học.** Mình nhớ hồi học cấp hai, mình không biết cách cân bằng phương trình hóa học như phương trình sau $C_3H_8 + 5\,O_2 \longrightarrow 3\,CO_2 + 4\,H_2O$. Vấn đề là tìm các số nguyên dương $x_1, x_2, x_3, x_4$ sao cho

$$x_1\,C_3H_8 + x_2O_2 \longrightarrow x_3\,CO_2 + x_4\,H_2O$$

Nghĩa là, cân bằng tổng số nguyên tử cacbon (C), hydro (H) và oxi (O) ở phía trái và phía phải của phản ứng hóa học. Tại sao? Bởi vì định luật bảo toàn khối lượng: nguyên tử không bị hủy hoại hoặc tạo ra trong phản ứng. Có ba nguyên tử, và việc bảo toàn từng nguyên tử sẽ đưa ra một phương trình:

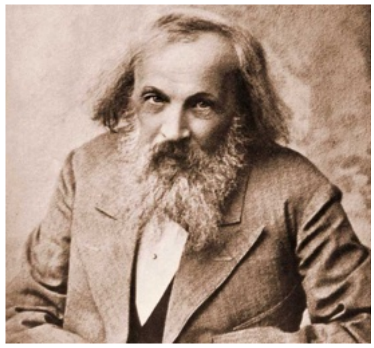
$$\begin{aligned} 3x_1 &= x_3 && \text{(cân bằng tổng số nguyên tử cacbon)} \\ 8x_1 &= 2x_4 && \text{(cân bằng tổng số nguyên tử hydro)} \\ 2x_2 &= 2x_3 + x_4 && \text{(cân bằng tổng số nguyên tử oxi)} \end{aligned} \tag{48.1}$$

[††]Thường thì cũng gần giống tiếng Anh.

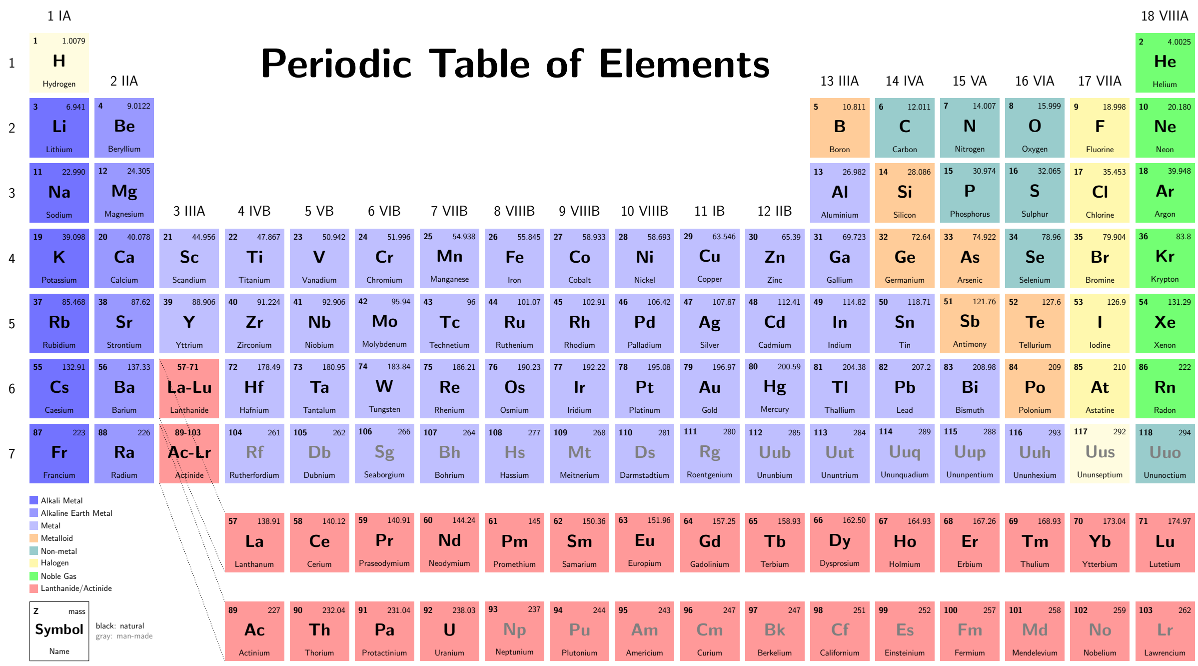
Đây là một hệ phương trình tuyến tính và việc giải phương trình này rất dễ dàng: phương pháp loại trừ. Tuy nhiên, có một vấn đề: chúng ta có bốn ẩn số nhưng chỉ có ba phương trình. Giả sử $x_4 = n$, sau đó chúng ta có thể giải cho $x_1, x_2, x_3$ dưới dạng của $n$: $x_1 = n/4$, $x_3 = 3n/4$, $x_2 = 5n/4$. Lấy $n = 4$, chúng ta có $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 3$. Nếu bạn lấy $n = 8$ bạn sẽ có thêm bốn nghiệm khác. Do đó, chúng ta có số lượng vô hạn các nghiệm, ví dụ

$$
\begin{aligned}
1\,C_3H_8 + 5O_2 &\longrightarrow 3\,CO_2 + 4\,H_2O \\
2\,C_3H_8 + 10O_2 &\longrightarrow 6\,CO_2 + 8\,H_2O
\end{aligned}
$$

Nhưng mà rõ ràng là hai phương trình này như nhau. Với thời gian, các bạn sẽ không cần phải làm chậm như rùa như thế này. Nhưng mà đây chính là cách để cân bằng phản ứng hóa học.



Bàn về hóa học mà không nói đến bảng hệ thống tuần hoàn các nguyên tố Mendeleev (Hình 48.1) thì thật là thiếu sót. Có vô vàn số tự nhiên $(1, 2, 3, \ldots)$ nhưng mà có một trật tự ở đây; ví dụ các số tự nhiên có thể chia làm hai loại: số lẽ và số chẵn; hoặc là số nguyên tố hay hợp số. Sau khi các nhà hóa học phát hiện ra có khoảng 90 nguyên tố thì họ đặt ngay câu hỏi: liệu có mối liên hệ nào giữa chúng không? Những nổ lực trả lời câu hỏi này đã cho ra đời cái gọi là bảng hệ thống các nguyên tố. Vào năm 1864, nhà hóa học người Anh John Alexander Newlands (1837-98) xắp xếp các nguyên tố theo thứ tự tăng dần của *atomic weight*. Sau Newlands thì còn có các khoa học gia khác, nhưng tất cả nỗ lực đều thất bại ngoại trừ Dmitri Ivanovich Mendeleev (1834–1907)–nhà khoa học chỉ cắt tóc mỗi năm một lần.




Hình 48.1: Bảng hệ thống tuần hoàn các nguyên tố Mendeleev. Julius Lothar Meyer (1830– 1895), nhà hóa học người Đức, cũng phát triển một bảng tương tự, nhưng ông này chậm hơn Mendeleev một năm!

Vậy Hình 48.1 là bảng Mendeleev vẽ ra vào năm 1869? Câu trả lời là không, Hình 48.1 là bảng mới nhất. Mendeleev là một thiên tài vì lúc ông lập ra bảng hệ thống các nguyên tố, ông để 3 ô trống, và ông nói: 'nè, đây là những nguyên tố chưa tìm ra, nhưng tui biết chắc chắn tính chất của chúng'. Sau này, con người đã phát hiện 3 nguyên tố mới, và chúng có các đặc tính giống như Mendeleev tiên đoán!

**Mol**. Trong cuộc sống hàng ngày chúng ta vẫn thường nói một tá cam thay cho 12 trái cam. Và, tương tự như vậy, trong hóa học chúng ta có đơn vị đếm gọi là mole (mol). Một mol có khoảng $6.022 \times 10^{23}$ hạt (hạt có thể là nguyên tử, nguyên tố hay phân tử). Ví dụ, 2 moles of O atom có $2 \times 6.022 \times 10^{23} = 12.044 \times 10^{23}$ nguyên tử ôxi, hay 2 moles của phân tử $O_2$ có $12.044 \times 10^{23}$ phân tử $O_2$. Như vậy, mol giống như tá với hai khác biệt: (1) mol dùng cho hóa chất, (2) mol có giá trị là $6.022 \times 10^{23}$, một số tạm gọi là trên trời rơi xuống†.

Vật chất thì chiếm không gian và có khối lượng, hơn nữa hóa học là khoa học định tính nên chúng ta cần có cách để bàn về khối lượng. Vì ta có nguyên tử, phân tử và mol, chúng ta sẽ có ba loại khối lượng:

1. Nguyên tử khối: là khối lượng của một nguyên tử, đơn vị là amu (từ tiếng Anh *atomic mass unit*); sau khi đã có người làm chuyện đo đạc cho chúng ta, muốn biết nguyên tử khối của nguyên tố nào, tra bảng tuần hoàn. Ví dụ, của Carbon là 12.011 amu;

2. Phân tử khối: là khối lượng của một phân tử, đơn vị cũng là amu. Ví dụ phân tử khối của nước ($H_2O$) là $2 \times 1.008 + 1 \times 15.99 = 18.016$ amu;

3. Khối lượng mol: là khối lượng của 1 mol của bất cứ cái gì, đơn vị thường là gram.

Và tất nhiên phải có một sự liên hệ giữa amu và gram (vì cả hai cùng là đơn vị cho khối kượng, nó tương tự g và kg vậy):

$$1 \text{ amu} = 1.66 \times 10^{-24} \text{ g} \tag{48.2}$$

Giờ thì chúng ta có thể tính khối lượng mol của một nguyên tố, ví dụ nguyên tố carbon. Ta biết, một mol nguyên tố carbon có $6.022 \times 10^{23}$ nguyên tố carbon, mà mỗi nguyên tố carbon nặng 12.011 amu, do đó,

$$\text{1 mol của nguyên tố carbon nặng} = \left(6.022 \times 10^{23}\right) \times \left(12.011\right) \times \left(1.66 \times 10^{-24} \text{ g}\right) = 12.011 \text{ g}$$

Như vậy, chúng ta có thể đọc khối lượng (của 1 nguyên tố) trên bảng tuần hoàn theo hai cách: hoặc là amu/nguyên tố hoặc là g/mol. Tới thời điểm này thì việc tính khối lượng mol của một hợp chất sẽ thật đơn giản. Ví dụ, khối lượng mol của $CH_4$ là

$$12.011 + 4 \times 1.008 = 16.043 \text{ g/mol}$$

Cuối cùng, chúng ta có thể làm 'bài tập'. Chẳng hạn, tính số mol của 1.52 kg mẫu gluco $C_6H_{12}O_6$. Đầu tiên, ta tính khối lượng mol của gluco:

$$6 \times 12.011 + 12 \times 1.008 + 6 \times 6 = 180.162 \text{ g/mol}$$

Bài toán giờ trở thành: một mol gluco nặng 180.162 g, hỏi 1520 g gluco có bao nhiêu mol? Cái này như 1 phút thì 60 giây, vậy 130 giây là mấy phút! Câu trả lời là: $^{1520}/_{180.162} = 8.44$ mol.

**Ví dụ**. Butan, một hydrocacbon ($C_4H_{10}$), trải qua sự đốt cháy để tạo ra khí carbonic và nước. Với 236.5 gam butan, bao nhiêu gam khí carbonic được tạo ra trong phản ứng? Để giải bài này, trước hết chúng ta phải viết được phương trình phản ứng hóa học:

$$2\,C_4H_{10} + 13O_2 \longrightarrow 8CO_2 + 10H_2O$$

Nhưng phương trình này có nghĩa là gì? Ý nghĩa của nó như thế này: 2 phân tử $C_4H_{10}$ phản ứng với 13 phân tử $O_2$ cho ra 8 phân tử $CO_2$ và 10 phân tử $H_2O$. Ta cũng có thể hiểu phương trình này như thế này: 2 tá phân tử $C_4H_{10}$ phản ứng với 13 tá phân tử $O_2$ cho ra 8 tá phân tử $CO_2$ và 10 tá phân tử $H_2O$. Có lẽ bạn đã hiểu chúng ta sẽ làm gì tiếp theo. Thay vì tá (12) trong hóa chúng

†Nếu bây giờ, theo sách vở, mình viết thêm rằng $6.022 \times 10^{23}$ là hằng số Avogadro thì cũng chẳng giúp ích gì cho các bạn. Thậm chí, thông tin này có thể khiến bạn hiểu nhầm rằng nhà khoa học Amedeo Avogadro (1776–1856) là người tính toán ra con số này. Sự thật không phải vậy.

ta dùng mol. Do đó, phương trình trên sẽ có ý nghĩa: 2 mol phân tử $C_4H_{10}$ phản ứng với 13 mol phân tử $O_2$ cho ra 8 mol phân tử $CO_2$ và 10 mol phân tử $H_2O$.

Nhưng đề bài cho ta butan theo gam nên ta phải chuyển đổi từ gam sang mol (vì phương trình theo mol). Cái này thì các bạn đã biết, 236.5 gam butan tương ứng 4.07 mol. Và theo phương trình phản ứng, 2 mol butan cho 8 mol khí cabonic, vậy 4.07 mol butan sẽ cho $4.07 \times 4 = 16.28$ mol $CO_2$. Cuối cùng, bài toán trở thành: $16.28$ mol $CO_2$ nặng bao nhiêu gam? Mà ta biết 1 mol $CO_2$ nặng $12.011 + 2 \times 16 = 44.01$ gam. Cho nên đáp số cuối cùng của bài toán là: 716.5 g.

Làm bài tập hóa thì chỉ có cộng trừ nhân chia, và chuyển đổi đơn vị như thế thôi. Cái khó là tại sao 1 amu lại là $1.66 \times 10^{-24}$ g? Vì sao hằng số Avogadro lại là $6.022 \times 10^{23}$? Những cái này thì Phính chịu chết. Cũng không thể hiểu hết khi còn ở trường phổ thông, cứ chấp nhận một vài chổ, rồi từ từ tìm hiểu.

Học hóa thì phải đến phòng thí nghiệm, xắn tay lên, để chơi với nào là ống thủy tinh, đũa thủy tinh, bình cầu, với các hóa chất xanh đỏ tím vàng. Phòng thí nghiệm là nơi các phát hiện quan trọng trong hóa học được tìm thấy. Như ở hình bên là Antoine Lavoisier và vợ (bà Marie-Anne Paulze Lavoisier); Lavoisier là người được gọi là cha đẻ của hóa học hiện đại. Tuy nhiên ông có một kết cuộc thương tâm. Chuyện là, trong thời kỳ Cách mạng Pháp bắt đầu vào năm 1789, những người giàu có và bất kỳ ai đã làm việc cho chính phủ đều đối mặt với nguy cơ. Năm 1794, Lavoisier bị cho là kẻ phản bội do liên quan đến việc thuế. Lavoisier bị kết án tử hình bởi những người Cách mạng và bị chém đầu vào ngày 8 tháng 5 năm 1794 tại Paris ở tuổi 50. Cuối năm 1795, chính phủ Pháp đã thay đổi quyết định và tuyên bố Lavoisier vô tội về mọi cáo buộc. Tất nhiên, vào lúc đó, đã quá muộn. Thương khóc cho cái chết của Lavoisier, Louis Lagrange nói: *'Họ chỉ mất một khoảnh khắc để chặt đầu ông, và có lẽ cả trăm năm cũng không đủ để tái hiện một cái đầu khác giống như nó'*.

Ở trong phòng thí nghiệm mà không thích thì có lẽ hóa học không phải là tình yêu của bạn†. Riêng về Antoine, cha ông là luật sư, và ông cũng có bằng luật. Nhưng hóa học mới là tình yêu, là đam mê của ông. Ông chưa bao giờ hành nghề luật, và nhờ đam mê của ông (và sự hỗ trợ của bà Marie-Anne), chúng ta có định luật bảo toàn khối lượng, và từ đó hóa học hiện đại bắt đầu.

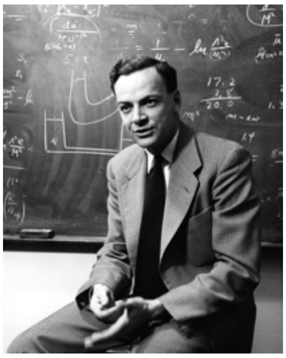
Ngày 5 tháng 9 năm 2023

†Có thể cuốn *Stuff Matters: Exploring the Marvelous Materials That Shape Our Man-Made World* của Mark Miodownik (Miodownik, 2015) sẽ giúp bạn có một cái nhìn khác về hóa học.

# Chương 49

# Cảnh giới tối cao của sự hiểu biết?

RICHARD Feynman là thần tượng của mình, dù mình biết tới ông trể quá. Theo mình thì Feynman là người đạt tới cảnh giới tối cao của sự hiểu biết về Vật lý. Tại sao nói như vậy? Dĩ nhiên không phải vì ông là chủ nhân giải Nobel Vật lý. Mà câu chuyện nó như này nè.



Mình thử tưởng tượng mình là cảnh sát giao thông ở Pasadena và một hôm Feynman đang lái xe tới Viện Công Nghệ California (Caltech). Mình chặn xe ông lại, dù ông không hề chạy quá tốc độ (mình là police mà) và hỏi "ông có thể giải thích cho tôi nhiệt là gì? Tại sao nó truyền đi trong vật chất". Feynman nghe hỏi vậy thì mừng như lượm được vàng, ông nói: "chú muốn thì lên xe đi cùng tôi, tôi nói chú nghe". Mình leo lên xe ông. Và Feynman chỉ cần dùng ngôn ngữ bình dân, không đao to búa lớn, dĩ nhiên không phương trình vi phân vi phiết, vẫn giải thích cho mình hiểu được nhiệt là gì. (Feynman phải dùng ngôn ngữ bình dân vì mình là cảnh sát giao thông, phật lòng mình là ăn ticket ngay!)

Dĩ nhiên đây chỉ là "giấc mơ" gặp thần tượng của mình. Nhưng mà nó không sai sự thật là bao. Bằng chứng là trong video (link bên dưới), các bạn có thể thấy Feynman nói về Vật lý nó nhẹ nhàng, dễ hiểu làm sao. Và các bạn cũng sẽ thấy ông YÊU Vật lý nhiều đến dường nào. Mắt ông sáng lên khi nói về nó. Phải yêu cái gì thì bạn mới làm nó tốt nhất. Còn không yêu nó thì bạn chỉ làm "cho có".

Đó là cảnh giới cao nhất của sự hiểu biết. Giả sử có ai từ hành tinh khác đến thăm trái đất, chỉ vào cái TV và hỏi bạn nó là cái chi. Nếu bạn trả lời "là cái TV" thì làm sao người ngoài trái đất hiểu được. Bạn phải trả lời như Feynman, bằng ngôn ngữ bình dân, bắt đầu từ những thứ căn bản nhất.

Feynman, dĩ nhiên là người thông minh, nhưng ông cũng may mắn có người cha "khác thường". Cha Feynman không có gì đặc biệt về học thuật nhưng từ nhỏ ông dạy Feynman rằng *biết tên của cái gì không đồng nghĩa với việc hiểu nó*. Wow, quá đúng. Ai hỏi mình cái chi dính trên tường mà chiếu hình ảnh động đẹp vậy, mình đáp ngay: cái ti vi, vậy mà không biết. Người bạn nước Anh, đứng bên cạnh, chèn vô: "nó là cái television mà". Thật ra mình cũng không biết gì về cái TV hơn người hỏi! Và chú người Anh kia cũng vậy.

Vậy nên, các bạn trẻ xin nhớ cho:

> *"Biết tên của cái gì không đồng nghĩa với việc hiểu nó."*

Nếu bạn làm theo (như Feynman) bạn sẽ hiểu cái thế giới này hơn. Còn không theo nó (như mình), thì bạn sống một cuộc đời mơ mơ hồ hồ.

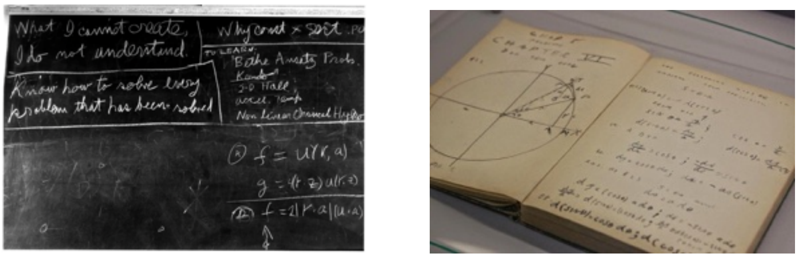
Mình hay dắt 2 con "chó" nhà mình đi công viên (xem hình bên), và trong khi chúng vui chơi thì mình làm chi đây? Mình nhớ lại Feynman và tự đặt câu hỏi và tự trả lời về một vấn đề mình đang học/làm. Mình cố gắng trả lời đơn giản nhất có thể. Mình tự trả lời 'out loud' như thể đang được phỏng vấn vậy. Mình nghĩ đây có thể là một cách học hiệu quả. Sau khi học môn gì một thời gian thì các bạn trẻ có thể tự hỏi và tự trả lời về môn đó. Đừng học bị động chờ thầy cô ra đề kiểm tra rồi làm. Không ai bảo đảm câu hỏi trong các bài kiểm tra thật sự giúp bạn hiểu bản chất vấn đề! Và đây cũng là cách luyện hình dung mọi thứ trong đầu. Lúc Feynman nói về các nguyên tử chuyển động thì trong đầu ông, mình chắc chắn 100%, sẽ có hình ảnh các viên bida chuyển động rất sống động. Tương tự vậy lúc Kỳ tiên Thập Liên Bá Hồ Vinh Hoa đánh cờ tướng, ông không thấy 32 quân cờ như 32 miếng gỗ bất động. Thay vào đó Hồ tiên sinh sẽ thấy các quân cờ của ông rất sinh động, như các mãnh tướng đang công thành mãnh liệt.

Đó là tư duy hình ảnh (visual thinking). François Jacob (1920 – 2013) là nhà sinh học người Pháp. Ông chia sẻ giải Nobel y sinh năm 1965 (với Jacques Monod and André Lwoff). Bạn có biết điều đầu tiên làm trong ngày của Jacob là gì không? Là nằm trên giường, và hình dung trong đầu toàn bộ căn nhà của ông, rồi toàn bộ khu hàng xóm. Ông rảnh quá không có gì làm? Không không, không đời nào. Ông đang luyện visual thinking! Wow. Đây là điều mình chưa nghe, chưa biết, chưa thấy bao giờ. Mình là, từ từ, để lấy giấy ra, hoặc lấy máy tính ra đã. Và vì như vậy tư duy hình ảnh mình là con số 0 tròn trỉnh. Không phải đáng tiếc, lắm thay.

Giờ thử hỏi tại sao Feynman có thể hiểu rành rọt về Vật lý như vậy. Dĩ nhiên câu trả lời dễ nhất là: ông thông minh, ông tò mò, ông giỏi Toán... Nhưng mà có một câu ông viết trên bảng đen trong phòng làm việc của ông làm mình suy nghĩ rất nhiều. Ông viết: "What I cannot create, I do not understand" (Hình 49.1a), tạm dịch:

> *"Cái gì tôi không tạo ra được tôi không hiểu nó".*

Và ông rất chủ động trong việc học. Năm 1930 trường cấp 3 của Feynman không dạy vi tích phân. Ông làm sao? Ông tự học. Xem hình dưới đây là note Toán của ông lúc học calculus.




(a) (b)

Hình 49.1

You're my man, Sir.

PS. Link đến video về Feynman: https://www.youtube.com/watch?v=P1ww1IXRfTA&t=7s

Ngày 10 tháng 3 năm 2023

# Chương 50

# Cờ tướng và việc học

TRONG bài này mình chia sẻ một trải nghiệm cá nhân liên quan đến trò chơi cờ tướng. Ở phần cuối mình sẽ bàn về sự liên quan của câu chuyện cờ tướng và việc học.

Mình biết tới cờ tướng từ khá sớm. Hồi nhỏ mình hay ngồi xem ba mình đánh cờ với chú Lộc hàng xóm, và mình bắt đầu đánh cờ tướng từ lúc nào không hay.

Ba mình thích đánh thế trận phi tượng, tức là đi con Tượng (voi) đầu tiên lên che chở cho con Tướng. Mình vì vậy cũng có thói quen phi tượng (cưỡi voi) này.

Lúc vào đại học thì mới có dịp đánh cờ với cao thủ từ mọi miền. Ban đầu thì đánh với Quang và Hiếu (bạn học cấp ba). Hai chú này thì lại đánh thế trận pháo đầu, tức là đi con Pháo đầu tiên, vào chổ mà con Tượng hay đứng che con Tướng. Nhưng mà con Pháo đầu này vào đó không phải để lo cho con Tướng, mà nó nhắm vào con Tốt phe bên kia. Như vậy ai đánh Pháo đầu là người thích phong cách tấn công, đánh nhanh thắng nhanh. Ba mình, là người thích cưỡi voi, nên là người đánh chậm và chắc. Giờ ngẫm lại, mình cưỡi voi nên cái gì cũng chậm: 27 tuổi mới đi máy bay, 32 tuổi mới xong TS, 35 tuổi mới biết lái xe, 36 tuổi mới có công việc ổn định. Và 42 tuổi mới biết lên Facebook chém gió.

(Paulo Coelho–nhà văn nổi tiếng người Braxin–xuất bản cuốn sách đầu tiên lúc 35 tuổi. Joanne Rowling cũng xuất bản Harry Porter lúc 30 tuổi. Có người thì thành công sớm (như diễn viên Lindsay Dee Lohan, người đóng phim *The Parent Trap* lúc 12 tuổi), có người thì là *bông hoa nở muộn*. Đó là cuộc sống.)

Ôi phi tượng! Sao không có phi máy bay trong cờ tướng?

Hầu như là mình đánh thua Hiếu và Quang, và do đó mình đổ lỗi cho thế Phi Tượng! Thật ra mình thua là vì lười suy nghĩ. Mình đánh cờ chỉ nghĩ tối đa là 2 nước hoặc lúc nào thua nhiều quá muốn thắng gỡ gạc danh dự thì 3 nước. Không nhiều hơn.

Sau đó thì gặp anh Tri, một cao thủ cờ Tướng. Anh Tri chấp mình một Pháo hay một Mã mình vẫn thua. Từ khi vào cao học thì mình đã biết mục đích cần làm nên không còn chơi cờ Tướng nữa. Từ đó (2004) tới nay mình chỉ đánh cờ với ba mình mỗi khi về Huế thăm nhà. Có vài lúc đánh với cậu Lực lúc cậu ra Huế chơi. Cả hai cha con bị đánh teo tua.

(Lúc ở Delft cùng phòng với Đăng hình như có đánh và thua Đăng luôn. )

Những tưởng cơ duyên với cờ Tướng chỉ có vậy thì cô Vi ập đến. Rảnh ở nhà không biết làm gì, phim kiếm hiệp thì xem chán chê rồi, mình tình cờ lên youtube xem cờ Tướng. Đó là kênh Vịt Ú Cờ Tướng, mà chủ kênh không ai khác chính là TS Toán học Phan Thành Việt–em trai của GS Toán học Phan Thành Nam. (Tên hai anh em ghép thành Việt Nam, thật có ý nghĩa). Vịt ú có phong cách bình luận cờ tướng rất kiếm hiệp thế nên mình bị cuốn hút. Nhờ kênh đó mà mình mới biết đến Ma kỳ Dương Quan Lân. Người khăn gói từ quê nhà Quảng Đông lên Thượng Hải hoa lệ phù du mở kỳ đài thách đấu quần hùng thiên hạ. Ma kỳ không thua dù chỉ một trận trong 800 trận. Vậy mà chỉ còn 2 trận cuối trước khi vinh quy bái tổ về Quảng Đông thì thua cả hai. Mà Dương lão thua ai? Thua một chú nhóc 15/16 tuổi! Giang hồ giờ có thêm một nhân vật có danh hiệu mỹ miều Thần đồng cờ tướng Lý Nghĩa Đình.

Sau này Lý thần đồng để lại cho đời ván cờ phế sạch bàn cờ để thắng Trần Đức Nguyên. Trong danh cục này Lý chỉ còn một con Mã trong khi Trần còn một xe, hai pháo và một Mã. Nhưng Trần chết đứng như Từ Hải (xem hình bên, Trần cầm quân đỏ).

Nhờ Vịt Ú mà mình biết đến Thập Liên Bá Hồ Vinh Hoa, người lập kỷ lục vô địch giải cờ tướng cá nhân toàn Trung quốc 10 năm liên tiếp. Chính Hồ tư lệnh là cha đẻ của thế Phi Tượng. Mỗi lần Ma kỳ Dương Lão mà thấy Hồ cầm con Tượng lên là biết hôm ni sẽ là một ngày mệt mỏi! Ngoài ra Hồ tư lệnh còn đẻ ra thế Uyên Ương Pháo (tức 2 con pháo, 1 trước 1 sau). Người ta nói về Hồ như sau: sáng tạo vô hạn và thủ đoạn vô biên.

Sao lại nói Hồ thủ đoạn vô biên thì xin hỏi Đông Bắc Hổ Vương Gia Lương về trận đánh năm 1964 ở Ninh Hạ. Ở trận đó Vương chắc thắng tới 99.99%. Ông nhìn sang các bàn cờ bên cạnh, miệng không quên nở một nụ cười. Còn Hồ tư lệnh thì sao? Hồ mặt mày xanh lét thẳng thốt la lên "Á" và đưa con Pháo nhét vào miệng Vương và nói: "mời Vương sư tổ ăn Pháo". Vương ăn ngay và ngộ độc chết tươi, và mất luôn chức vô địch vào chính tay Hồ tư lệnh.

Nhờ Vịt Ú mà mình biết đến Đông Bắc Hổ Vương Gia Lương, người dù chưa một lần vô địch cờ tướng Trung Quốc, nhưng ai nghe tên cũng sợ khiếp vía. Người ta nói Vương Gia Lương đánh cờ có thể phế Mã, phế 2 xe và thậm chí phế luôn con Tướng. (Phế quân là khi mình cho người khác ăn nó miễn phí, để chiếm lợi thế về hình trận). Xem Vương lão đánh thì sướng nhưng mà với phong cách 'cẩu thả trong phòng ngự' như vậy, thì chuyện Vương không một lần vô địch TQ cũng không trách ai được. Ở hình bên là ván cờ Vương (cầm quân đỏ) đánh với Hồ Vinh Hoa năm 1964. Các bạn thấy đó, đánh với Hồ Tư Lệnh mà Vương kéo hết quân qua sân Hồ chơi, để lại con Tướng của mình đấu với Xe Pháo Mã Chốt của Hồ! Tuy ván này Vương thắng nhưng là do Hồ bỏ qua một nước cờ hay. Ý mình ở đây là, chúng ta phải biết điểm yếu của mình là gì và kiểm soát nó; học giỏi Toán mà không quan tâm trình bày thì điểm thấp, mà cho tới hiện tại các bạn học sinh vẫn phải sống nhờ điểm thôi.

Cũng nhờ Vịt Ú mà mình biết đến Lý Lai Quần, người đánh cờ trông nhẹ nhàng mà giết người lúc nào không hay. Phong cách của ông người đời gọi là Cẩm Lý Tàng Châm (trong bông giấu kim). Hồ Vinh Hoa, Dương Quang Lân và Lý Lai Quần được mọi người xưng tụng là Kỳ Tiên, Kỳ Ma và Kỳ Thánh.

Hồ tư lệnh làm bá chủ thiên hạ từ 1960 cho đến 1980 thì xuất hiện khắc tinh: Đông Phương Điện Não (máy tính Phương Đông) Liễu Đại Hoa. Liễu vô địch TQ hai năm 80-81. Ông này thì có thù với 2 con Mã nên lúc đánh cờ ông cho đối thủ ăn chúng miễn phí. Có điều ông không nói cho đối thủ là ông đã tẩm thuốc độc vào 2 con Mã. Ông có trận thắng Hồ Tư Lệnh năm 1991 làm nên lịch sử. Trong trận đó ông phế 2 mã nên chỉ còn Xe, 2 Pháo trong khi Hồ còn 5 quân (xe, 2 Pháo, 2 Mã). Người đời gọi là ván cờ Ba đánh Năm và Liễu thắng.

Rồi đến một hôm mình không còn thích xem Vịt Ú nữa. Vịt Ú hay lạm dụng các chiêu thức võ công lúc bình luận cờ mà quên việc giải thích tại sao kỳ thủ đánh ra nước cờ đó. Dù sao thì mình cảm ơn Vịt Ú và mình ngưỡng một hai anh em nhà Phan này. Mình đi tìm kênh cờ tướng khác và mình đã gặp kênh Talkshow Cờ Tướng do một người tên Cường làm. Mình không biết nhiều về chủ kênh nhưng mình giờ cứ chờ tới tối thứ 7 để nghe Cường bình cờ. Mình mê kênh của Cường vì: (1) bình luận hài hước (trên đời có gì bằng nụ cười), (2) bình luận rất logic, câu trước câu sau ăn khớp vào nhau và cuối cùng (3) Cường dùng phần mềm để phân tích các thế cờ nên xem kênh này mình hiểu được vì sao Hồ tư lệnh lại đi nước cờ không giống ai như vậy và (4) mình bị giọng nói của Cường mê hoặc (như nhiều người mê giọng của MC Nguyễn Ngọc Ngạn vậy).

Ma kỳ Dương Lão là người Quảng Đông và ông có 2 truyền nhân. Họ là Dương Thành Thiếu Soái Lữ Khâm (cháu 10 đời của Lữ Bố) và Kim Cương Bất Hoại Hứa Ngân Xuyên (con cháu của danh tướng Tam quốc Hứa Chử). Hai vị đệ tử này–gọi là Lĩnh Nam Song Hùng– đã vô địch giải cá nhân TQ khoảng trên 10 lần (gộp lại). Người đời gọi Hứa gia là Kim Cương Bất Hoại vì ông đánh cờ, như Talkshow cờ tướng nói, mà một giọt nước mắm cũng không lọt vào được. Sư huynh của Hứa gia là Lữ Khâm thì phong cách giống Vương Gia Lương tức là chém giết loạn xạ.

Trong khi đó đồ đệ của Thập Liên Bá Hồ Vinh Hoa thì bèo nhèo. Trò không bằng thầy (vì không thể!). Ngược lại, Tân Đông Bắc Hổ Triệu Quốc Vinh–đệ tử ruột của Vương Gia Lương–đã 3 lần đăng quang vô địch TQ. Dĩ nhiên cờ tướng Việt Nam chưa bằng cờ tướng TQ nên các kênh bình cờ chủ yếu nói về các kỳ vương TQ. Tuy nhiên gần đây mình thấy có bình các danh cục của kỳ vương Nam quốc. Mình thích nhất là Tây Độc Nguyễn Thành Bảo. Tây Độc đã không ít lần hạ đo ván các kỳ vương phương Bắc mà trong số đó làm mình thích thú nhất là ván Tây Độc trói 3 quân Xe Pháo Mã (xem hình) của Dương Thành Thiếu Soái Lữ Khâm–đại đồ đệ của Ma kỳ Dương Lão. Vì đã điểm huyệt các quân của Lữ Khâm, con Tốt của Tây Độc chỉ việc cầm dao đi vào cung xẻo "cái đó" của Lữ gia. Sợ đau Lữ Khâm xuống ngựa, cưỡi giáp, xin hàng như Vịt Ú thường bình luận.

Xin cảm ơn Vịt Ú và Talkshow Cờ Tướng đã cho mình những giây phút thư giãn sảng khoái. Xem đá banh thì lúc buồn lúc vui. Xem cờ tướng, ngược lại, lúc nào cũng vui vì mình không fan ai cả. Mình fan cái bàn cờ vô tri vô giác và 32 quân cờ cũng vô tri vô giác.

Mình chắc chắn giờ mình đánh cờ sẽ hay hơn so với trước khi xem kênh Vịt Ú và Talkshow Cờ Tướng. Tại sao? Vì mình đã được xem các Kỳ vương hàng đầu thế giới thi đấu, và còn được các bình luận viên giải thích các bước đi của họ. Bây giờ mình hiểu là thắng thua ở một ván cờ không nhất thiết là ở quân số, mà có nhiều khi là ở thế trận. Mình biết được có thể đánh Tuần Hà Pháo (tức con Pháo đứng trên bờ sông). Trước kia mình không nghĩ ra con Pháo lại có thể lên đó đứng. Mình con hiểu được câu nói *Dục tốc bất đạt* ngay trên bàn cờ. Nhiều lần các kỳ vương dù đang tấn công ào ạt, sắp thắng tới nơi, vậy mà nước tiếp theo, thay vì đốt thành trì đối thủ, họ chọn lên con Sỹ. Cũng trên bàn cờ, mình hiểu câu nói *Của Thiên trả Địa* nghĩa là cái gì không phải của mình thì cố giành giựt cũng không được. Nhiều khi kỳ thủ ăn con xe của đối thủ, chưa kịp vui mừng thì vài nước sau phải nhả lại chính con xe, hay thậm chí là con Tướng.

Mình đã gặp Hironaka như June Huh vậy.

Dĩ nhiên là chúng ta có thể từ câu chuyện cờ tướng mà suy ra cho các môn khác. Nếu học vẽ (hay thích vẽ) thì ít nhất phải một lần thưởng thức Monet hay Picasso (có người giải thích cho). Chắc chắn sau đó chúng ta sẽ vẽ khác đi. Học văn mà không một lần đọc Shakespeare hay Hemmingway thì trình sao lên được? Học Toán cũng không ngoại lệ. Chúng ta phải ít nhất xem vài tác phẩm kinh điển. Dĩ nhiên các tác phẩm kinh điển của Toán học là các định lý. Để nhìn thấy được vẻ đẹp của các định lý thì các bạn trẻ phải tìm ra Vịt Ú hay Talkshow cờ tướng, những người có khả năng làm hiện ra vẻ đẹp bị chôn vùi trong sách giáo khoa. Và các bạn nên tìm những Vịt Ú cho môn học bạn quan tâm càng sớm càng tốt. Đừng như mình, phải chờ cô Vi rồi mới tình cờ tìm ra bí kíp. (Cho môn Toán, mình đã trình bày một danh sách các Vịt Ú ở Chương 30.)

Ba mình là người dẫn mình vào thế giới cờ tướng cách nay chắc không dưới 35 năm. Lần nào về thăm nhà mình cũng đánh với ông, ông là người chủ động rủ. Có thắng có thua, nhưng mà mình đánh chỉ để hai cha con có dịp làm chung một việc gì, vì mình không quá yêu thích cờ tướng (suy nghĩ nhiều, mệt óc). Sau một thời gian học kỳ nghệ với Vịt Ú và Talkshow, mình quyết định đem ba mình ra làm chuộc bạch, xem thử kỳ nghệ có tiến triển không. Vừa từ Úc về thăm nhà hè 2023 là mình rủ ông đánh cờ, ông lôi cái bàn cờ ra, các con cờ gần như bị mốc. Té ra trong xóm này không ai đánh cờ nên lâu rồi ông cũng chẳng đụng vào nó. Kết quả ngày đầu là 3-3, những ngày tiếp theo là mình thắng, và có những ván thắng như Man city-Real Madrid C1 mùa 2022-2023. Nói ra không phải để khoe, vì ba mình đã là lão tướng Hoàng Trung, thất thập cổ lai hy. Tuy nhiên, mình thấy một điều thú vị, sau khi thắng, *mình chủ động rủ ông đánh cờ, ngày nào cũng vậy, sáng và chiều*! Tuy nhiên, sau vài ngày thì ông tìm ra võ công khắc phục mình, mình thua liểng xiểng, và mình không chủ động rủ ông đánh cờ nữa! Giờ thì ông chủ động thách đấu mình!

Hồi xưa mình 'học giỏi' tiếng Anh cũng là hiệu ứng tương tự. Hồi đó chỉ có tiếng Anh là mình win, còn các môn khác là lose, thế là mình dành trọn thời gian học tiếng Anh, vì nó mang lại cảm giác dễ chịu và nó cho mình cái cảm giác 'hơn người khác'. Vậy thôi. Mình không học English để đi du học (chưa có khái niệm đó bao giờ cho đến 25t). Mình không học English để sau này có 1 công việc lương cao; mình đang có ba mẹ lo cho mọi thứ, không thể nào nghĩ xa đến chuyện cơm áo gạo tiền, trẻ trâu như vậy thì chỉ nghĩ tới *gơn fren* thôi.

Một thành công (ban đầu) sẽ mang lại sự tự tin và can đảm để tiếp tục.

Bây giờ mình xin bình loạn một tí về Kỳ tiên Hồ Vinh Hoa. Một người thành công như vậy rất đáng cho chúng ta tìm hiểu. Những bình luận của mình chỉ dựa trên các video bình luận những ván đấu có sự tham gia của Hồ Vinh Hoa (từ hai kênh yêu thích kể trên). Sau đây là những nguyên nhân cho thành công của Hồ Vinh Hoa:

1. Ông có danh sư. Chúng ta có câu nói *Danh sư xuất cao đồ* và điều này quá đúng với Hồ Vinh Hoa. Sư phụ của Hồ là Hà Thuận An, một trong Hoa Đông Tam Hổ. Hà Thuận An vì sức khỏe yếu nên không thể tự mình giành chức quán quân cờ tướng TQ. Thay vào đó, ông dành hết tâm trí đào tạo Hồ Vinh Hoa. Hơn nữa ông nhiều lần cản trở các đối thủ của Hồ nhằm giúp Hồ lên ngôi vô địch giải cá nhân cờ tướng TQ.

2. Ông hiểu biết sâu rộng về cờ tướng. Làng cờ TQ chia ra làm hai phái: Nam phái và Bắc phái. Hồ vốn là người thuộc Nam phái với lối đánh công chắc thủ vững như đội tuyển bóng đá nam Italia. Tuy nhiên, ông đã theo Vương Gia Lương–một cao thủ Bắc phái–để học thêm lối đánh tấn công như vũ bảo. Ông là một trong những người hiếm hoi am hiểu cả hai trường phái.

3. Ông nghiên cứu về cờ tướng (là tác giả của cuốn *Phản cung mã chuyên tập*) và huấn luyện cờ tướng.

4. Ông là người có khiếu về môn này, vì ông có những nước cờ nằm ngoài sách vở.

5. Ông tìm ra đam mê của đời mình (từ rất sớm) và theo đuổi nó; điều này giống như việc Federer tìm thấy trái banh nỉ (cũng chơi từ rất sớm lúc ông 8 tuổi) hay Lionel Messi gặp trái bóng tròn (ngạc nhiên thay cũng từ 8 tuổi). Như vậy, so với nhiều *bông hoa nở muộn*, Hồ tư lệnh rõ ràng có ưu thế lớn vì xuất phát trước.

6. Ông am hiểu tâm lý học; bằng chứng là lần ông hãm hại Vương Gia Lương năm 1965 bằng cách giả vờ ra vẻ sợ sệt, mặc mày xanh mét; hay như ông tốn hơn 10 phút mới đi nước cờ đầu tiên trong ván Thuận Pháo Tranh Vương với Phó Quang Minh. Làm chi vậy? Chỉ để cho Phó trở nên ít đề phòng (vì hơn thời gian) và từ đó sơ suất dẫn đến thua cuộc, mất luôn chức vô địch cờ tướng TQ năm 1979.

7. Ông là người tìm tòi phát triển những món võ công mới lạ. Theo quan sát của mình, Hồ hay dùng những món võ mới chế như Uyên Ương Pháo trong những trận thuộc giải đồng đội TQ.

8. Ông là người có phúc tinh chiếu mạng. Khuôn mặt của Hồ rất đẹp, đầy phúc khí. Trong kỷ lục 10 lần vô địch liên tiếp thì không ít lần các đối thủ trực tiếp của ông tự nhiên đi cờ tầm bậy. Giải thích cho điều này thì còn gì ngoài phúc khí của Hồ quá lớn?

9. Ông sinh ra rất đúng thời điểm. Hồ tư lệnh sinh năm 1945, và chỉ bốn năm sau, TQ thống nhất. Khác với sư phụ Hà Thuận An hay Ma kỳ Dương Quan Lân–những người sinh trước ông rất nhiều và chịu nhiều cơ cực (Hà sư phụ sức khỏe yếu cũng từ đó mà ra), Hồ sinh ra trong hòa bình, khi mà người ta có thể sống bằng nghề chơi cờ tướng. Hơn nữa, thời

> ông–khác với thời nay–không có các phần mềm cờ tướng. Với tư chất vượt trội, ông không có quá nhiều đối thủ xứng tầm. Ngoại tinh lai khách Vương Thiên Nhất, cao thủ số một TQ hiện nay và người được cho là chơi cờ như software, chỉ mới vô địch TQ bốn lần và không có hai lần liên tiếp nào.

Sau khi viết xong mấy dòng này mình thấy chưa đã nên đã google một tí. Mình đã tìm thấy cuốn *Hồ Vinh Hoa – Tượng Kỳ Nhân Sinh* của tác giả Thừa Chí, link ở `https://webcotuong.com/ho-vinh-hoa-tuong-ky-nhan-sinh/`. Sau khi đọc xong thì mình thấy Hồ Vinh Hoa là một người khiêm tốn, ăn nói khéo léo, ai gặp cũng thích. Dù là một thiên tài cờ tướng, ông làm việc rất chăm chỉ: lúc vào đội cờ Thượng Hải, ông vẫn ở lại trung tâm cờ để luyện công vào chủ nhật. Lúc thân mẫu ông biết chuyện, chất vấn ông làm chi phải bán mạng như vậy, ông trả lời như sau:

> *“Mẹ, mẹ không biết đạo lý thêm một chút nỗ lực là thêm một chút thành quả sao? Nỗ lực cũng có phân loại, có nỗ lực bình thường, cũng có nỗ lực hơn người. Mẹ muốn hơn người ta, chỉ là nỗ lực bình thường là không được, bởi vì người ta cũng đang nỗ lực, phải nỗ lực hơn người, mới có thể vượt qua người ta, mẹ cũng đã từng nói là một người phải chăm chỉ thường xuyên sao? Đây là đúng. Chăm chỉ và nỗ lực, cách nói không giống nhau, nhưng ý nghĩa là như nhau. Rất nhiều người thành đạt trong sự nghiệp, cũng đều là vô cùng chăm chỉ nỗ lực. Lấy Dương Quan Lân quán quân cờ tướng toàn quốc làm ví dụ, có thể nói là ông ta vô cùng chăm chỉ nỗ lực. Con sau này muốn tranh đoạt quán quân toàn quốc, mẹ, mẹ nói, con không đặc biệt chăm chỉ nỗ lực, có được không?"*

Tại sao tiểu Hồ chăm chỉ đến vậy? Thì ra ông cũng là nạn nhân của câu *thất bại là mẹ của thành công*. Trước khi vào đội cờ Thượng Hải, tiểu Hồ (khoảng 12-13t) là quán quân thiếu niên toàn Thượng Hải, thế nhưng khi vào đội cờ tập luyện ông nhận ngay 30 trứng vịt (thua 30 ván). Với một người kiêu ngạo, có tính hiếu thắng thì đó là một điều thật khó mà nuốt trôi. Và cuối cùng, cả nhà Hồ tiên sinh từ ba, mẹ cho đến chị hai đều ủng hộ việc chọn cờ làm nghề kiếm cơm của ông. Còn gì tuyệt vời hơn!

Cuối cùng ông biết rõ mục tiêu của đời mình từ rất sớm: vô địch TQ! Trong thể thao thì nếu có tham vọng thì không khó để xác định mục tiêu; ví dụ trong bóng đá nam thì vượt qua Messi, trong làng banh nỉ thì Federer (hay Nadal), trong điền kinh thì Usain Bolt.

Cho các bạn trẻ còn phải tham gia các kỳ thi, trước khi thi đấu hai ngày Hồ tiên sinh không chạm tới cờ, ông chỉ đọc sách (lúc trẻ ông đọc Thủy Hử, Tam Quốc Chí, Tây Du Ký như chúng ta thôi). Ông thường nói: trước khi thi đấu cần cho đầu óc thư giản. Không biết hiệu quả thế nào, các bạn làm chuột bạch thử xem.

Ngày 2 tháng 3 năm 2023

# Chương 51

# Nghệ thuật ước lượng

NƯỚC Mỹ năm 1945, ngày 16 tháng 7, một người đàn ông có tên Enrico Fermi đang đứng quan sát cuộc thử nghiệm bom nguyên tử đầu tiên. Và Fermi làm gì? Ông ném một nắm giấy vụn lên không trung và xem xung kích (sóng từ vụ nổ bom lan đến) di chuyển chúng bao xa. Sau đó, ông tính tay nhanh ra sức mạnh của vụ nổ vào khoảng 10 kN (kilonewtons). Việc tính toán chỉ cần dùng 1 tờ giấy ăn thôi. Vậy thì sức công phá của vụ nổ thực sự là bao nhiêu? Xin thưa, 19 kN.

Đó chính là nghệ thuật ước lượng hay ước tính, mà tiếng Anh gọi là *The Art of Estimation* hay *guesstimation*. Ước tính là một nghệ thuật tao nhã kết hợp lẽ thường và một số số học rất đơn giản được áp dụng cho một vài sự thật.

Các bạn trẻ muốn trở thành kỹ sư hay nhà khoa học giỏi thì cần phát triển khả năng ước lượng như Fermi vậy. Nó sẽ giúp ích rất nhiều trong công việc, và chắc chắn là trong đời sống hàng ngày. Nếu chừng đó không đủ thuyết phục các bạn, thì nên nhớ rằng các công ty hàng đầu khi phỏng vấn hay hỏi những câu hỏi mang tên "bài toán Fermi", ví dụ:

1. Tờ 1 đô la Mỹ có thể tích bao nhiêu $cm^3$?
2. Có thể nhét bao nhiêu trái banh tennis vào 1 chiếc máy bay 747?
3. Có bao nhiêu nguyên tử trên trái đất?

Lúc mình nhỏ nếu có ai hỏi những câu này (mà không phải là trong một kỳ thi hay đợt kiểm tra ở trường) thì mình không suy nghĩ mà trả lời ngay: không biết. Mình ước chi lúc đó có ai dí dao/súng và bảo: giải hay chết? thì giờ mình chắc chắn sẽ là một nhà khoa học khá hơn nhiều. Mình bị bệnh lười, lười suy nghĩ. Bây giờ, khi biết tầm quan trọng của suy nghĩ, mình đã thử giải 2 bài trên, và mình phát hiện, mình không biết tờ 1 đô la nó dài bao nhiêu cm (dĩ nhiên là không dùng thước), dù trong túi lúc nào cũng có 1 đô la (trừ những lúc thủng túi)! Làm bài toán Fermi thì chỉ có bút và giấy thôi. Như Euclid dùng compass/thước để dựng hình vậy. Như vậy, mình chỉ múa máy trên giấy tờ thôi, mình không chịu quan sát thế giới thực. Một người như vậy không bao giờ trở thành kỹ sư hay nhà khoa học giỏi được! Có người sinh ra đã là một người chịu khó quan sát, còn tui thì cứ hững hờ thì làm sao Phính? Phính cũng không biết, nhưng mà nhân vật hư cấu nhà thám tử trứ danh Sherlock Holmes có thể giúp bạn. Sherlock Holmes là một ví dụ xuất sắc về một người thông minh và tò mò. Nếu đọc kỹ truyện về Holmes các bạn trẻ có thể học nhiều thứ; chắc chắn là vậy, dù ông là một nhân vật hư cấu. Vậy thì, hãy bật lửa, cuộn tròn trên cái ghế, và chuẩn bị một lần nữa gia nhập vào cuộc phiêu lưu của Sherlock Holmes và bác sĩ John Watson qua những con đường đầy tội ác ở London để xem Holmes quan sát và suy nghĩ thế nào.

Để không đi vào sai lầm của mình, xin trân trọng giới thiệu các bạn trẻ cuốn sách *Guesstimation: Solving the World's Problems on the Back of a Cocktail Napkin* của Lawrence Weinstein và John Adam (Weinstein and Adam, 2008). Sau khi đọc nó, các bạn sẽ thấy chỉ cần:

1. Chịu khó suy nghĩ

2. Biết cộng trừ nhân chia

3. Và biết tờ tiền trong túi của mình dài nhiêu, rộng nhiêu (làm ơn quan sát thế giới xung quanh). Và cái này quan trọng:

4. Tập luyện ước lượng thường xuyên. (Ronaldo hay Messi còn tập đá banh cả ngày, huống chi chúng ta những người sinh ra không có năng khiếu đặc biệt). Và mình tin lúc trẻ Fermi cũng thích ước lượng và thường xuyên làm vậy.

Chừng đó thôi là đủ để trả lời những bài toán Fermi như "một chiếc ô tô thải vào khí quyển mỗi năm bao nhiêu carbon dioxide (tính bằng kg)?", vượt qua các buổi phỏng vấn và rồi sẽ có một ngày bạn có thể ước lượng như chính Fermi vậy.

Mà Enrico Fermi (1901 – 1954)) này là ai? Xin thưa ông chính là chủ nhân giải Nobel Vật Lý năm 1938. Ông được xem là "kiến trúc sư của kỷ nguyên hạt nhân" và "kiến trúc sư của bom nguyên tử".

Trước khi vào làm thử vài bài toán Fermi thì trước hết chúng ta phải nắm vững một số khái niệm cơ bản, mà trong đó một khái niệm rất quan trọng là đơn vị.

**Đại lượng vật lý, thứ nguyên và đơn vị**. Bây giờ chúng ta sẽ dừng lại, không học thêm gì cao siêu, hãy suy nghĩ về câu sau: *Một cậu bé cao* $150$ *cm, nặng* $50$ *kg, thân nhiệt* $30°$ *C, đang chạy với tốc độ* $25$ *km/h từ nhà tới trường. Cậu tới trường sau 30 phút.* Trong câu này chúng ta gặp hai khái niệm: đại lượng vật lý và đơn vị. Chiều cao, cân nặng, thân nhiệt (hay tổng quát hơn là nhiệt độ), tốc độ, thời gian là các đại lượng vật lý. Centimeter, kilogram, ° C, km/h và phút là các đơn vị.

Để diễn tả cùng một tình huống trên, một người Mỹ lại nói như sau: *Một cậu bé cao* $4.92$ *feet, nặng* $110.23$ *pounds, thân nhiệt* $30°$ *C, đang chạy với tốc độ* $15.53$ *mph từ nhà tới trường. Cậu tới trường sau 30 phút.* Như vậy, đơn vị là một sự lựa chọn, và do đó có thể có trên một đơn vị cho một đại lượng vật lý. Vì vậy, đơn vị không là căn bản. Nó tùy tiện. Chúng ta cần một khái niệm khác, căn bản, và dùng nó để phân biệt các đại lượng vật lý khác nhau. Khái niệm đó là thứ nguyên, tạm dịch từ tiếng Anh *physical dimension*.

Thứ nguyên là một thuộc tính chúng ta liên kết với các đại lượng vật lý với mục đích phân loại hoặc phân biệt. Khối lượng, chiều dài, thời gian và lực là các ví dụ về thứ nguyên. Có các thứ nguyên cơ bản và thứ nguyên dẫn xuất. Các thứ nguyên cơ bản bao gồm khối lượng, chiều dài, thời gian, điện tích và nhiệt độ. Thứ nguyên dẫn xuất là thể tích, vận tốc, áp suất ...

Chúng ta cần một ký hiệu toán học thích hợp để tính toán với các thứ nguyên. Thứ nguyên của chiều dài được viết là $[L]$, của khối lượng được viết là $[M]$, của thời gian được viết là $[T]$. Sau đó, chúng ta biểu diễn thứ nguyên của các đại lượng khác (ví dụ vận tốc) dưới dạng các thứ nguyên cơ bản. Ví dụ, thứ nguyên của vận tốc là $[L/T]$ hoặc $[LT^{-1}]$; vì vận tốc là quãng đường chia cho thời gian. Thứ nguyên của gia tốc là $[L/T^2]$. Và thứ nguyên của lực, theo định luật hai Newton $F = ma$, là $[MLT^{-2}]$.

Thứ nguyên cho phép chúng ta làm cái gọi là phân tích thứ nguyên (dimensional analysis) để xem một công thức là đúng hay sai. Ví dụ, nếu $s$ là quãng đường của một vật di chuyển với gia tốc $a$, và bạn tìm ra công thức sau cho $s$:

$$s = \frac{1}{2}at^3 \tag{51.1}$$

Làm sao ta biết công thức trên đúng hay sai? Rất đơn giản: kiểm tra xem thứ nguyên của hai vế có giống nhau không. Ở vế trái $s$ là quãng đường nên ta có $[L]$; còn ở vế phải ta có $[LT^{-2}T^3] = [LT]$. Và cam thì không thể bằng quýt, công thức trên sai. Và nếu bạn đang học cơ học cổ điển thì phương trình chuyển động một chiều dưới trường gia tốc hằng số là: $s = \frac{1}{2}at^2$. Giờ thì bạn có thể hiểu tại sao phải là $t^2$ chứ không thể nào là $t^3$. Dĩ nhiên là nếu bạn tìm ra $s = \frac{1}{5}at^2$, thì chúng ta chỉ có thể kết luận thế này thôi: công thức này hợp lý về thứ nguyên, nhưng mà nó có đúng với thực tế hay không thì lại là một chuyện khác.

Khi chúng ta nói về một đại lượng vật lý cụ thể, ví dụ khối lượng trái đất là $5.972 \times 10^{24}$ kg, chúng ta cần phải dùng tới khái niệm đơn vị (chẳng hạn là kg trong ví dụ này). Đơn vị cung cấp độ lớn của một chiều *so với một tiêu chuẩn tùy ý*. Ví dụ, khi chúng ta nói rằng một người cao sáu feet, ý của chúng ta là người đó dài sáu lần so với một đối tượng có chiều dài được xác định là một foot. Kích thước tiêu chuẩn được chọn, tất nhiên, hoàn toàn tùy ý, nhưng trở nên rất hữu ích để so sánh các đo lường được thực hiện ở các nơi và thời gian khác nhau. Có một số phòng thí nghiệm quốc gia chuyên về duy trì các tiêu chuẩn và sử dụng chúng để hiệu chuẩn các thiết bị.

Khác với các thứ nguyên, trong đó chỉ cần một số ít là cần thiết, có một số lượng lớn các đơn vị để đo lường hầu hết các đại lượng; ví dụ chúng ta có thể đo chiều dài hoặc bằng inches, hoâc bằng mét, centimet và kilomet. Do đó, luôn cần gắn đơn vị vào một số, như khi chỉ chiều cao của một người là 175 cm hoặc là 5 feet 9 inches. *Không có đơn vị, một số chỉ là vô nghĩa và có thể gây hiểu nhầm cho độc giả.* (Dĩ nhiên là trừ các số như $\pi = 3.14$ hay $e = 2.71$).

Hệ thống đo lường quốc tế SI, viết tắt từ tiếng Pháp *Système international d'unités*, là hình thức hiện đại của hệ thống đo lường mét. Nó bao gồm một hệ thống chặt chẽ các đơn vị đo lường bắt đầu bằng bảy đơn vị cơ bản, bao gồm giây (đơn vị thời gian với ký hiệu s), mét (chiều dài, m), kilogram (khối lượng, kg), ampere (dòng điện, A), kelvin (nhiệt độ termodinamic, K), mol (lượng chất, mol) và candela (cường độ sáng, cd).

Từ bảy đơn vị cơ bản này, chúng ta có thể tạo ra nhiều đơn vị dẫn xuất khác. Ví dụ, đơn vị lực trong SI là gì? Sử dụng định luật thứ hai của Newton, chúng ta viết

$$[F] = ma = \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \tag{51.2}$$

Và để tôn vinh Newton, chúng ta phát minh ra một đơn vị mới gọi là N cho lực (nên nhớ rằng lực là một đại lượng rất phổ biến nên việc nó có đơn vị riêng là chuyện dễ hiểu), và do đó 1 N=1 kgm/s$^2$. Tương tự, chúng ta có 1 Pa=1 N/m$^2$ là đơn vị SI của áp suất và ứng suất, tôn vinh nhà Toán học người Pháp Blaise Pascal. Trong Bảng 51.1 là một số đại lượng vật lý thông dụng, cùng với thứ nguyên và đơn vị trong hệ SI.

Bảng 51.1: Một vài đại lượng vật lý thông dụng cùng với thứ nguyên và đơn vị trong hệ SI.

| Đại lượng vật lý | Định nghĩa | Thứ nguyên | SI (m,s,N) |
|---|---|---|---|
| chiều dài | - | $[L]$ | m |
| thời gian | - | $[T]$ | s |
| khối lượng | - | $[M]$ | kg |
| vận tốc | quãng đường/thời gian | $[LT^{-1}]$ | m/s |
| lực | khối lượng × gia tốc | $[MLT^{-2}]$ | N (=1 kgm/s$^2$) |
| áp suất | lực / diện tích | $[ML^{-1}T^{-2}]$ | Pa (=1 N/m$^2$) |

Câu chuyện về các đơn vị đo lường vẫn chưa kết thúc. Tại sao chúng ta có mét nhưng vẫn cần kilomet? Lý do rất đơn giản: *chúng ta không dễ dàng xử lý các số quá lớn hoặc quá nhỏ*. Nếu chúng ta chỉ có mét là đơn vị duy nhất cho độ dài, thì cho độ dài nhỏ hơn 1 mét, chúng ta phải sử dụng số thập phân ví dụ như 0.05 mét. Để tránh việc đó, các đơn vị con (sub-units) ra đời. Thay vì 0.05 mét, chúng ta nói 5 cm; dễ hiểu hơn nhiều. Tương tự, với 20 000 mét, chúng ta viết 20 km, điều này dễ hiểu hơn nhiều. Tóm lại, các đại lượng lớn và nhỏ được biểu diễn bằng các đơn vị con, và đơn vị con được tạo ra cách sử dụng các *tiền tố* phù hợp với đơn vị cơ bản (đơn vị cha); chẳng hạn ta có *g* (gram) thì sẽ có *kg* với tiền tố k hay *Yg* (yottagram). Một ví dụ là: khối lượng của Trái đất là $5.972 \times 10^{24}$ kg, một số rất lớn; nếu dùng yottagram thì khối lượng trái đất chỉ là 5 972 Yg (yottagram). Bảng 51.2 trình bày tất cả các tiền tố trong hệ SI.

Phần chém gió như vậy là đủ rồi Phính. Làm vài bài toán Fermi xem thế nào đi. Xin đừng vội. Chúng ta còn phải chuẩn bị thêm vài món võ công trước đã. Đó là kí hiệu khoa học và bất đẳng thức AM-GM.

Bảng 51.2: Tiền tố trong SI. Tên tiền tố chủ yếu được chọn từ các từ tiếng Hy Lạp (các lũy thừa dương của 10) hoặc từ tiếng Latinh (các lũy thừa âm của 10), mặc dù gần đây việc mở rộng phạm vi các lũy thừa của 10 đã dẫn đến việc sử dụng từ ngôn ngữ khác. 'Kilo' bắt nguồn từ tiếng Hy Lạp có nghĩa là 1000 ($10^3$), và 'milli' bắt nguồn từ tiếng Latinh có nghĩa là một phần nghìn ($10^{-3}$).

| | **Đo đạc lớn** | | | **Đo đạc bé** | |
|---|---|---|---|---|---|
| Tiền tố | Biểu tượng | Multiple | Tiền tố | Biểu tượng | Sub-multiple |
| yotta | Y | $10^{24}$ | deci | d | $10^{-1}$ |
| zetta | Z | $10^{21}$ | centi | c | $10^{-2}$ |
| exa | E | $10^{18}$ | milli | m | $10^{-3}$ |
| peta | P | $10^{15}$ | micro | $\mu$ | $10^{-6}$ |
| tera | T | $10^{12}$ | nano | n | $10^{-9}$ |
| giga | G | $10^{9}$ | pico | p | $10^{-12}$ |
| mega | M | $10^{6}$ | femto | f | $10^{-15}$ |
| kilo | k | $10^{3}$ | atto | a | $10^{-18}$ |
| hecto | h | $10^{2}$ | zepto | z | $10^{-21}$ |
| deka | h | $10^{1}$ | yocto | y | $10^{-24}$ |

**Ký hiệu khoa học**. Khi làm việc với những con số rất lớn như 3 ngàn tỷ, chúng ta không viết nó dưới dạng 3 000 000 000 000 vì có quá nhiều số 0; rất dễ sai lầm viết thiếu hay thừa vài con số 0. (Mà ai cũng biết lương 6 số 0 thì hoàn toàn khác lương 5 số 0.) Thay vào đó, chúng ta viết nó dưới dạng $3 \times 10^{12}$ (có 12 số 0 được viết rõ ràng). Bất kỳ số nào cũng có thể được viết dưới dạng tích của một số nằm giữa 1 và 10 và một số mũ của mười. Ví dụ, chúng ta có thể viết số 257 dưới dạng $2.57 \times 10^2$ và số 0.00257 dưới dạng $2.57 \times 10^{-3}$. Hay một cách tổng quát ta viết

$$\boxed{a = x \times 10^y}, \quad 1 < x < 10 \tag{51.3}$$

trong đó $x$ gọi là *significand* hay *mantissa* và $y$ gọi là số mũ. Cách viết như vậy được gọi là ký hiệu khoa học.

Thực hiện các phép tính với ký hiệu này dễ dàng hơn nhờ vào tính chất của số mũ. Ví dụ, khi nhân các số, chúng ta nhân hệ số và cộng số mũ:

$$(3 \times 10^6) \times (4 \times 10^8) = (3 \times 4) \times 10^{14} = 12 \times 10^{14} = 1.2 \times 10^{15}$$

Một đặc tính quan trọng của kí hiệu này: Ký hiệu khoa học ngay lập tức cho thấy con số đó có lớn hay nhỏ: $3 \times 10^{12}$ lớn hơn $9.9 \times 10^{11}$.

Bây giờ chúng ta sẽ dùng bất đẳng thức AM-GM (tức là Eq. (37.2) ở phần 37.3) để ước đoán một đại lượng. Ví dụ: mỗi năm người Úc ăn bao nhiêu cái bánh pizza? Những câu hỏi tưởng như vô thưởng vô phạt này chính là bài toán Fermi. Chúng ta khônng biết được trung bình mỗi người Úc chén bao nhiêu cái pizza, nhưng mà chúng ta biết mỗi người sẽ ăn trên một cái và dưới 100 cái. Chúng ta, như vậy, đã biết cận dưới (1) và cận trên (100) cho đại lượng cần tìm. Chúng ta có tới hai trung bình: trung bình cộng và nhân, dùng thằng nào? Thử thì biết. Nếu dùng trung bình cộng ta sẽ có khoảng 50. Con số này không tốt vì nó lớn hơn cận dưới (1) tới 50 lần, trong khi nhỏ hơn cận trên chỉ hai lần. Trung bình nhân thì sao? Nó cho ta $\sqrt{1 \times 100} = 10$. Quá tuyệt! Vì vậy chúng ta sẽ dùng trung bình nhân để ước tính một đại lượng khi biết cận dưới và trên của nó.

Chúng ta cần một cách tính nhanh trung bình nhân của hai số $a$ và $b$. Trước hết, ta viết chúng theo kí hiệu khoa học:

$$a = x_1 \times 10^{y_1}, \quad b = x_2 \times 10^{y_2} \tag{51.4}$$

Sau đó, trung bình nhân của $a, b$ có thể tính như sau:

$$GM = \sqrt{ab} = \sqrt{x_1 x_2}\sqrt{10^{y_1+y_2}} \approx \boxed{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)10^{\frac{y_1+y_2}{2}}} \tag{51.5}$$

Nghĩa là, trung bình nhân được tính xấp xỉ bằng cách lấy trung bình cộng của các hệ số và trung bình cộng của các số mũ. Ví dụ, cho $a = 4\times 10^2$, và $b = 7\times 10^6$. Vậy thì, $\sqrt{ab} \approx 5.5\times 10^4$. Kết quả này chỉ khác 4% so với kết quả chính xác. Ví dụ này chọn thật khéo, Phính ơi. Nếu $a = 2\times 10^3$, và $b = 3\times 10^2$ thì tính làm sao? Thì cứ làm sẽ tìm ra cách thôi:

$$\sqrt{ab} \approx \left(\frac{2+3}{2}\right)10^{2.5} \approx 2.5\times 10^2\times 10^{0.5} \approx (2.5\times 3)\times 10^2 = 7.5\times 10^2 \tag{51.6}$$

Ở đây chúng ta đã dùng cái kết quả $\sqrt{10} \approx 3$. Như vậy, lúc tính trung bình nhân mà tổng số mũ (tức là $y_1 + y_2$) là số lẻ, thì trừ $y_1 + y_2$ bởi một và nhân hệ số với 3.

Giờ thì chúng ta sẽ làm vài bài toán Fermi nhé. Các bài này trích từ sách của Einstein và Adams (Weinstein and Adam, 2008).

**Ví dụ 1**. Bao nhiêu người trên toàn thế giới đang ngoáy mũi ngay tại thời điểm này? Để trả lời câu hỏi này trước hết chúng ta cần biết dân số toàn cầu. Vào năm 2023 thì có $8.1\times 10^9$ người sống trên trái đất (thông tin này thì google thôi, nếu lúc phỏng vấn thì các bạn có thể hỏi, không ngại gì cả). Vì chúng ta chỉ cần ước tính nên ta sẽ dùng $N = 8\times 10^9$. Và dĩ nhiên là số người trên toàn thế giới đang ngoáy mũi ngay tại thời điểm này (đặt là $n$) sẽ là một phần của $N$. Tức là $n = x\times N$. Ví dụ, nếu tất cả chúng ta chỉ làm mỗi một việc là cho tay lên mũi và ngoáy thì $x = 1$, và nếu không ai trong chúng ta làm cái việc này thì $x = 0$; do đó $0 < x < 1$. Bài toán giờ trở thành tìm $x$.

Để tìm $x$ thì chúng ta có thể tập trung vào một ngày và xem trong khoảng thời gian đó mỗi người trung bình ngoáy mũi trong bao lâu. Rõ ràng là 10 giây thì quá ngắn và 1000 giây (khoảng 15 phút) thì quá dài, do đó (dùng trung bình nhân) mỗi người trung bình ngoáy mũi tầm 100 giây (hay 2 phút) mỗi ngày. Vì vậy, $x$ sẽ là

$$x = \frac{2 \text{ phút}}{1 \text{ ngày}} = \frac{2 \text{ phút}}{24\times 60 \text{ phút}} = \frac{1}{720} \tag{51.7}$$

Cuối cùng, ta tính được $n$:

$$n = \frac{1}{720}\times 8\times 10^9 = \frac{800}{720}\times 10^7 \approx 10^7 \tag{51.8}$$

Có đến 10 triệu người đang ngoáy mũi ngay tại thời điểm này; do đó bạn đừng ngại, cứ ngoáy; nhưng mà xin đừng bắt chước Joachim Low, huấn luyện viên đội bóng đá nam Đức.

Nhìn lại toàn bộ quá trình tính toán, các bạn sẽ thấy chúng ta không cần dùng máy tính bỏ túi. Đó là lí do tại sao tiêu đề phụ của cuốn sách Weinstein và Adams viết là 'Giải quyết các vấn đề của thế giới trên mặt sau khăn giấy ăn'. Tựa đề này còn cho thấy các nhà vật lý (hay các nhà khoa học nói chung) bị ám ảnh bởi công việc họ yêu thích: đang ở nhà hàng vẫn tính toán nếu có ý tưởng mới. Và chính vì vậy họ mới giải quyết được những bài toán hóc búa.

Ngày 13 tháng 3 năm 2023

# Chương 52

# Ông tiến sĩ, ông là ai?

DẠO này trên Facebook thấy mọi người bàn tán chuyện tiến sĩ (TS) và đề tài áo ngực, nghe thấy mà người nó nóng không ngủ được nên mình xin chém gió về mấy ông bà TS.

Ellen deGeneres–một diễn viên hài, người dẫn chương trình truyền hình, nữ diễn viên, nhà văn và nhà sản xuất người Mỹ–lúc dẫn chương trình Oscar lần 86 (https://www.youtube.com/watch?v=HUmX6CiMoFk) đã có nhận xét rất hay và hài hước:

> *"Quý vị có mặt ở đây trong năm qua đã làm 1400 phim, và quý vị đi học khoảng 6 năm đại học [tổng số năm của tất cả diễn viên]"*

Nói quá hay deGeneres! Khi có nhiều lựa chọn thì bạn có thể chọn bất cứ cái gì bạn thích. Thậm chí bỏ học đại học (như các diễn viên nói trên hay như Bill Gates). Đó, đại học họ còn không thèm, TS thì làm chi?

Đó là câu chuyện của giới Hollywood, còn thái độ người Úc đối với TS thì sao? Một điều mà mình dễ nhận thấy là nghiên cứu sinh (NCS) trong khoa ở trường mình làm toàn Trung Quốc, Việt Nam, Ấn Độ, Iran, Bangladesh, ... Người Úc hiếm thấy. Tại làm răng? Tại vì họ không thấy tại sao phải đi làm NCS, một công việc lương thấp và hại não. Một người, sau khi tốt nghiệp đại học, đi làm liền thì lương vào khoảng 70 ngàn đô Úc. Còn lương NCS bao nhiêu? Xin thưa, tầm 25 ngàn. Bèo quá, làm NCS để làm chi?

Quay ngược thời gian thì lúc làm NCS ở Hà Lan, mình cũng thấy tình huống tương tự. Trong nhóm của Giáo sư mình chỉ có một chú Hà Lan, còn lại phần đông là châu Á. Qua Mỹ làm việc ở Đại học Johns Hopkins cũng thấy như vậy. Có khác chăng là ở đó TQ nhiều lắm.

Hồi xưa mình chọn làm NCS chỉ vì một lí do đơn giản: mình muốn đi nước ngoài và làm NCS là con đường duy nhất. Tại sao phải đi nước ngoài? Thoát nghèo! Bây giờ NCS trong khoa phần lớn là công dân các nước nghèo. Chắc lí do của họ cũng như mình.

Như vậy ở các nước tiên tiến TS chỉ là một lựa chọn, như bao sự lựa chọn khác. Không hơn không kém. Vì vậy mà, nếu để ý một tí sẽ thấy những nhà khoa học ở phương tây lúc viết sách không ghi TS. ThS. KS. trước tên của họ. Đơn giản họ chỉ ghi XXX, Trường YYY. Cái tên XXX là bảo đảm chất lượng rồi, và cả cái tên trường/viện họ làm. Ví như nghe Phương Chứng, Thiếu Lâm là hiểu rồi. Cần chi phải ghi là Đại sư Phương Chứng. Và cái quan trọng hơn là những gì viết trong sách kìa, cái mác TS không bảo đảm gì cả! Nếu phải để mấy cái danh xưng (như TS) vào trước tên mình thì thật ra tác giả không đủ tự tin. Chuyện này giống như cao thủ thì đi tay không, cành lá cũng có thể làm vũ khí. Còn yếu thì đi đâu cũng vác theo đồ chơi. Thậm chí, ở châu Âu nếu ông TS nào mà hay lên TV nói tào lao thì còn bị "xem thường"! Hiểu như thế này: TS chân chính thì ngồi suy nghĩ làm ra tri thức mới, không có thời gian lên TV.

Bàn về chất lượng TS. Chuyện rõ như ban ngày là chất lượng càng ngày càng thấp (ở bất cứ nước nào, trừ những trường danh giá như Havard, MIT, Cambridge...). Tại sao? Bởi vì ông GS ngày nay phải hướng dẫn nhiều NCS quá, và ông cũng bị áp lực (từ nhà trường) xuất bản nhiều báo. Khi lượng tăng thì chất giảm. Đơn giản là thế.

Hồi xưa bài báo chỉ có vài trang, nhưng toàn là tinh hoa. Còn bây giờ bài báo dài 25 trang là chuyện bình thường, mà trong đó có khi không có chi mới. Bây giờ có quá nhiều tạp chí (mà mục đích chính là kiếm tiền) nên sẽ có nhiều báo hơn. Nhiều lúc mình xét duyệt bài, từ chối nó vì chất lượng thấp. Ấy vậy mà, vài tháng sau bài báo y chang xuất bản ở tạp chí khác! Những tạp chí dỏm này cổ súy cho khoa học kém chất lượng.

Đó, TS nó bình thường như vậy ở xứ này. Vậy tại sao lại hot ở nước ta? Mình không biết câu trả lời. Nhưng xin chia sẻ vài cảm nghĩ. Như mình đây học cho đến nỗi quần rách lòi cả mông (vì ngồi trong ghế nhà trường đến 20 năm). Vậy mình được gì ngoài cái danh xưng TS? May mà mình thoát nghèo (như dự định ban đầu). Nhưng mà ba năm rồi chưa về thăm cha mẹ. Vì răng? Vì không đủ tiền mua vé máy bay cho cả gia đình! Có về thì cũng trốn bạn bè. Đó TS nó bèo thế đó. Đôi lúc mình nghĩ như anh R7 mà khỏe. Thích đi mô là lên máy bay riêng phóng vèo.

Đã qua rồi cái thời *Nhất Y nhì Dược tạm được Bách Khoa*. Bây giờ các bạn trẻ có nhiều sự lựa chọn hơn. Không nhất thiết phải là kỹ sư, bác sỹ hay luật sư. Học nhiều để đi làm công cho người khác thì cũng không thú vị lắm. Sao không suy nghĩ thoáng ra, mở công ty chẳng hạn? Các bậc cha mẹ, và các bạn trẻ, xin tham khảo sách *Cha giàu cha nghèo* của Robert Kiyosaki (https://truyenfull.vn/cha-giau-cha-ngheo/) để biết mình có những lựa chọn gì. Thời đại đã thay đổi, phải chăng chúng ta cũng phải đổi thay để theo kịp? Và dĩ nhiên nếu bạn đam mê khoa học thì làm nghiên cứu sinh rồi thành TS là chuyện nên làm.

Tóm lại, TS thì cũng chỉ là một nghề như bao nghề khác, nó không có gì hơn hay thua bất cứ ngành nghề nào cả. Người TS không nhất thiết phải là một người hiểu biết rộng rãi (có khi thậm chí ngược lại, như mình), không nhất thiết phải là một người có đạo đức (không ai dạy NCS bài học đạo đức cả). Đơn giản ông hay bà TS chỉ là ông hay bà tờ sờ mà thôi!

Còn chuyện cái đề tài áo ngực thì mình không chém vì GS Tuấn đã nói rồi.

Ngày 21 tháng 12 năm 2022

# Chương 53

# Đôi dòng về làm nghiên cứu

TRƯỚC hết mình nói ngay rằng nghiên cứu (NC) của mình thuộc dạng không có mợ chợ vẫn đông. Và đã có nhiều nhất lưu cao thủ về nghiên cứu viết về đề tài làm nghiên cứu như thế nào vv. Giáo sư Nguyễn Văn Tuấn là một trong số đó. Tuy nhiên, bạn Hiệp ca đề nghị mình chia sẻ về vấn đề này. Đó là lí do tại sao có bài này. Không như các cao thủ với nhiều lý thuyết, mình xin dùng chính câu chuyện thật của đời mình, rồi mình phân tích nó. Đơn giản vậy thôi.

Trước hết mình nhấn mạnh là không phải mình chọn nghiên cứu vì đam mê khoa học gì cả. Mình chọn con đường làm nghiên cứu sinh (NCS) vì mình muốn đi nước ngoài. Và mình không đi học lớp dạy làm nghiên cứu như thế nào, hay lớp phương pháp nghiên cứu. Mình cũng không đọc sách về mấy chủ đề này. Không có một sự chuẩn bị bài bản nào cả.

Từ cấp một cho đến đại học mình học bình thường (từ lớp 6 thì chưa bao giờ là học sinh giỏi). Nhưng mình thấy có vài điều mình (tình cờ) làm mà sau này rất hợp cho công việc nghiên cứu:

1. Mình thích tự học (xin xem Chương 5 để biết tại sao mình lại tự học nhiều hơn là học từ thầy/cô). Người có thói quen tự học thì rất thích hợp làm nghiên cứu. Vì sao? Vì làm nghiên cứu thì không có cô/thầy nào dạy được cho bạn là phải làm thế này hay thế kia. Giáo sư hướng dẫn cũng không biết nữa cơ mà. Vậy mới gọi là nghiên cứu: mò mẫm.

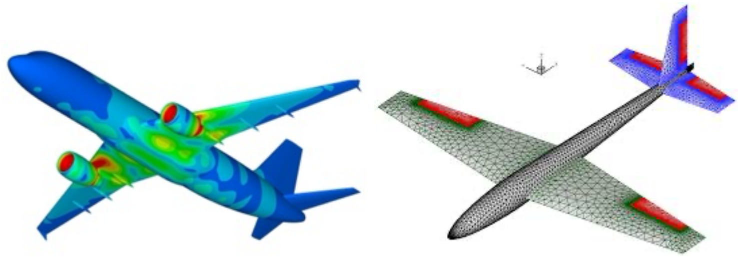
2. Mình có cơ hội giải thích Toán bằng thư (cho người mình yêu nhưng không yêu mình) và điều này vô tình tạo cho mình một khả năng viết khá ổn. Mà, như ai cũng biết, làm nghiên cứu thì khả năng viết lách thì rất quan trọng.

3. Một may mắn nữa là luật 80-20 ứng nghiệm vào việc học ở đại học của mình. Học kỳ một đại học mình tràn trề hi vọng khi có điểm cao môn Toán và Triết, nhưng mà mình rớt môn Vật Lý. Và thế là mình không có động lực học giỏi nữa. Thay vào đó, mình học theo kiểu: môn nào thích thì học nhiều, môn nào không thích thì học qua loa. Và mình tình cờ học hai môn, `C++` và Phần Tử Hữu Hạn (PTHH), 2 môn này không nằm trong chương trình của khoa xây dựng Bách khoa Sài Gòn. Nói là học cho sang thôi, mình chỉ đọc lướt qua một quyển sách `C++`, và đi học dăm ba buổi môn PTHH rồi thôi. Ấy vậy mà, giờ mình làm việc liên quan tới cả hai thứ đồ chơi này! Đó chính là luật 80-20: chỉ có 20% những gì bạn học góp vào 80% thành công của bạn.

4. Một tính cách của mình rất hợp làm nghiên cứu: mình không thích nói chuyện nhiều. Mình chỉ thích nói chuyện với một vài bạn bè thôi. Với những người khác, mình câm. Vì lí do đó nên mình biết mình không thích hợp làm kỹ sư xây dựng (cần giao tiếp này nọ), và đó là lí do mình chọn học cao học, và để rồi đi vào con đường "tội lỗi" lúc nào không hay.

5. Như đã nói ở trên, mình làm NCS không phải vì đam mê khoa học. Không ai xung quanh mình truyền cho mình thứ này, không có sách hay phim ảnh nào tạo cho mình cái đó cả. Nhưng mà mình lại vô tình có một tính cách hợp với người làm nghiên cứu: *mình thích những gì fantasy mà mình không có trong đời thực*. Ví dụ, mình thích đọc truyện kiếm

hiệp mà ai cũng biết là truyện kiếm hiệp thì là về một thế giới ảo tưởng. Mình không thích (và dốt) lập trình Pascal, nhưng mà mình mê mẫn C++, vì hai cái dấu ++ xinh xinh này. Rất khó để diễn tả vì răng. Lúc đi ngang văn phòng cao học Việt-Bỉ, mình mê mẫn ngay mấy tấm poster có hình mô phỏng ứng suất trong một chiếc máy bay và trên thân máy bay có nhiều hình tam giác màu đen (sau này mình mới biết là lưới PTHH), màu sắc rất đẹp (Hình 53.1)! Và mình biết ngay là mình thích học về mấy thứ này. Học để làm gì, ai quan tâm!



Hình 53.1: Thứ xanh đỏ tím vàng này hấp dẫn mình.

6. Học cao học là thời gian mình tập trung học cao độ nhất. Lúc này không có bóng dáng giai nhân nào (có lẽ đã đi lống chầy) và mình biết đích đến: học bổng đi Bỉ ba tháng. Do đó mình chỉ đi học (ban đêm đi dạy Autocad kiếm tiền ăn, tiền nhà ba mẹ giúp). Ấy vậy mà, mình học cho đã và ... không lọt vào danh sách đi Bỉ! Đúng ra thầy Hưng nên làm danh sách dài ra, lấy khoảng 10 bạn thay vì 3 ☺

7. Buồn không? Hỏi chi xì tu pít rứa! Có lẽ mình trầm cảm ít nhiều lúc đó. May mà có bạn bè đi chơi nói chuyện nên rồi cũng ok. Nhưng thất bại đó lại là điều may mắn nhất cho mình! Bởi vì giờ mình đã ở đáy của một cái hố sâu rồi, và muốn leo lên miệng hố thì mình phải làm một điều phi thường. Và mình đã làm được điều phi thường này. Mình chọn một đề tài khó nhất (do anh Hân–lúc đó đang làm NCS ở Uni Texas Austin–chỉ hướng) và nhờ cái đề tài này mà tình cờ tìm được GS hướng dẫn người Pháp (Stéphane) dù mình ở Sài gòn.

8. Sao mình gọi là phi thường? Bởi vì mình hầu như chưa biết gì về đề tài Stéphane giao cho: Phần tử hữu hạn mở rộng (XFEM) cho các bài toàn cơ học rạn nứt dùng lập trình hướng đối tượng C++. Mình chưa quen anh chàng XFEM, cơ học rạn nứt thì có học thầy Hưng (nhưng chẳng học đươc gì vì lúc đó thầy Hưng thích nói về chính chị chính em–mình ghét cái này–hơn! Mình ngồi trong lớp rất sốt ruột vì mình chờ thầy dạy cơ học nứt!). Lạ lùng thay, trong khi có nhiều môn cơ học, mà mình chỉ thích cơ học rạn nứt–là môn khó nhất trong cơ học. Vì răng? Vì mình thích cái gì fantasy! Nhân vật cuối cùng trong đề tài: C++. Nó nói với mình: "Hello, Phính, have we ever met?" Mình e thẹn trả lời: “I biết you nhưng you không biết me”.

9. Trong vòng một năm, mình chỉ có ăn, làm luận văn, và 3 buổi tối đi dạy Autocad, không cua gái. May có anh Mỹ hay đi chơi bóng bàn, có Phong đi đá banh, có chị Kim Anh để tâm sự (và cho mượn tiền) và có Hiền hay đi ăn bún mắm. Trong thời gian đó mình học XFEM, học cơ học nứt, và nhất là học C++. Tự học là dĩ nhiên. Lần đầu tiên mình biên dịch chương trình C++: cả mấy chục ngàn error. Nhưng quý nhân xuất hiện (đây là may mắn đời mình, quý nhân xuất hiện đúng lúc mình cần nhất, và rồi họ ra đi bỏ lại mình tự mò tiếp, cho đến khi có quý nhân khác): Cyrile Dunant. Cyrille là người Thụy Sỹ và làm việc chung lab với Stéphane (ở EPFL). Cyrille nói: “P, tao lập trình không có lỗi biên dịch, tau sẽ giúp mày”. Giờ Cyrille (xem Hình 53.2) làm việc tại ĐH Cambridge, nước Anh. Với sự hướng dẫn nhiệt tình của Stéphane, sự giúp đỡ của Cyrille, và nỗ lực cá nhân, đúng một năm thì chương trình C++ mình chạy cho ra kết quả trùng khớp với kết quả lý thuyết. Hôm đó có Tri, hai đứa mừng rơi cả nước mắt. Không có gì to tát mới mẻ cho nhân loại, nhưng mà nó

là điều gì cực kỳ siêu to khổng lồ cho mình (và Tri): tụi mình–những chàng trai nghèo từ tỉnh nghèo của một đất nước còn nghèo–cũng làm được khoa học, như mấy ông Tây kia!

10. Như vậy, thất bại trong việc đi Bỉ lại là một cơ hội tuyệt vời cho mình để học được nhiều thứ: C++, XFEM, cơ học rạn nứt, học LaTeX, và có được niềm tin là mình cũng có thể làm NC. Khi bị dồn vào tường như vậy, mình đã phát huy được tối đa sức mạnh của mình. Và điều hiển nhiên, qua cơn bĩ cực đến hồi thái lai, mình được đi Pháp làm NCS. Như vậy, mình có một vấn đề, rồi mình tự học tìm tòi để giải quyết nó. Không theo phương pháp khoa học gì cả!

11. Năm 2006, mình hăng hái lên đường đi Pháp với bao nhiêu hi vọng về một tương lai tươi đẹp. Kết quả? Mình rời Pháp sau một năm. Rời Pháp mà không có cái bằng PhD nhé, và cũng không có bà đầm nào! Một năm không làm được gì cho cái đề tài PhD. May mà, vì không muốn phí tuổi trẻ, mình quyết định lúc nào bí thì không nghĩ về PhD nữa và học để nâng cao kiến thức. Và mình đã tự học meshfree methods (vì nó hot và cũng vì nó fantasy, không cần lưới như trong PTHH, sexy quá). Và mình note lại những gì mình học (không hiểu trời xui khiến mà mình có ý định note lại) và mình không học lý thuyết suôn, mình lập trình bằng `Matlab`. Lúc cái note được khoảng 70/80 trang thì mình share cho Timon–bạn của Stéphane–vì Timon là chuyên gia về lĩnh vực này (Hình 53.2). Timon nói, “tau học được vài điều từ note của mày. Hay mày xuất bản đi”. Dù hơi ngạc nhiên, vì cái note này chẳng có gì mới mẻ, nhưng mà xuất bản thì mê tít liền. Thế là mời Stéphane và Marc Duflot (học trò thầy Hưng, một chuyên gia về meshfree) tham gia. Lúc đó là 2007 và cuối năm 2008 thì bài đó xuất bản. Ngạc nhiên thay đó là bài báo được “hát” nhiều nhất (khoảng 1200 ca sỹ đã ca bài này), không chỉ của mình, mà của cả Stéphane, Marc và hình như cả Timon!

Hình 53.2: Từ trái sang phải: Cyrille Dunant, Marc Duflot và Timon Rabczuk.

12. Tại sao cái note của mình được đón nhận như vậy? Có nhiều lí do chủ quan và khách quan. Chủ quan: Timon có số má trong lĩnh vực này. Khách quan thì thế này. Note được viết chủ yếu do mình, một người đang tập tểnh học meshfree, vì vậy nó giải thích rất dễ hiểu (Chuyên gia mà viết thì họ không chú ý đến nhiều chi tiết vì đối với họ chúng là điều hiển nhiên). Hơn nữa, bài báo mình còn cho không chương trình `Matlab`. Như vậy người đọc có cả trọn gói: lý thuyết dễ hiểu, và có chương trình để thực hành. Mà đó cũng là chương trình đầu tiên mình viết bằng `Matlab`, nên nó cũng rất dễ hiểu (nó chỉ có thể dễ hiểu, vì mình chưa biết đủ rành `Matlab` để làm cho nó phức tạp! Biết nhiều đôi lúc có hại là vậy đó).

13. Rời Pháp mình sang Hà Lan. Hôm đầu tiên làm việc ông GS giao cho một tờ A4 trên đó ông đã ghi tay những gì ông muốn mình làm. Không có chi tiết nhé. Đại khái ông muốn: “P, làm multiscale cho fracture của brittle materials. Làm xong tui cho cô siêu mẫu (cái bằng PhD). Làm không xong tui cho vé máy bay về Huế ăn bún bò.” Đó, chỉ có nhiêu đó. Làm GS hướng dẫn dễ thật.

14. Suốt 4.5 năm ở HL, ông không cho mình tờ giấy thứ hai! Nhưng ông cho mình hoàn toàn tự do, thích làm gì thì làm, miễn sao làm được cái trong tờ giấy của ông. Dĩ nhiên là mình

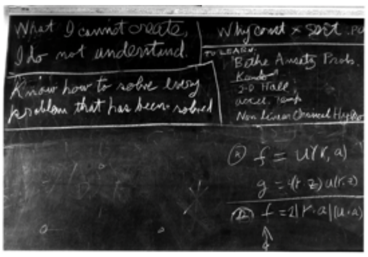
đọc về fracture của brittle materials, đọc về multiscale. Đọc thì dễ. Đọc thôi. Còn làm sao mà làm cái ông GS muốn? Thôi, quên nó đi. Làm cái chi mình có thể thôi. Vậy là mình tự học continuum damage mechanics, continuum mechanics, nonlinear FEM, và code nó trong một chương trình `C++` (có ân nhân Erik giúp về cái chương trình này). Phải làm điều gì đó, đừng để bị bí. Đó là kim chỉ nam của mình. Và dĩ nhiên là mình note lại những gì học được về damage mechanics vv. bằng LaTeX, định dạng như cuốn cuốn sách đàng hoàng, mình thích như vậy. Note này có xuất bản như note meshfree không? Không. Vậy phí thời gian note nhỉ? Không, không! Gần 20 năm sau, có đồng nghiệp rủ mình viết sách vì họ biết mình có mấy cái notes như thế này.

15. Mình làm PhD ở Hà Lan coi như thành công vì nhiều nguyên nhân. Thứ nhất, mình đã thất bại một lần rồi nên có một áp lực vô hình bắt mình phải thành công lần này. Kiểu như không xong thì còn mặt mũi gì nhìn thiên hạ. Thứ hai, mình có ân nhân Erik giúp về `C++` và lập trình PTHH. Thứ ba, ông GS không gây áp lực gì cho mình cả. Trừ việc ông không cho mình xuất bản một bài báo kém chất, thì ông là hoàn hảo. Muốn về VN, ok. Muốn nghỉ, Ok. Thứ tư, và rất rất quan trọng, là ở TU Delft có một cộng đồng các anh chị em VN quá tuyệt vời. Mình đã gặp những người bạn tốt (Chí, Trung, chị Yến, anh Tuấn, Đăng ...) và những trận bóng đá giữa/cuối tuần, những trận bóng bàn, những trận PES rất là hữu ích. Không có cộng đồng đó, có thể mình bỏ cuộc sau 2 năm. Không bỏ thì chắc có vấn đề mental health.

16. Sau PhD thì mình sang Mỹ làm postdoc. Mình rời nước Mỹ sau 5 tháng, còn tệ hơn thời ở Pháp! Ở Mỹ cũng bị bí và mình lại tự học thêm một môn võ nữa: lần này là Isogeometric Analysis. Note nó, code nó, và sau này lại xuất bản và được đón nhận. Lúc này hình như mình tình cờ làm theo những gì Feymann đã viết trên bảng đen (Hình 53.3):

    > *Cái gì tôi không tạo ra được thì tôi không hiểu. Tôi phải biết cách giải tất cả vấn đề đã giải được.*

    Tinh thần này khá giống Michael Faraday, người đã làm tất cả thí nghiệm về điện/từ mà người khác đã làm rồi.




Hình 53.3: Bảng đen trong văn phòng của Feynman trên đó ông viết: cái gì tôi không tạo ra được thì tôi chưa hiểu nó.

17. Lúc làm postdoc ở Cardiff với Stéphane, ngoài làm những gì cần làm, mình lại tự học thêm MPM (Material Point Method). Thích thôi! Thế mà giờ mình sống nhờ nó. Mình cũng note về MPM từ 2014, đến giờ cái note đã 400 trang. Xuất bản không? Dĩ nhiên, và giờ sẽ là một quyển sách. Sách đã được nhà xuất bản Springer in năm 2023 (Nguyen et al., 2023).

18. Cuối cùng thì mình cũng xin được vị trí giảng viên (Anh, Úc gọi là lecturer, ở Mỹ thì gọi là assistant prof, chỉ là cái danh xưng không quan trọng). Giờ không có sếp nữa mình phải tự tìm đường đi thôi. Nên nhớ là mình phải làm thử việc 5 năm nên áp lực viết báo khá nặng nề. Môi trường như vậy thì làm incremental work thôi. Lấy những gì mình đã làm phát triển lên tí. Được thời gian thì thấy chán, nên học cái mới (đang hot lúc đó) là phase-field fracture models. Cũng viết note, cũng code. Và mình lại share note cho một chuyên gia,

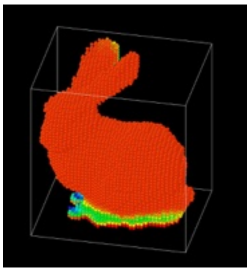
lần này là ông GS người TQ Jian-Ying Wu (vì mình ấn tượng với nghiên cứu của ông này, Hình 53.4a). Rồi từ đó mình làm việc với ổng. Cái note mình đưa cho ổng, ổng làm cho chính xác, đẹp hơn, ... rồi xuất bản giờ được 250 trích dẫn trong vòng 2 năm (đó là cái hay của việc làm đề tài trending/hot). Jian còn rủ mình sang tham dự một hội nghị ở Thượng Hải và đó là lần đầu tiên mình đi Trung Quốc vào năm 2017 (Hình 53.4b). Mình làm xong cái code thì Tushar (sinh viên đầu tiên) đến. Thế là đưa nó cái code, cái note, còn lại chú này tự làm hết.

(a)

(b)

Hình 53.4: Hình trái: Jian-Ying Wu và hình phải có Jian, Poh Leong Hien (GS ở NUS) và mình.

19. Năm 2022 thì mình 'vượt qua' cái thử việc (dù suýt trượt vì lí do mình không theo mẫu của trường lúc điền form kể lể NC mình đã thay đổi thế giới như thế nào. Mình chúa ghét giọng điệu này. NC mà thay đổi thế giới thì chỉ có vài chục người thôi!). Sau đó thì mình muốn làm NC chất lượng cao và bí luôn ☺



Đó là con đường làm NC của mình. Như đã nói, mình không đam mê khoa học, và mình cũng không là người hiếu kỳ. Mình thích làm NC vì mình thích làm cái gì mà nó fantasy, nó khác đời thường cơm áo gạo tiền một tí, nó trắng/đen rõ ràng, nó logic, nó sexy (nghĩa là không nhàm chán) một tí, nó có ít Toán và ít lập trình. Vậy thôi. Không có phương pháp gì cả, mò mẫm thôi. Và cũng không quan tâm NC có ứng dụng không (mình ở nước phát triển nên có thể làm chuyện này). Nhiều khi mình quan tâm tới một vấn đề chỉ vì mình thích thôi; như hình con thỏ Stanford này (hình bên) chẳng hạn. Đó là lĩnh vực hoạt hình máy tính, chẳng liên quan gì đến kỹ thuật cả. Cuộc đời là của chúng ta, sao lại không làm điều mình thích?

Tuy mình không đam mê khoa học nhưng mình *rất thích công việc nghiên cứu của mình*: không cần làm thí nghiệm, động tay chân, dùng Toán và máy tính cũng làm được, và chỉ cần ngồi trong phòng máy lạnh thôi. Không phải ông trùm dầu mỏ Mỹ Rockefeller[†] đã từng viết cho con trai mình:

> *"Nếu con xem công việc là thú vui thì cuộc sống là thiên đường. Nếu con xem công việc là nghĩa vụ thì cuộc sống là địa ngục.",*

đó sao? Tỷ phú người Nhật ông Inamori Kazuo[††] đã từng khuyên, nếu muốn có một cuộc sống giàu có, viên mãn, bạn chỉ có hai lựa chọn: Một là "làm điều mình thích", hai là "hãy để bản thân thích việc mình làm".

Henri Poincaré (1854 – 1912), người mà giáo viên Toán quá sợ đến nổi thốt lên "hắn ta là con quái vật Toán học" cũng từng nói:

[†] John Davison Rockefeller Sr. (1839 – 1937) là một ông trùm kinh doanh và nhà từ thiện người Mỹ. Ông được nhiều người coi là người Mỹ giàu có nhất mọi thời đại và là người giàu nhất trong lịch sử hiện đại.

[††] Kazuo Inamori (1932 – 2022) là một nhà từ thiện, doanh nhân người Nhật Bản và là người sáng lập Kyocera và KDDI. Ông từng là chủ tịch của Japan Airlines.

> *"Nhà khoa học không nghiên cứu tự nhiên vì nó hữu ích; họ nghiên cứu nó vì **họ thích nó**, và họ thích nó **vì nó đẹp**. Nếu thiên nhiên không đẹp thì không đáng để biết, và nếu thiên nhiên không đáng để biết thì cuộc đời không đáng sống."*

Có thêm một điều, mình nghĩ nhờ nó mà mình tồn tại được trong nghề NC này. Mình không quan tâm tới bất cứ gì ngoài chuyên môn: không politics, không văn chương, không kinh tế (ví dụ: cái nhà mình ở rộng bao nhiêu mình cũng không biết). Bởi vậy ai nói chuyện với mình thì phát chán ngay vì mình không biết nói chi. Lúc làm PhD mình chỉ nghĩ về nó 100%, không lo chuyện ở lại Hà Lan làm thế nào, không lo dạy thêm bớt chi cả, lúc ở Mỹ cũng không nghĩ thẻ xanh thẻ đỏ. Mình qua đây là vì kiến thức, không phải vì cơm áo gạo tiền. Ngay cả đi du lịch châu Âu mình cũng không (mình chỉ đi hội nghị rồi tranh thủ ngó nghía thành phố một tí). Mình dành cái não tí tẹo này hết cho chuyên môn (may có biết tí về thể thao, phim ảnh). Dĩ nhiên ai thông minh thì có thể ôm nhiều thứ hơn.

Xin kể vài câu chuyện để bổ trợ luận điểm trên. Einstein không có bằng lái xe, và ông thấy khai thuế là một việc rất đau đầu! Nhân vật thứ hai mình nghĩ đến là Sherlock Holmes. Bác sỹ Watson phát hiện ra rằng Holmes có kiến thức xuất sắc trong một số lĩnh vực như hóa học, thực vật học, giải phẫu học và địa chất học, nhưng cũng vô cùng thiếu hiểu biết về các vấn đề khác (như chính trị, văn học đương đại và thiên văn học). Thật ra, khi bị thúc ép, Sherlock Holmes thừa nhận rằng anh không biết trái đất xoay quanh mặt trời. Holmes lý luận như sau

> *"Thế thì nó đối với tôi thế nào? Cậu nói rằng chúng ta xoay quanh mặt trời. Nếu chúng ta xoay quanh mặt trăng, điều đó cũng không làm thay đổi chút ít gì đối với tôi hoặc công việc của tôi."*

Sherlock Holmes không quan tâm đến một sự thật trừ khi nó ảnh hưởng trực tiếp đến bản thân và công việc của anh ta. Nhà Vật lý Einstein đã nói: 'Đừng bao giờ ghi nhớ một cái gì đó mà bạn có thể tra cứu.' Và Holmes có cùng quan điểm, anh nói:

> *"Tôi cho rằng ban đầu não của một người giống như một gác xép nhỏ trống rỗng, và bạn phải trang bị nó với những đồ đạc mà bạn lựa chọn. Kẻ dại nhận vào mọi thứ linh tinh mà họ gặp phải, điều đó khiến cho những kiến thức có thể hữu ích cho anh ta bị đẩy ra ngoài, hoặc tối thiểu là lẫn lộn với nhiều thứ khác, khiến anh ta gặp khó khăn trong việc tìm ra nó. Bây giờ, một thợ thủ công khéo léo rất cẩn thận về những gì anh ta mang vào gác xép (tức là não) của mình. Anh ta chỉ sử dụng những công cụ có thể giúp anh ta trong công việc của mình, và tất cả đều được sắp xếp rất hoàn hảo. Thật là sai lầm khi nghĩ rằng căn phòng nhỏ đó có tường đàn hồi và có thể căng ra mọi mức độ. Nếu tin vào điều đó, sẽ đến một lúc nào đó khi mỗi khi bạn bổ sung kiến thức mới, bạn sẽ quên đi một kiến thức cũ nào đó. Do đó, điều quan trọng nhất là không để có những sự kiện vô dụng xô đẩy những sự kiện hữu ích."*

Mình cũng rất single minded: khi đã làm gì thì tập trung hoàn toàn. Năm 2011 mình đi dự hội nghị cơ học toàn Hà Lan. Nhưng tâm trí mình thì chỉ nghĩ về bài báo mới nhận comment của người bình duyệt. Do đó mình báo cáo xong là bắt tàu đi về nhà liền để ... hoàn thành bài báo. Hội nghị kết thúc, ông GS về và bảo: "Phính, you được giải báo cáo hay nhất trong session tham dự, nhưng you về sớm quá nên ban tổ chức trao cho người thứ nhì". Mình nghĩ: "ok thôi, giải thưởng giải thiết chi không bằng paper." Vì paper mới quyết định có lấy siêu mẫu được không.

Một điều mình nhận thấy là mình mạnh dạn dùng những công cụ tốt nhất cho việc nghiên cứu: Ubuntu (dễ cho lập trình, biên dịch các thư viện do người khác làm), LaTeX (cho viết lách), Illustrator (để vẽ đẹp), terminal (để thao tác sao/chép nhanh)... Những công cụ này làm giảm thời gian hoàn thành một công việc của mình nên mình làm việc tương đối hiệu quả. Mình thấy ai dùng công cụ gì hiệu quả hơn cách mình đang làm là mình bỏ ngay cái mình đang dùng và học cách dùng cái kia. Dĩ nhiên nếu bạn giỏi thì bạn không cần những thứ này. Nhưng mình không giỏi.

Mình có rất rất nhiều khuyết điểm, nhưng mà mình có một ưu điểm: ai có gì hay mà mình chưa biết là mình sẵn sàng học ngay, dù người đó là ông già (mình rất thích nghe ôn Vui kể chuyện), hay cậu nhóc 10 tuổi, hay là một người da đen, hay là một người phụ nữ.

Một điều cuối cuối cùng là về đọc bài báo. Mình chia ra hai lần đọc. Lần thứ nhất là đọc nội dung. Sau khi đã hiểu nội dung thì mình đọc để bắt chước cách viết. Mình xem cách tác giả giải thích, cách dùng câu, cách vẽ hình... Câu văn nào hay thì mình note lại để sau dùng. Nếu thấy hình vẽ đẹp quá thì mình tìm mọi cách để biết họ dùng software nào để làm và mình cũng bỏ ngay thứ mình đang dùng, chuyển qua dùng cái họ dùng. Ở tuổi 42 vì thấy `Asymptote` vẽ đẹp quá mình đã ngồi học nó và vẽ lại 200 hình trong cuốn sách Toán của mình. Nói tóm lại là *mình học những kinh nghiệm tốt nhất của người khác, và copy chúng.*

Anh Trần Đức Hân có nhận xét như sau về mình:

> *Anh thấy P rất giỏi, có chí hướng và kiên trì, nắm bắt nhanh.*

Có chí hướng và kiên trì, nắm bắt nhanh: anh nói quá đúng. Mình xin thêm là mình thích tìm hiểu những cái mới. Vì thế tuy không sâu về cái nào cả mình có đủ đồ chơi để đi lại giang hồ.

Ngoài việc phải có chí hướng, tính kiên trì, nếu các bạn muốn làm nhất lưu cao thủ thì cần có thêm bốn thứ: (1) tính sáng tạo, (2) nền tảng kiến thức phải sâu, (3) tính tò mò, (4) hiểu biết rộng và (5) sự can đảm[†]. Có khi còn phải chính chị chính em. Mình thiếu cả năm! Ôi đáng buồn thay. À, đừng quên còn phải hard working nữa! Thiếu cái này thì không bao giờ trở thành một nhà nghiên cứu hàng đầu. Hơn nữa, phải biết những vấn đề quan trọng nhất trong ngành bạn và nghiên cứu giải quyết chúng; chuyện này giống như cầu thủ thì phải đá C1 và World Cup, ai lại đi đá Sea Games. Các bạn quan tâm nên tìm đọc bài *You and Your Research* của nhà Toán học Richard Hamming; rất hay.

Nhưng quan trọng nhất vẫn là: bạn có thích làm NC hay không, và cá tính bạn có hợp hay không. Nếu có hai thứ này thì sẽ ok thôi. Sau khi đã có kiến thức, tiền tài, thẻ màu gì cũng tới.

NC của mình cũng được đồng nghiệp đón nhận tàm tạm. Mình xin chia sẻ lí do tại sao ở đây. Bài báo mình viết theo tinh thần là ai đọc xong cũng làm lại được (nếu muốn). Mình không nói quá về NC của mình: nó làm được gì, và chưa làm được gì mình làm rõ cả. Tất cả chi tiết đều trình bày và hình vẽ thì mình rất chăm chút, làm cho chúng đẹp nhất có thể. Mỗi bài báo là một đứa con của mình: mình phải chăm chút nó hết sức có thể. Mình đã trình bày cách viết ở Chương 27.

Không biết nguyên cớ gì mà mình rất ngưỡng mộ người Nhật. Có lẽ cái văn hóa trọng danh dự của họ ấn tượng mình nhất. Kiểu sĩ khả sát bất khả nhục, và lấy kiếm moi ruột ra cho thiên hạ xem ruột ta thẳng như ruột ngựa. Vì hâm mộ người Nhật nên mình luôn ước mơ một ngày nào đó sẽ được đi Nhật và được làm việc với người Nhật. Một hôm, mình nhận được một email từ một em tên là Lê Văn Tèo. Tèo đang làm thạc sỹ bên Nhật. Đại ý Tèo đang gặp khó khăn nên hỏi ý kiến mình. Thông qua sự giới thiệu của Tèo mình email cho giáo sư của Tèo là ông Sironata (tên mình tự chế). Mình lòng tràn niềm tin vào cái cơ hội làm việc với Sironata, và viết một email ... thảm họa! Vì bị tình cảm chi phối nên mới email đầu tiên mà mình đã nhiệt tình thái quá. Mình nói: thưa ông Sinonata, tôi rất vui mừng vì Tèo đã liên hệ, và nếu ông cho phép tôi sẵn sàng chia sẻ program tôi đã viết. Sironata tạt ngay một ly nước lạnh vào mặt mình (vẫn còn đang nóng): "Ông Vũ Phính, cảm ơn ông. Nhưng nếu chúng tôi thấy cần thiết, chúng tôi sẽ tự lập trình lấy."

Thế là hết. Không email nữa! Sironata, sayonara. Người Nhật như thế đó. Phải chăng đó là lí do họ làm ra nhiều thứ, là lí do họ có nhiều giải Nobel? Mình không biết, nhưng mình thích cái xì tai đó. Nếu nhận email của Vũ Phính, thay vì hành động như Sironata, bạn sẽ làm gì? Nếu bạn định mở miệng để nuốt cái program của tui vào bụng, xin hãy nhớ đến ông ... Sironata. Đúng là dùng program người khác cho thì chúng ta sẽ có kết quả nhanh hơn. Nhưng mà làm như vậy thì chúng ta lại không hiểu thấu đáo vấn đề! Người học võ trước hết phải học những thứ rất nhàm chán như đứng tấn. Sao không học ngay chiêu *Mãng Xà Xuất Động*? Cái gì cũng có gốc, gốc

[†]Chỉ có can đảm thì chúng ta mới dám dấn thân vào những lĩnh vực mà không ai dám.

càng to thì cành lá càng phát triển xum xê. (Mình nhắc lại rằng Faraday thời trai trẻ đã tự mình làm lại tất cả các thí nghiệm về điện và từ. Và nhờ đó ông hiểu rất rõ về chúng và sau này ông trở thành một nhà bác học vĩ đại.)

Mình là người "people pleaser" và luôn nghe lời người lớn. Người như vậy thường không có sáng tạo, và từ đó thường không có ý tưởng mới. Đã nhiều lần mình hỏi các Giáo sư làm thế nào để có ý tưởng mới. Câu trả lời của họ luôn là: "Think out of the box". Mình ghét cay ghét đắng cái câu trả lời này. Thế nào là think out of the box? Làm sao để think như vậy? Họ không trả lời được. Thật ra không thể trách họ, họ cũng không biết! Vì sao mình dám nói như vậy? Vì họ cũng chỉ là GS thôi, họ có phải Steve Jobs nghĩ ra iPhone/iPad đâu. Các bạn không ở trong ngành không biết có lẽ thắc mắc, các GS viết báo ầm ầm, sao không sáng tạo được. Phần lớn báo chỉ là incremental thôi, tức là lấy lý thuyết có sẵn (thường do các vĩ nhân thời Phục Hưng như Newton, Euler, Lagrange) nghĩ ra, rồi chế thêm một tí. Đã gần 100 năm sau khi Einstein làm ra thuyết tương đối rộng, vẫn chưa có lý thuyết mới nào tầm cỡ như vậy. Vật lý còn u ám như vậy huống chi ngành khác!

Vì lí do đó mà mình chú ý đến quyển sách "*Sparks of Genius: The Thirteen Thinking Tools of the World's Most Creative People*" của tác giả Robert Root-Bernstein. Trong quyển sách này tác giả trình bày 13 cách suy nghĩ của những người sáng tạo bậc nhất trên thế giới (Picasso, Richard Feynman vv). Mình tự nghĩ tại sao nhà trường không có môn dạy cho học sinh cách suy nghĩ cho hiệu quả, để học sinh biết dùng cái não mà học các môn khác? Và hơn hết để nhìn thế giới, không phải bằng con mắt, mà bằng con ngươi, à không, mình đùa một tí. Câu tiếng Anh nó hay: "See the world, not with your eyes, but with your mind".

Tại sao sáng tạo quan trọng? Thứ nhất, người sáng tạo thì hay làm chủ, người chỉ biết kỹ thuật thì làm công–và thường không giàu. Thứ hai, nếu có thể, ai không thích làm chủ cuộc chơi. Mark Zuckerberg[†] làm ra gì thì triệu người xài, cùng một kiếp người, sao Mark được mà mình không?

Làm thế nào để hiểu biết rộng? Hãy lấy ví dụ của nhà văn Cổ Long nhé. Trang wikipedia viết về ông như sau: "Ngay từ thuở nhỏ, Cổ Long đã đọc và rất yêu thích các tác phẩm võ hiệp cổ điển của Trung Quốc. Sau đó mấy năm, ông còn đọc thêm các bộ tiểu thuyết cận đại của Nhật Bản, các tác phẩm văn học của Tây phương." Đó, câu trả lời nằm ở cuộc đời Cổ Long thôi. Nếu ông không đọc tác phẩm văn học Tây phương thì làm gì chúng ta có một "Tiểu Lý phi đao, lệ bất hư phát"; rõ ràng là ngọn phi đao của Lý Tầm Hoan này là hình ảnh của một viên đạn. Đọc thật nhiều sách, nhiều chủ đề. Ý tưởng mới thường là một cái nhìn mới về một vấn đề cũ mà thôi.


Stéphane chơi piano, thầy Hưng chơi guitar và còn hát hò. Mình vừa nghe xong Tuấn Ngọc hát *Về đây nghe em* có thể chuyển sang nghe Lam Trường hát *Tình phai*, và thấy cả hai đều hay. Lỗ tai mình chỉ tới trình đó thôi. Một điều đáng tiếc là mình không có một tí năng khiếu nào về nghệ thuật; không chơi được một nhạc cụ nào, không làm thơ. Như vậy mình coi như chấp một tay khi đi tán gái! Há không phải đáng tiếc lăm ru? Gì vậy Phính? Đang nói về NC mà. Liên quan đó các bạn. Muốn có tính sáng tạo thì chúng ta phải sử dụng hết bộ não: cả bán cầu não trái và bán cầu não phải. Lý thuyết cho rằng mọi người đều thuận não trái hoặc não phải, nghĩa là một bên não của họ chiếm ưu thế. Nếu bạn chủ yếu là người có tư duy phân tích và có phương pháp, thì theo lý thuyết, bạn là người thuận não trái. Nếu bạn có xu hướng sáng tạo hoặc nghệ thuật hơn, bạn là người thuận não phải. Điều này

[†]Mark Zuckerberg (sinh 1984) là một ông trùm kinh doanh, doanh nhân internet và nhà từ thiện người Mỹ. Ông được biết đến với việc đồng sáng lập trang web truyền thông xã hội Facebook và công ty mẹ Meta Platforms.

lần đầu tiên được đưa ra ánh sáng vào những năm 1960, nhờ nghiên cứu của nhà tâm lý học và người đoạt giải Nobel Roger W. Sperry.

Einstein là một nhà vật lý thiên tài và một nghệ sĩ vĩ cầm bậc thầy. Ông sử dụng có lẽ hết bộ não của mình. Nếu một mình trường hợp Einstein thì không đủ thuyết phục. Do đó, một nhóm mười lăm nhà nghiên cứu tại Đại học Bang Michigan đã tìm hiểu về sự tham gia vào nghệ thuật của những người đoạt giải Nobel so với các nhà khoa học không có giải Nobel. Và dữ liệu trình bày ở Bảng 53.1, nguồn Grant and Sandberg (2016), nói lên tất cả. Ngạc nhiên nhất cho mình là tầm quan trọng của viết lách.

Bảng 53.1: Tham gia vào nghệ thuật và tỷ lệ dành giải Nobel.

| Sở thích nghệ thuật | Tỷ lệ người đoạt giải Nobel so với các nhà khoa học tiêu biểu |
|---|---|
| Âm nhạc: chơi nhạc cụ, sáng tác, chỉ huy | gấp 2 lần |
| Nghệ thuật: vẽ, sơn, in ấn, điêu khắc | gấp 7 lần |
| Thủ công: chế biến gỗ, cơ khí, điện tử thổi thủy tinh, điêu khắc | gấp 7.5 lần |
| Viết: thơ, kịch, tiểu thuyết, truyện ngắn, tiểu luận, sách phổ thông | gấp 12 lần |
| Biểu diễn: diễn viên nghiệp dư, vũ công, ảo thuật gia | gấp 22 lần |

Trong cuốn sách *What Is Life* nhà di truyền học người Anh Paul Nurse viết: "Có thể một con bướm đã khiến tôi suy nghĩ nghiêm túc về sinh học lần đầu tiên. Đó là đầu mùa xuân; Tôi có lẽ mười hai hoặc mười ba tuổi và đang ngồi trong vườn thì một con bướm vàng run rẩy bay qua hàng rào. Nó xoay người, bay lơ lửng và ổn định trong một thời gian ngắn – chỉ đủ lâu để tôi nhận thấy những đường gân và đốm phức tạp trên đôi cánh của nó. Sau đó, một bóng đen quấy rầy nó và nó lại cất cánh, biến mất sau hàng rào đối diện. Con bướm phức tạp, có hình dạng hoàn hảo đó khiến tôi phải suy nghĩ. Nó vừa hoàn toàn khác biệt đối với tôi nhưng cũng có phần quen thuộc. Giống như tôi, nó rõ ràng là đang sống: nó có thể di chuyển, nó có thể cảm nhận, nó có thể phản hồi, dường như nó tràn đầy mục đích. Tôi thấy mình tự hỏi: sống thực sự có nghĩa là gì? Tóm lại, cuộc sống là gì? Tôi lớn lên trong một gia đình thuộc tầng lớp lao động; cha tôi làm việc trong một nhà máy và mẹ tôi là người quét dọn. Các anh chị tôi đều rời ghế nhà trường khi họ mười lăm tuổi, vì vậy tôi là người duy nhất ở lại trường và sau đó vào đại học." (Nurse, 2021).

Chỉ là một con bướm mà ông đã rung động như vậy, không quá ngạc nhiên sau này Paul Nurse có giải Nobel. Cụ thể, ông có giải Nobel Sinh lý học và Y học năm 2001 cùng với Leland Hartwell và Tim Hunt vì khám phá ra các phân tử protein kiểm soát sự phân chia tế bào trong chu kỳ tế bào.

Ngày 10 tháng 10 năm 2022

# Chương 54

# Hamilton và Wiles: tột cùng của sự đam mê

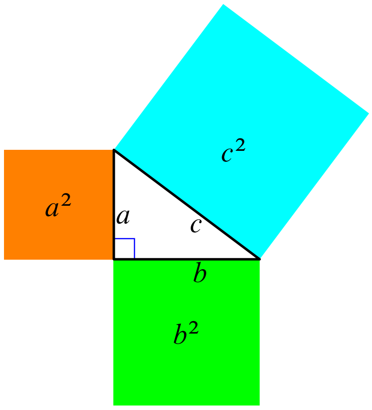
Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865) là nhà Toán học và Vật lý học người Ai Len. Vào năm 1843, Hamilton biết rằng số phức, $a + bi$, có thể xem là điểm trên mặt phẳng. Và ông muốn tìm ra số có thể biểu diễn điểm trong không gian. Rất lôgic, ông tìm số có dạng: $a + bi + cj$, ông gọi là triplet. Ông có thể cộng (và trừ) hai triplet một cách dễ dàng nhưng ông không thể nào nhân 2 triplet được. Ông đã viết cho con trai Archibald ngay trước khi qua đời những dòng chữ sau:

> *"Mỗi buổi sáng, khi ba đi ăn sáng, anh trai William Edwin và chính con thường hỏi ba, 'Chà, ba ơi, ba đã nhân được hai triplet chưa?' Vì vậy, ba buộc phải trả lời, với một cái lắc đầu buồn bã, "Không, ba chỉ có thể cộng và trừ chúng."*


Thật ngạc nhiên, với một trí tuệ siêu phàm như Hamilton, ông phải mất tới 10 năm ròng rã để tìm ra lời giải. Ngày 16 tháng 10 năm 1843, trong khi đi bộ dọc theo con kênh Hoàng gia ở Dublin về phía Học viện Hoàng gia Ailen với vợ, bà Hamilton, ông đã tìm ra lời giải. Không phải là triplet $a + bi + cj$, mà phải là quaternion $a + bi + cj + dk$. Hamilton đã mô tả khoảnh khắc 'eureka' trong một bức thư gửi cho con trai của mình vài năm sau đó: *"Mặc dù mẹ con đã nói chuyện với ba, nhưng một dòng suy nghĩ đang diễn ra trong đầu ba. Một dòng điện dường như đóng lại; và một tia lửa lóe lên, báo hiệu (như ba đã thấy trước, ngay lập tức) của nhiều năm dài sắp tới về những suy nghĩ và công việc được định hướng rõ ràng. . . Ba cũng không thể chống lại xung đột - phi triết học như nó có thể đã xảy ra - để cắt bằng một con dao trên đá của cây cầu Brougham khi mẹ và ba đi qua nó, công thức cơ bản ..."* Đó là

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{54.1}$$

Hamilton đã tạo ra một cấu trúc hoàn toàn mới trong toán học. Điều thú vị là các quaternion không thỏa mãn quy tắc giao hoán $ab = ba$ (lưu ý rằng các số phức vẫn tuân theo quy tắc này). Điều này không làm Hamilton bận tâm vì đây là điều thường xảy ra trong tự nhiên. Ví dụ, hãy xem xét một bể bơi trống rỗng và hai thao tác cắm đầu nhảy vào bể bơi và bật nước lên. Đi bên vợ mà ông chỉ nghĩ tới các con số và trong vòng suốt 10 năm! Nếu đó không phải là ví dụ tiêu biểu nhất cho sự đam mê nghiên cứu tột cùng, thì còn là gì? Và nhờ ông mà chúng ta sau này có tích vô hướng, tích hữu hướng, và từ véc tơ, mà ai học kỹ thuật hay khoa học đều dùng đến.




Nếu phải kể tên một nhà toán học nổi tiếng thường thì bất kỳ học sinh nào cũng sẽ chọn Pythagoras, nếu chúng có thể nghĩ ra một cái tên. Danh tiếng ngày nay của Pythagoras dựa trên định lý mang tên ông: định lý Pythagoras. Định lý Pythagoras là một liên hệ cơ bản trong hình học Euclid giữa ba cạnh của một tam giác vuông. Nó nói rằng diện tích của hình vuông có cạnh huyền (cạnh đối diện với góc vuông) bằng tổng diện tích của các hình vuông ở hai cạnh còn lại. Định lý này có thể được viết dưới dạng một phương trình liên quan đến độ dài của các cạnh $a, b$ và $c$, thường được gọi là "phương trình Pitago":

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Bây giờ, thay vì bó buộc với $a, b, c$–độ dài ba cạnh của một tam giác vuông, chúng ta dùng $x, y, z$ là ba số nguyên dương và phương trình Pythagore trở thành

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{54.2}$$

Không khó thì chúng ta cũng biết phương trình trên có rất nhiều nghiệm–tức là bộ ba $(x, y, z)$ thỏa mãn Eq. (54.2). Ví dụ, $x = 3, y = 4, z = 5$ (vì $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$) hay $x = 5, y = 12, z = 13$ và $x = 7, y = 24, z = 25$. Cái này thì không có gì đặc biệt và chúng được đề cập trong cuốn *Arithmetica*, một sách Toán Hy Lạp cổ được viết vào khoảng năm 250 sau Công nguyên bởi Diophantus của Alexandria.

Luật sư kiêm nhà Toán học nghiệp dư Pierre de Fermat–người được xưng tụng Hoàng tử nghiệp dư–lúc đọc cuốn *Arithmetica* thì do chán nên xét một phiên bản hơi đột biến của phương trình, đó là

$$x^3 + y^3 = z^3 \tag{54.3}$$

Ngạc nhiên thay, de Fermat phát hiện rằng trong vô số các con số nguyên dương $1, 2, 3, 4, \ldots$, không có bộ ba số nào phù hợp với phương trình mới này! Và điều này cũng xảy ra cho $x^4 + y^4 = z^4$, $x^5 + y^5 = z^5$ vv. Thậm chí, Fermat còn phát biểu, cái mà giờ đây chúng ta gọi là định lý cuối cùng của Fermat, rằng không có ba số nguyên dương $x, y$ và $z$ nào thỏa mãn phương trình $x^n + y^n = z^n$ với bất kỳ giá trị nguyên nào của $n$ lớn hơn 2. Để hỗ trợ cho định lý của mình, ông có lẽ đã tìm ra một chứng minh, tuy nhiên ông không trình bày nó. Thay vào đó, ông viết nguệch ngoạc nhận xét hấp dẫn nhất trong lịch sử toán học:

> *Tôi có một chứng minh thực sự tuyệt vời về đề xuất này mà lề sách này quá hẹp để viết vào.*

Thói quen không tiết lộ các tính toán hoặc chứng minh cho các định lý của Fermat đã khiến các đối thủ của ông rất tức tối: Descartes gọi ông là “kẻ khoác lác”, và nhà Toán học người Anh John Wallis gọi ông là “thằng người Pháp chết tiệt”.

Đó là năm 1637. Chỉ sau khi Fermat qua đời, những ghi chú bên lề trêu ngươi này mới được phát hiện, và từ đây các nhà Toán học bắt đầu một nỗ lực marathon để tái khám phá chứng minh của Fermat. Vào năm 1742, Leonhard Euler, nhà Toán học vĩ đại mà chúng ta đã gặp, đã chứng minh định lý cho trường hợp $n = 3$ và $n = 4$. Tuy nhiên đó là những gì ông có thể làm, và Euler trở nên thất vọng đến nỗi ông đã yêu cầu bạn của mình Clêrot tìm kiếm nhà của Fermat trong trường hợp vẫn còn một số mảnh giấy quan trọng. Không có manh mối được tìm thấy. Năm 1828, nhà Toán học người Đức Johann Dirichlet (1805–1859) chứng minh cho trường hợp $n = 5$. Vào những năm 1840, nhà Toán học người Pháp Gabriel Lamé (1795–1870) chứng minh cho $n = 7$. Sau Euler thì vào thế kỷ 19, tiến bộ quan trọng nhất trong việc chứng minh định lý cuối cùng được thực hiện bởi Sophie Germain. Mặc dù ý tưởng của Germain cuối cùng đã đạt đến một ngõ cụt, nhưng chúng đã tạo ra những kỹ thuật mới trở nên có giá trị trong việc giải quyết các vấn đề khác.

Vào đầu thế kỷ 20, Paul Wolfskehl, một bác sĩ đam mê toán học người Đức, đã để lại số tiền 100 000 DM cho bất cứ ai có thể chứng minh định lý cuối cùng. Câu chuyện về giải thưởng bắt đầu với nỗi ám ảnh của Wolfskehl với một người phụ nữ xinh đẹp mà danh tính ông không biết. Vị giai nhân này đã từ chối Wolfskehl và ông rơi vào tình trạng tuyệt vọng đến nỗi ông quyết định tự tử. Ông đã lên lịch để tự bắn mình vào đầu lúc nửa đêm. Trong những giờ trước khi tự tử theo kế hoạch, Wolfskehl đã đến thăm thư viện của mình và bắt đầu đọc về những ý tưởng mới nhất liên quan đến định lý cuối cùng. Đột nhiên, ông tin rằng mình có thể thấy cách chứng minh định lý, và trở nên mải mê với chứng minh của mình. Vào thời điểm Wolfskehl nhận ra phương pháp của mình đã bị thiếu sót, thời gian chỉ định của vụ tự tử của ông đã trôi qua. Bởi vì ôngđược nhắc nhở về vẻ đẹp và sự thanh lịch của lý thuyết số, Wolfskehl đã từ bỏ kế hoạch tự sát. Và giải thưởng ông để lại trong di chúc là cách Wolfskehl trả nợ cho bài toán đã cứu mạng mình.

Bài toán nổi tiếng là thế và giải thưởng trị giá đến vậy, nhưng ông hoàng Toán học Gauss không thèm. Chỉ duy nhất Gauss thản nhiên đứng ngoài cuộc trong đám đông các nhà toán học hăm hở dấn thân vào một con đường đầy cám dỗ.

Đã 326 năm trôi qua, và không ai, bao gồm những cái tên lẫy lừng Euler, Germain và cả nhiều nhà Toán học nghiệp dư, có thể chứng minh định lý cuối cùng của Fermat. Vào năm 1963, có một sự kiện xảy ra.

Vào năm đó, một cậu bé 10 tuổi mượn một cuốn sách từ thư viện địa phương của cậu ở Cambridge, Anh. Cậu bé đó là Andrew Wiles, một cậu học sinh đam mê toán học, và cuốn sách đã thu hút sự chú ý của cậu là *’Bài toán cuối cùng’* của nhà toán học Eric Temple Bell. Cuốn sách kể lại lịch sử của định lý cuối cùng của Fermat, bài toán nổi tiếng nhất trong toán học đã làm bối rối những bộ óc vĩ đại nhất trên hành tinh trong hơn ba thế kỷ. Bell thậm chí đã tiên đoán rằng nền văn minh sẽ chấm dứt do chiến tranh hạt nhân trước khi Định lý cuối cùng của Fermat được giải quyết. Tuy nhiên, cậu bé Wiles không nản lòng. Cậu tự hứa với bản thân rằng sẽ cống hiến phần đời còn lại của mình để giải quyết thách thức này!

Ba mươi hai năm sau cái ngày định mênh đó, năm 1995 Wiles–lúc này đã là GS Toán ĐH Princeton–chính thức trở thành người đầu tiên chứng minh được định lý cuối cùng của Fermat. Chỉ qua một đêm, Wiles trở thành người nổi tiếng nhất, trên thực tế là nhà toán học nổi tiếng duy nhất trên thế giới. Ông đã được phong tước hiệp sĩ và nhận được các danh hiệu khác như Giải thưởng Abel năm 2016[†], và tạp chí People đã liệt kê ông trong số "25 người hấp dẫn nhất trong năm", cùng với Công nương Diana và Oprah Winfrey.

Vậy Wiles mất bao nhiêu thời gian để chứng minh định lý này? Bảy năm ròng rã giam mình trên căn gác xép! Và chứng minh của ông dày 200 trang, và mình không hiểu dù là một chữ. Nhưng không sao, vì mình không phải là dân Toán. Cái quan trọng là mình vẫn cảm nhận được cái hay của câu chuyện. Và trên hết là nỗ lực và đam mê của Wiles xứng đáng được ca ngợi. Sau khi hoàn thành kiệt tác của đời mình, ông nói:

> *Có một cảm giác buồn bã nhất định, nhưng đồng thời cũng có cảm giác thành tựu to lớn. Cũng có một cảm giác tự do. Tôi bị ám ảnh bởi vấn đề này đến nỗi lúc nào tôi cũng nghĩ về nó—sáng thức dậy, tối đi ngủ—và điều đó tiếp diễn trong tám năm. Đó là một thời gian dài để suy nghĩ về một điều. Cuộc phiêu lưu đặc biệt đó giờ đã kết thúc. Tâm trí của tôi bây giờ đã được nghỉ ngơi.*

Nếu bạn hỏi như vậy Fermat thực sự đã chứng minh được định lý cuối cùng không, như ông đã viết trong sách, thì xin thưa: chỉ có chúa mới biết!

Nguồn: sách *Fermat’s Last Theorem* của tác giả Simon Singh Singh (1997).

Lúc này, bạn có đang tự hỏi tại sao Wiles phải ẩn mình trên căn gác xép nhà ông trong vòng bảy năm? Sao ông không đi làm như bình thường? Richard Hamming có câu trả lời cho bạn; trong *You and your research*, Hamming viết:

[†] Link xem lễ trao giải Abel: https://www.youtube.com/watch?v=WNVq4nK3ir0.

*"Nếu bạn chìm đắm và cam kết sâu sắc vào một chủ đề, ngày qua ngày, tiềm thức của bạn không có gì để làm ngoài việc làm việc với vấn đề đó. Và vì vậy, bạn sẽ tỉnh dậy một buổi sáng, hoặc vào một buổi chiều nào đó, và câu trả lời sẽ hiện ra. Đối với những người không cam kết mạnh mẽ với vấn đề hiện tại của họ, tiềm thức sẽ lãng phí thời gian cho những việc khác và không sản sinh ra kết quả lớn. Vì vậy, cách quản lý bản thân là khi bạn gặp phải một vấn đề quan trọng thực sự, bạn không để cho bất cứ điều gì khác chiếm giữ trung tâm tâm tư của bạn - hãy giữ suy nghĩ của bạn tập trung vào vấn đề. Để tiềm thức của bạn phải làm việc với vấn đề của bạn, hãy giữ nó trong trạng thái đói, để bạn có thể ngủ một cách thanh thản và nhận được câu trả lời vào buổi sáng, hoàn toàn miễn phí."*

Giải thích của Phính thì đơn giản hơn: nếu bạn muốn cua một hoa khôi của trường thì dĩ nhiên là phải tấn công mạnh mẽ; chứ nếu còn để ý tới vài cô nương khác nữa thì đừng mơ.

Ngày 4 tháng 4 năm 2023

# Chương 55

# Thầy thầy trò trò

NĂM 2007 mình chân ước chân ráo đến TU Delft (Hà Lan) làm PhD. Ở đó mình được thấy một vài điều chưa bao giờ nhìn thấy và chưa bao giờ nghe nói.

Nay xin chia sẻ với mọi người để suy nghẫm.

1. Ông giáo sư (GS) mình có nhiều sinh viên và Peter (người Bỉ) là một trong số đó. Một hôm mình đi ngang phòng làm việc của Peter thì thấy cậu ta ngồi dựa lưng vào thành ghế, hai chân mang tấc duổi thẳng gác lên trên bàn làm việc. Thật là thoải mái. Bên cạnh đó, ông GS mình đứng, và 2 người trò chuyện. Mình cứ đứng im ở ngoài cửa quan sát, vì mình thấy nó ngồ ngộ.

2. Mặc dù mình biết là người Hà Lan thích xe đạp (và mình cũng vậy), nhưng mình lại thấy một chuyện ngồ ngộ liên quan tới ông GS và chiếc xe đạp. Một hôm xong việc mình đi về nhà, lúc đi ngang chổ đậu xe (đạp) thì thấy ông GS mang áo khoác dài, móc cái cặp táp vào một ghi đông và đạp xe đi về. Chiếc xe của ông, mình đoán, chỉ làm được một chức năng: đạp được. Nó đen thui, và nhìn không có gì đẹp. Mình đứng lại nhìn ông cho tới khi ông khuất dạng.

Mình không biết ông giàu hay nghèo (thậm chí còn không biết nhà ông ở đâu). Ông tuy không phải là nhất lưu cao thủ như Thiếu Lâm Phương Chứng đại sư, nhưng cũng thuộc hàng có số má (cỡ Quang Minh Tả Sứ của Nhật Nguyệt Thần Giáo Hướng Vấn Thiên). Ấy vậy mà, ông đạp xe đạp, một chiếc xe quá đổi bình thường, đi làm. Hình ảnh đó mãi ghi đậm trong trí óc của mình.

3. Một hôm mình đi ra chổ có cái máy cà phê để uống nước (hay capuchino) thì thấy ông đứng cạnh cái máy, tay cầm ly cà phê. Ông thấy mình thì hỏi

"P, có muốn một tách cà phê không?"

Mình, hơi ngại ngùng, nhưng vẫn đáp:

"Vâng, nhưng làm ơn cho một ly capuchino."

Ông lấy một cup bằng nhựa và bấm nút, rồi đưa cho mình ly capuchino. Dĩ nhiên là với ai ông cũng làm vậy. Sau này mình quan sát thì mới biết, cái văn hóa ngầm ở đây là ai đứng gần cái máy cà phê là phải/nên pha cà phê cho người mới tới.

4. Sau hai năm đầu ở TU Delft mình không có bài báo nào cả nên đâm ra sốt ruột. Hè năm 2008, nhân lúc ông đi nghỉ (hơn cả tháng, và không liên lạc được), mình chơi liều. Mình làm một topic dễ và viết hẳn một bài báo, có tên mình và ông. Một bài báo hoàn chỉnh! Chờ ông về, mình hăm hở chạy qua phòng ông, đưa tác phẩm cho ông xem. Ông nói:

"Cái ni có chi mô mà xuất bản."

Buồn, mình đi về phòng, cho bài báo đó vào kỉ niệm. Sau này lúc làm postdoc, mình nhớ lại nó cộng với việc tình cờ biết Timoshenko–cha đẻ của ngành cơ khí ở Mỹ– đã từng nói: "chúng ta đóng góp những gì chúng ta có thể", thế là lấy ra xuất bản một mình, và cũng được 80 trích dẫn ☺.

5. Sau 2 năm đầu thì mình bắt đầu tăng tốc, và xuất bản 5 bài. Chuyện muốn bàn là cả năm bài này mình đều là tác giả đầu và corresponding author. Dĩ nhiên mình là tác giả đầu, nhưng corresponding author là ông bảo mình! Ông chỉ chọn tạp chí, chọn người bình duyệt, rồi thì mình làm hết, kể cả corresponding author. Mình nhìn sang các GS khác thì mới thấy ông GS mình là của hiếm.

6. Một chuyện vui. Sau 2 bài báo đầu thì mình tự tin hơn (vì 2 bài là có thể tốt nghiệp rồi). Mà lúc tự tin hơn thì sẽ bày trò. Lúc chuẩn bị nộp bài thứ ba, mình lại thấy ông chọn những người bình duyệt như cho 2 bài trước. Mình hỏi: "why?". Ông đáp:

> *"Phu, we never change a winning team".*

Ông là fan cuồng của Ajax Amsterdam. Thậm chí ông ví quá trình làm PhD của mình như trận CK C1 Liverpool-AC Milan năm 2005 và mình là Liverpool.

7. Thời gian đầu làm NCS thì phần lớn là bí, tức là không làm ra kết quả gì. Nhưng vẫn phải họp với GS chứ. Hôm nào họp là mình lo lắm. GS nhìn mặt tái xanh biết là không có gì để trình bày, liền nói vu vơ, kiểu như "thời gian trôi nhanh quá" hay "hôm nay thời tiết đẹp ghê". Nhờ như vậy mà mình không bị áp lực. Tuyệt đối không có chửi mắng hay trách móc chi cả.

8. Mình nhớ đi hội nghị chung với GS, ổng dẫn bạn gái theo, bạn gái giày bị đứt dây, cầm giày cho nàng. Quá đẹp! Phong cách làm việc thì quá chuyên nghiệp, không bao giờ trễ hẹn dù vài phút, và cực kỳ dễ thương lúc mình xin nghỉ phép. Ví dụ, mình email cho ổng:

> *Hi Bert,*
>
> *I would like to take one week (6/12/2010 to 10/12/2010) off to regain energy for the final stage of my work. Please let me know if it's ok.*
>
> *Phu*

Ổng trả lời:

> *Sure. Enjoy! Regards, Bert*

Y chang những mẫu đối thoại trong truyện Cổ Long. Không dài dòng rườm rà. To the point! Và mình thích như vậy.

9. Có một lần mình phải viết bài đi hội nghị, do bị hối thúc, mình định bụng sẽ viết nhanh (vì abstract 1 trang thôi), rồi gửi đi mà không thông qua ông. Ông nghiêm nghị, chỉ tay vào cái tên ông trong bài báo và nói: "P, tên tao nằm trên đó nên tau phải đọc xem bài báo thế nào." À, té ra ông thầy mình coi trọng cái gọi là 'danh tiếng'. Chính nhờ đạo đức nghề nghiệp đó mà ông không làm nghiên cứu bậy bạ.

Ngày mình chia tay TU Delft sang Mẽo, mình lên gặp ông. Không nhớ mình đã nói gì, và ông đã nói gì, nhưng mình mắt đỏ hoe. Dạo này mình hay nhớ về chuyện xưa nên cũng nhớ ổng, email cho ổng hỏi thăm. Ông nói: "P, you're doing a good job. Sometimes I look back on your PhD with a good feeling." ("P, mày đang làm một công việc tốt. Đôi khi tau nhìn lại tiến sĩ của mày với một cảm giác hài lòng).

Cảm ơn GS.

Đó, đó là những kỉ niệm với ông GS của mình. Thường thì mình hay bắt chước người mình hâm mộ/thích. Để xem mình, lúc hướng dẫn sinh viên, đã làm gì nhé.

1. Chưa bao giờ pha cà phê cho Tushar. Vì cả hai chưa rơi vào tình huống như trên.

2. Hình như hầu hết bài báo của Tushar, cậu ấy đều là corresponding author. Nhưng mà anh chàng này nhác gan không dám làm vậy, và rủ mình cùng làm. Thế là hai người cùng đứng tên corresponding author.

3. Tushar còn lưu lại cho mình tấm thiệp + một tấm hình, hình như mình chưa tặng gì cho GS! Và cũng chưa có tấm hình nào chụp riêng với ổng. Có lẽ do ông là siêu mẫu 2.0 m còn mình thì bé con quá?

Lúc mình tốt nghiệp xong ở TU Delft, Angelo Simeone gọi mình vào và bảo: "P, làm gì thì làm, nhưng đừng làm mất mặt TU Delft nhé." Hehe. Không biết mình có làm TU Delft mất mặt không vì từ 2011 tới giờ chưa gặp lại ông này, nhưng mà mình cũng "chơi được" với sinh viên như GS của mình.

Giờ xin quay lại hình ảnh Peter và GS. Dĩ nhiên là không phải GS nào cũng thân thiện như vậy. Mình nghe nói sinh viên phải gọi GS già ở Ý là Prof và họ (không phải tên)! Dù thế nào, thì hình ảnh đẹp của những người như GS mình nên được nhân rộng.

Vì răng?

Khi hai người nói chuyện, và cả hai mức độ như nhau, thì cuộc nói chuyện sẽ sảng khoái. Và chỉ trong lúc sảng khoái như vậy thì mới có ý tưởng hay ho. Nếu người sinh viên cứ khúm núm (vì ông GS ghê quá) thì ý tưởng sẽ không phát tứ được (có thể sợ GS chê dở chẳng hạn). Mình nghĩ vậy thôi.

Không phải người mình phải uống bia vô mới đi hát karaoke à? Lúc này chúng ta không còn ngại ngùng chuyện hát dở hay vì đó là bia hát mà. Nếu chúng ta không phán xét, chê hát hay dở, thì cần chi uống bia vô mới hát?

Giờ thì các bạn có thể hiểu tại sao mình hay khuyên các bạn trẻ (kể cả lúc bạn liên hệ mình hướng dẫn tiến sỹ) chọn mấy ông da trắng, chứ không chọn ai khác. Đơn giản: làm với họ thì mới học được cái gì đó mới mẻ về văn hoá. Dĩ nhiên ở đâu cũng vậy, có người này người kia. Nếu bạn có gặp phải ông giáo sư da trắng mà "ác" thì giải pháp rất đơn giản: bạn không có duyên với ông. Bỏ ông ta, kiếm ông khác. Mình sẽ bàn kỹ hơn về đề tài này ở Chương 56.

Ngày 10 tháng 12 năm 2022

# Chương 56

# Thầy thầy trò trò: một cuộc hôn nhân sắp đặt

MỐI quan hệ thầy-trò giữa người giáo sư (GS) hướng dẫn và người làm nghiên cứu sinh (NCS hay PhD) có thể ví như một cuộc hôn nhân sắp đặt. Trời sắp đặt. Không sắp đặt thì là gì? NCS thì chưa gặp GS bao giờ, và đương nhiên là không biết ông/bà tốt hay xấu. Và ngược lại GS cũng không biết gì nhiều về người NCS mình sắp cưới, ngoài cái CV dài 2 trang. (Mình đang nói về trường hợp GS ở 1 nước giàu và NCS đến từ 1 nước nghèo vì đây là trường hợp hay xảy ra). Đó là chưa nói tới khác biệt văn hóa (nếu có), khác biệt tuổi tác, tính cách vv. Đó là chưa nói, trong cuộc hôn nhân này người vợ bắt buộc phải đẻ cho nhà chồng 2 cậu quý tử[†]!

Và như bao cuộc hôn nhân đặt mô ngồi đó, sẽ có nhiều cặp hạnh phúc và cũng có nhiều cặp chia tay. Chúng ta có thể kể cặp Quân tử kiếm Nhạc Bất Quần và chàng lãng tử Lệnh Hồ Xung là một đôi tan vỡ. Còn cặp Cửu Chỉ Thần Cái Hồng Thất Công và đại hiệp Quách Tĩnh là một đôi hạnh phúc.

Theo một tài liệu thì có khoảng 30% đến 50% NCS không hoàn thành TS trên toàn thế giới. Thậm chí gần như mọi nghiên cứu sinh tiến sĩ đều muốn bỏ cuộc vào một thời điểm nào đó. Mình hoàn toàn tin tưởng dữ liệu này. Mình là người bỏ cuộc ở PhD thứ nhất và ở PhD thứ hai mình cũng đã nghĩ về nó! Dù chồng mình thì super cool, nhưng mẹ chồng khó quá.

Vì đâu nên nỗi?

Có nhiều nguyên nhân lắm mà mình không biết hết được. Sau đây là một số trường hợp. Đề tài chán nè (nhiều khi GS nói làm đề tài A nhưng sau đó lật kèo làm đề tài B, hay ngược lại; mình rơi vào trường hợp NCS lật kèo nè, mình cho người khác hướng dẫn luôn). GS không tốt nè. Việc này cọng với làm NCS vốn đã là một chuyện khó khăn là một trong nguyên nhân chính dẫn tới đổ vỡ. Cái này giống như vợ đang sanh con mà chồng đi nhậu! Một lí do thường gặp nữa: NCS nhận ra mình không đủ sức làm, hoặc mình thật ra không thích hay không phù hợp làm nghiên cứu. Cũng có thể NCS tìm được một công việc lương cao hơn. Lí do thì muôn hình vạn trạng.

Nếu bạn là NCS và muốn bỏ của chạy lấy người thì có phạm pháp không? Dĩ nhiên là không rồi. Không ai cấm vợ chia tay chồng hay ngược lại cả. Tất nhiên là nếu chia tay trong hòa bình thì là tốt nhất. Nhưng thật không may, có nhiều trường hợp NCS bỏ cuộc mà không được sự đồng ý của GS ☹. Và đây là một tình huống khó xử. Mình không muốn và không thể bàn ai đúng và ai sai ở đây. Có lẽ không ai sai/đúng ở đây: đơn giản NCS và GS không sinh ra cho nhau thôi. Sau đây, mình muốn nói về trường hợp NCS thật sự muốn chia tay (dù GS không thích điều này). Mình không bàn về GS vì dù gì GS là người chồng, là phái mạnh, không có NCS A thì sẽ có NCS B.

Đối với một NCS khi rơi vào tình huống khó xử này thì câu hỏi đặt ra là: lúc nào thì bỏ? hậu

[†]Là hai bài báo đó, nếu bạn chưa rành về làm nghiên cứu sinh.

quả là gì? Trước hết, xin nhớ rằng việc không hoàn thành bằng tiến sĩ không khiến bạn là người thất bại; mà có là thất bại thì cũng không có chi. Không phải ông cha ta có câu: "Thất bại là mẹ thành công", đó sao? Và điều đó cũng không có nghĩa là bạn sẽ không bao giờ có cơ hội làm NCS trong tương lai. Mình là một ví dụ, và có nhiều ví dụ khác tương tự.

Lúc này bạn cần tìm người để tâm sự, *tuyệt đối đừng ôm nó trong lòng*. Nhưng phải tìm người không bị mâu thuẫn lợi ích mà tâm sự. Ví dụ bạn không nên nói chuyện này với cha mẹ: cha mẹ luôn muốn con cái có bằng PhD nên họ có thể đưa ra lời khuyên không khách quan. Nên tìm bạn bè, hay những người đã bỏ cuộc. Nên tìm GS khác nice hơn mà bạn quen biết, nói chuyện với họ[†]. Lúc đó các bạn nên xem youtuber Toby: `https://www.youtube.com/watch?v=e3Heip-2jYQ`. Cô nương xinh đẹp này bỏ PhD về astrophysics vì thấy làm youtuber có ý nghĩa hơn. Thậm chí còn lên youtube nói về nó. Các bạn thấy đó, Toby này PhD không thèm làm (không phải bạn này làm không nổi nhé) mà đi làm youtuber. Thích thì làm, thấy có ý nghĩa thì làm. Quá hay Toby! Tôi hâm mộ cô!

Và nếu áp lực của việc làm NCS khiến bạn phát ốm, thì dừng lại là cách tự chăm sóc bản thân thích hợp. Như Shane Hartington[††] đã nói, "bằng tiến sĩ không bao giờ phải trả giá bằng sức khỏe tâm thần của bạn". Nó không đáng!

Dĩ nhiên là bài viết này không khuyên bạn bỏ cuộc nhé. A di đà phật, tội lỗi tội lỗi. Làm PhD thì là một chuyện khó khăn. Vậy nó mới vui! Ai thích dễ thì xin đi làm. Một hai năm đầu không có kết quả là chuyện phình phường. Bạn phải học cách thích nghi với điều đó. Chứ nếu có tí khó khăn rồi bỏ thì trên thế giới sẽ không có cái gọi là ông TS và bà TS. Và chúng ta có lẽ vẫn còn đang cưỡi ngựa thay vì cưỡi xe không người lái!

Có một câu hỏi mà nhiều bạn hay thắc mắc: chọn chồng già hay chồng trẻ? Tức là chọn giáo hướng dẫn đã thành danh hay chọn giáo trẻ chưa có tiếng? Phính này đâu có cái xa xỉ đó. Có cơ hội là đi thôi, giáo gì mặc kệ. Tuy nhiên nếu các bạn có một sự lựa chọn thì nên suy nghĩ về nó. Và mình nghĩ, cho những bạn làm trong các ngành khoa học (hóa, sinh, lý...) thì lời khuyên của James Watson trong tự truyện của ông có tựa đề *Avoid Boring People: Lessons from a Life in Science* rất đáng tham khảo (Watson, 2007). Đơn giản vì James Watson (sinh 1928)–nhà sinh học phân tử, nhà di truyền học và nhà động vật học người Mỹ– là người đã cùng với Francis Crick và Maurice Wilkins đề xuất cấu trúc xoắn đôi của phân tử DNA. Watson là người làm khoa học tinh túy bậc nhất, không nghe theo ông thì còn nghe ai?

Nhưng mà nên nhớ là khi có nhiều lựa chọn thì cũng dễ rơi vào tình huống giống như nhân vật Jimmy trong bài *Don't Cry, Joni* của nhạc sĩ đồng quê người Mỹ Conway Twitty:

Jimmy please say you'll wait for me
I'll grow up someday you'll see
Savin' all my kisses just for you
Signed with love forever true
...
Jimmy Jimmy please don't cry
You'll forget me by and by
It's been five years since you've been gone
Jimmy I married your best friend John.

Ngày 29 tháng 3 năm 2023

[†] Hồi xưa mình nói chuyện với Stephane mới biết chuyện bỏ làm NCS là chuyện bình thường.
[††] `https://medium.com/@DrShaneRRR/why-you-should-quit-your-phd-990c194ec767`.

# Chương 57

# Bệnh cả nể

THEO hiểu biết nông cạn của mình thì bệnh lý của cả nể là bụng muốn nói NO nhưng cái miệng lại nói YES. Mình mắc cái bệnh cả nể, và nhiều người Việt mình quen cũng dính vào cái bệnh này. Trong nhiều trường hợp thì nó là dĩ hòa vi quý, nhưng trong nhiều trường hợp khác thì nó cũng là nguyên nhân cho rất nhiều phiền phức. Cho những người cần tư duy phản biện (người làm nghiên cứu chẳng hạn) thì căn bệnh này cần chữa trị ngay. Phính này vốn muốn viết về cái căn bệnh này từ lâu lắm rồi nhưng mà không nghĩ ra cách nào tiếp cận vấn đề. Hôm rày tình cờ đọc được một bài phỏng vấn nhà khoa học người Nhật, ông Syukuro Manabe mà trong đó ông có nói về đề tài này. Thế là mình viết thôi. Không viết sợ quên.

Syukuro Manabe (sinh năm 1931) là một nhà khí tượng học và khí hậu học người Mỹ gốc Nhật, người đã đi tiên phong trong việc sử dụng máy tính để mô phỏng biến đổi khí hậu toàn cầu và các biến đổi khí hậu tự nhiên. Ông đã được trao giải Nobel Vật lý năm 2021 cùng với Klaus Hasselmann và Giorgio Parisi, vì những đóng góp của ông cho mô hình vật lý của khí hậu trái đất, định lượng tính biến đổi của nó và dự đoán biến đổi khí hậu.

Nay xin dùng ông Syukuro Manabe để bàn về đề tài này. Có gì xảy ra thì các bạn gặp Manabe mà hỏi nhé. Bài viết muốn gợi ý khi bạn chuẩn bị nói YES mà trong bụng thì muốn nói NO thì xin nghĩ tới ông Manabe.

Về bệnh cả nể, ông Manabe nói như sau (https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2021/manabe/185163-manabe-interview-march-2022/)

> *"Bạn biết đấy, người Nhật luôn lo lắng cho nhau – họ không muốn làm tổn thương cảm xúc của nhau. Vì vậy, người Nhật không muốn nói không. Do đó, mặc dù câu trả lời của họ là không, nhưng họ phải rất cố gắng để giảm bớt tác động của việc nói không với người khác đang lắng nghe họ. Trong khoa học, đây không phải là một điều tốt lắm. Trong khoa học, bạn phải nói rất rõ ràng rằng bạn không đồng ý với nhau. Sau đó, bạn nghĩ về cách các bạn không đồng ý. Tại sao các bạn không đồng ý? Để nói với ai đó rằng bản thân mình đúng và để chứng minh rằng mình đúng, bạn phải nghiên cứu thêm. Nghiên cứu đó là gì? Người khác cũng nghĩ về lý do tại sao chúng ta không đồng ý với nhau để chứng minh rằng anh ta đúng. Vì vậy, theo một nghĩa nào đó, bằng cách không đồng ý, cả hai đều học được rất nhiều và đạt được tiến bộ tốt để hiểu vấn đề mà chúng ta đang giải quyết. Khi tôi đến Mỹ, tôi phát hiện ra rằng mọi người có thể bất đồng công khai ở nơi công cộng. Tôi nghĩ đây là một điều tuyệt vời. Tất nhiên, người Nhật đang cố gắng nghĩ cho nhau, và điều đó thật tuyệt vời và đó là lý do tại sao họ thành công. Chúng tôi sống với nhau hòa thuận vì đặc điểm này. Nhưng, theo một nghĩa nào đó, tôi thích cách mọi thứ được thực hiện ở Mỹ."*

Vì sống lâu trong cái môi trường mà rất nhiều người mắc bệnh cả nể (mẹ mình là một người như vậy–cả đời bà hầu như chưa phật lòng ai, và mình dính vào bệnh này từ bà) nên khi mình nhận reviews cho bài báo đầu tiên ở Hà Lan, của 5 reviewers và 6 trang giấy thì mình bị sốc. Sau này, dù đã ở trong nghề nhiều năm, khi nhận review mà nói trái ý hay đòi hỏi mình phải thay đổi hay làm thêm thì mình rất khó chịu, phải mất mấy ngày mới tiêu hóa nổi! Một hôm, Alban và mình viết một bài và cố tình yêu cầu một GS tên X làm người bình duyệt, mặc dù biết GS X này rất khó tính. Lúc bài báo viết xong, chuẩn bị submit, mình hỏi Alban: "mày muốn có một bài báo một cách dễ dàng hay mày muốn vừa có bài báo vừa học thêm nhiều điều". Alban trả lời: "tau muốn cái thứ hai". Mình nói, "Ok, vậy đề nghị GS X đi. Mấy năm trước tau bị GS X reject một bài rồi".

Cầu được ước thấy, GS X đánh cho Alban và mình tả tơi, không còn một mảnh vải che tấm thân trần trụi, nhuốm bụi đời. Ban đầu Alban và mình ngồi nói xấu GS X: kiểu chi mà khó tính vậy, chỉ là một bài báo thôi mà. Nhưng mấy ngày sau đó Alban và mình ngồi lại, tĩnh tâm đọc từng comment một (không có Alban thì chắc mình không làm được việc này), và từ đó học được rất rất nhiều điều. Và cũng cho bài báo đó vào sọt rác luôn! Thời gian thấm thoát trôi qua, lúc viết cuốn sách MPM với Alban, một reviewer có nhận xét: "sách này cho kỹ sư thì ok, nhưng mà đây là loạt sách gọi là scientific computing, phải có Toán một tí". Và chính nhờ kiến thức học được từ comment hắc ám cáo chồn của GS X mà sách mình vượt qua bình duyệt. Và do đó trong lời preface của cuốn sách (về MPM) mình có cảm ơn GS X này.

Vì thế, nếu muốn tiến bộ, hãy làm theo lời khuyên sau:

> *"Đừng tìm kiếm lời khen, hãy tìm kiếm sự phê bình."*

Chúng ta có câu "trung ngôn nghịch nhĩ". Ấy vậy mà ai cũng thích nghe lời ngon ngọt! Mình không dám yêu cầu ai làm gì cả, đó là lựa chọn của mọi người. Mà nói đâu cho xa, nếu ai vào comment "Phính, bài này viết như shit", thì mình cũng từ mặt người đó thôi. Tuy nhiên, nếu bạn muốn làm khoa học thì nên tập nói NO đi là vừa! Đính chính: với đàn bà thì YES nhé, không là hỏng việc.

Ngày 2 tháng 5 năm 2023

# Chương 58

# Đền đáp nối tiếp

Đền đáp nối tiếp (Pay It Forward) là một bộ phim chính kịch lãng mạn Mỹ của đạo diễn Mimi Leder. Phim trình chiếu vào năm 2000. Bộ phim phần nào dựa trên tiểu thuyết cùng tên của Catherine Ryan Hyde. Phim lấy bối cảnh ở Las Vegas, và ghi lại câu chuyện của Trevor McKinney từ 11 đến 12 tuổi về việc khởi động một phong trào thiện chí được gọi là "Đền đáp nối tiếp".

Trevor McKinney sống với mẹ, cô Arlene McKinney (do diễn viên yêu thích của mình Helen Hunt đóng). Arlene là bà mẹ đơn thân và nghiện rượu nặng. Trevor đang bắt đầu học lớp 7, và mọi chuyện sẽ chẳng có gì đáng nói nếu giáo viên dạy môn xã hội không phải là thầy Eugene Simone (do diễn viên gạo cội Kevin Spacey thủ vai)–một người bị tổn thương cả về thể chất lẫn cảm xúc.


Cả lớp đã gần như chết lặng khi thầy Eugene quay mặt lại vì mặt ông đầy sẹo. Eugene bắt đầu lớp học bằng cách đặt ra câu hỏi "thế giới này là gì đối với các em?" Và ông tiếp tục với câu hỏi "Thế giới này trông chờ gì ở các em?" Trevor trả lời "không gì cả!". Sau một hồi tranh luận thì Eugene mới đi thẳng vào vấn đề. Ông giao cho lớp bài tập kéo dài suốt năm học (làm thêm điểm), và nó chỉ vỏn vẹn có một câu ngắn ngủi mà ông đã ghi trên bảng đen trước khi học sinh vào lớp:

> *Nghĩ về một ý tưởng để thay đổi thế giới và thực hiện nó.*

Cả lớp nhốn nháo cả lên vì cái bài tập kỳ cục này. Trevor đặc biệt ấn tượng về cái bài tập này. Thậm chí cậu còn hỏi ngược lại Eugene "Vậy thầy đã làm gì để thay đổi thế giới?"

Ngay sau khi rời trường thì Trevor đã hành động, và việc tốt đầu tiên của cậu là giúp một người đàn ông vô gia cư–tên Jerry–mà cậu gặp trên đường từ nhà về trường. Trevor cho Jerry sống trong nhà để xe của mình. Sau khi nói chuyện với Jerry và nghe anh này nói rằng "mọi thứ đều tồi tệ" thì Trevor nghĩ ra ý tưởng "đền đáp nối tiếp". Ý tưởng của đền đáp nối tiếp là người nhận ân huệ sẽ làm ơn cho ba người khác chứ không phải trả lại người đã giúp mình. Như vậy nếu Trevor giúp ba người, và mỗi người trong ba người này giúp ba người khác thì sẽ có 3 + 9 = 12 người được giúp.

Jerry trả ơn Trevor bằng cách sửa xe cho Arlene, mặc dù Jerry sau đó khiến Trevor thất vọng khi chuyển ra ngoài và quay lại sử dụng ma túy. Thất bại với Jerry, Trevor chuyển sự chú ý qua mẹ mình, người đang cô đơn. Và cậu đã thành công trong việc làm mai cho mẹ và thầy Eugene. Arlene đã trả ơn Jerry bằng cách tha thứ cho mẹ của cô, Grace, vì những sai lầm của bà trong việc nuôi nấng mình. Và Grace, một người vô gia cư, đã giúp một thành viên băng đảng trốn thoát khỏi cảnh sát. Thành viên của băng đảng sau đó đã cứu sống một cô gái mắc bệnh hen suyễn trong bệnh viện.

Đại khái bộ phim là như vậy. Giờ mình xin chém gió một tí.

Nếu muốn xem phim thì xin click vào Link xem phim.

Mình nhớ hồi xưa mình không biết chia sẻ là cái gì. Biết cái gì thì chỉ giữ cho mình thôi. Lần chia sẻ hiếm hoi là lúc cua gái. Hình như lúc làm chuyện này ai cũng trở nên tốt hơn nhỉ? Còn nhớ lúc đại học, có lúc thậm chí khó chịu khi ai dùng cái máy tính của mình! Rồi thì tuổi mình tăng lên, trưởng thành hơn, đi ra nước ngoài, thấy người ta viết code xong rồi chia sẻ cho mọi người xài! Từ từ mình cũng bắt chước tập tành chia sẻ. Một nhận xét là khi đời sống vật chất khá hơn thì chuyện chia sẻ cũng dễ dàng thực hiện hơn. Dĩ nhiên là có những người "may mắn" sinh ra đã rộng rãi.

Dạo gần đây (cũng phải đợi đến tuổi 40) thì mình bắt đầu chia sẻ. Tại sao? Có nhiều nguyên nhân. Thứ nhất mình muốn làm gì đó cho quê hương (chỉ để cảm thấy mình có một tí gì giá trị). Thứ hai là để trả ơn những người tốt với mình. Và tình cờ mình đã làm theo tinh thần đền đáp nối tiếp của Trevor. Tại sao mình không đền đáp ngược (pay it backward) cho những người đã giúp mình? Vì mình không biết trả ơn thế nào những người đã tốt với mình. Đó không đơn thuần là anh giúp tôi 5 đồng, tôi trả anh 5 đồng. Có những sự giúp đỡ không tiền nào đo đếm được. Hơn nữa mình lại không có thói quen (mà hay bị xem là sến) là cảm ơn trực tiếp bằng lời. Thay vào đó, mình giữ trong lòng. Mẹ mình cũng vậy, vậy cái này do mẹ ☺

Thế là mình chia sẻ tất cả những kinh nghiệm xương máu của mình từ cấp hai đến tận bây giờ. Mình chia sẻ cách học, cách làm slides, mình chia sẻ sách Toán mình viết (Nguyen, 2023), và chia sẻ gần như tất tần tật những gì mình biết. Hi vọng đây là cách đền đáp tốt nhất cho những người bạn, những người anh, người chị, và cô dì chú bác đã tốt với mình.

Cách ra bài tập mở như thầy Eugene rất nên khuyến khích vì nó sẽ làm tăng khả năng sáng tạo của học sinh. Những bài tập như vậy khiến học sinh phải suy nghĩ độc lập vì không có bài mẫu để copy. Dĩ nhiên là người thầy/cô sẽ mất nhiều thời gian để chấm bài hơn. Và vì vậy không phải ai cũng làm được, nhất là khi lương giáo viên không đủ trang trải cuộc sống. Học sinh từ bé làm bài tập kiểu này nhiều lúc lớn lên sẽ có thể làm ra những thứ chưa có trên đời. Còn học sinh mà cứ làm bài tập theo khuôn mẫu thì lớn lên rất khó làm gì mới mẻ.

Mà mình đáng buồn thay là một nạn nhân của kiểu giáo dục đó.

Ngày 13 tháng 11 năm 2022

# Chương 59

# Đôi dòng về cái note Toán mình viết

CÁI note Toán *Minimum maths for future engineers and scientists* (Nguyen, 2023) mình viết được một số bạn trẻ và bạn bè đón nhận. Mình rất vui vì đó là động lực để mình hoàn thiện nó. Giờ mình xin chia sẻ tại sao mình chia sẻ note này và tại sao cái note có xì tai như thế.

Mình xây nhà từ nóc nên cái móng khá yếu. Mặc dù mình vẫn có thể tiếp tục làm nghiên cứu từ cái nóc này, nhưng mình quyết định không làm như vậy nữa. Xuất bản báo nhiều tạo ra ảo tưởng sức mạnh (mình không nói về những người giỏi thật). Nhưng thật ra lúc ở một mình đối diện với trời xanh thì thấy ngay mình chỉ chạy theo các ông Tây da trắng mà thôi. Họ là người làm chủ cuộc chơi: họ đẻ ra lý thuyết này, mô hình nọ. Sau một hồi chán chê thì họ lại cho ra mô hình mới. Mình xách dép chạy theo thôi. Vì răng nên nổi này? Vì cái móng quá yếu. Do đó mình quyết định phải làm lại cái móng. Đó là lí do mình học lại Toán (thật ra thì còn nhiều thứ phải học nhưng không có thời gian nên chọn một môn làm trước). Và kết quả là mình đã viết một note về Toán dày 1000 trang (Nguyen, 2023) trong thời gian ở nhà trốn dịch Covid (2020-2022).

Tại sao mình có cái móng yếu? Cấp 3 thì mình học để thi đại học thôi, không hiểu bản chất của các môn. Ví dụ, mình có thể tính $\int_0^\pi \sin^2 x dx$, nhưng mà mình thậm chí không biết tích phân là gì. Lên đại học tình hình cũng không khá hơn là bao. Học, kiểm tra, thi cho qua môn. Lên cao học cũng vậy, vì mình phải tập trung làm luận văn cho tốt nghiệp nên không có thời gian tìm hiểu vấn đề một cách triệt để. Lên tiến sỹ thì có thời gian để học hỏi hơn (vì có 4 năm) nhưng thành thật mà nói thì mình vẫn nhắm tới cô siêu mẫu (tức là cái bằng TS) nên cũng không thể xây một cái móng chắc chắn được. Việc này giống như nhận vật Lệnh Hồ Xung trong truyện Tiếu Ngạo Giang Hồ của nhà văn Kim Dung; Xung học được Độc Cô Cửu Kiếm kiếm pháp tinh diệu nhưng nội lực thì yếu xìu.

Bây giờ các bạn đã ý thức được tầm quan trọng của cái móng, vậy lúc học cao học và làm nghiên cứu sinh, các bạn có thể nào vừa xây cái móng thật vững vừa tốt nghiệp không? Xin thưa là rất khó. Trong phụ lục cuốn *Thiết huyết đại kỳ*, nhà văn Cổ Long thú nhận: “Vẫn phải cần cơm, cần rượu, cần bạn gái, cần đi xe, cần nhà ở, cần xem phim... Thế là chỉ cần có thể viết được một cái gì đó là vội vàng đem đi đổi lấy tiền… Vì cần tiền cơm mà viết. Đó không phải là nỗi buồn chung của các tác giả, nhưng là nỗi buồn của tôi”. Chúng ta cần tồn tại trước đã vì không ai ngồi chờ chúng ta xây cái móng.

Vậy tại sao mình chia sẻ cái note Toán? Mình muốn các bạn trẻ đừng đi vào vết xe đổ của mình. Các bạn còn trẻ, có thể tạo một cái móng thật chắc. Rồi các bạn sẽ có thể làm chủ cuộc chơi. Không gì vui hơn làm chủ cuộc chơi và nhìn người khác chạy theo! Thay vì chạy theo thành tích (điểm số, bài báo, bằng cấp), xin để ý tới cái móng. Có một câu chuyện về một giáo sư đầu ngành, ông nói rằng ông làm một đề tài nghiên cứu trong vòng 10 năm thì ông đổi sang làm một cái khác. Ông còn là chủ bút của một tạp chí hàng đầu. Và đúng là ông đi đâu dân tình nghiên cứu chạy theo đó thật. Bạn muốn như ông này hay muốn như mình, xách dép chạy theo người ta?

Mình chia sẻ note cũng để cho các bạn đang cảm thấy Toán không phù hợp với mình một cơ hội thứ hai. Nếu một người 36, 37 tuổi, có gia đình, đi làm toàn thời gian, mà học được Toán thì các bạn trẻ tràn đầy năng lượng, thời gian bao la, trí não sung sức không có lí do gì không học được. *Vấn đề là bạn có chịu học không, và có thầy/cô và sách hay cho bạn không thôi.*

Mình chia sẻ note cũng vì sách GK Toán viết quá tệ dù chúng được viết rất chính xác. Công thức thì như từ trên trời rơi xuống, không giải thích. Người viết sách thì quá nghiêm túc, và giọng văn thì nhàm chán. Chứng minh thì trình bày nắn nót từ A tới B, không có chổ cho sai lầm. Kiến thức thì trình bày ngược với phát triển lịch sử của Toán. Giải tích có trước, mới đến giới hạn. Trong sách thì làm ngược lại. Không ai đủ thông minh mà nghĩ ra khái niệm giới hạn (lim đó) nếu không vì những khó khăn lúc làm giải tích đòi hỏi nó! Mình muốn một cách giải thích nhẹ nhàng, dẫn dắt, có thể vòng vèo, người viết là người thật sự vật lộn để hiểu Toán, chứ người viết không phải là một siêu nhân. Như vậy cái note tạo ra một niềm hi vọng: *người đọc sẽ hiểu/làm Toán được*. Tinh thần là: hắn làm được, tôi cũng làm được!


Mình không muốn một sách Toán như thế này: là một danh sách các định nghĩa, định lý, chứng minh, bổ đề... Kỹ sư và nhà khoa học không thể nào tiêu hóa những trang như vậy. Thay vào đó, là lối văn kể chuyện, dẫn dắt, lôi cuốn hơn. Những câu chuyện về các nhà Toán học được đề cập để cho các em thấy Toán học là do con người bằng xương bằng thịt tạo ra. Những người này cũng hỷ nộ ái ố như chúng ta mà thôi. Những người này cũng nhầm lẫn, mò mẫm lúc làm Toán mà thôi. Ví dụ, Descartes, vâng chính là ông Descartes đã đẻ ra hình học giải tích đó, từng nghĩ rằng $-4 > -2$. Không sao cả! Viết như vậy sẽ tạo niềm tin ở người đọc, rằng một ngày kia họ cũng có thể làm ra Toán, toán mới tinh chứ không phải là học Toán do mấy ông kia tạo ra. Dĩ nhiên là dù có học chăm chỉ bao nhiêu, dù có đọc hàng trăm cuốn sách thì không phải ai cũng trở thành GS Ngô Bảo Châu. Nhưng mà để hiểu Toán cấp 2/3 và Toán đại học thì chỉ cần chăm chỉ, có sách tốt, biết tự học thì mình nghĩ ai cũng làm được.

Mình chia sẻ note để chứng minh viết là một cách học rất hiệu quả.

Mình chia sẻ là để trả ơn những ân nhân của mình. Đây là kiểu đền đáp nối tiếp. Mình đã đề nghị dạy kèm Toán cho con một người bạn, người đã rất rộng rãi với mình hồi đại học, nhưng mà học được 2 hay 3 buổi thì cháu nó không học nữa. Như vậy đôi khi đền ơn cũng không được! Thôi thì đi lùi không được thì tui đi tới.

Mình muốn bản thân biết chia sẻ hơn. Và mình cũng muốn biết có đúng là cho đi là sẽ nhận lại nhiều hay không. Ít nhất thì qua cái note này mình quen biết một số bạn trẻ cùng sở thích thích Toán, quen một vài bạn cũng đang học lại Toán từ số 0, vv.

Dĩ nhiên là không dễ để viết một note như vậy. Và dĩ nhiên là không thể và không nên làm cái note quá chính xác một cách không cần thiết. Vì muốn sách Toán viết chính xác xin mời đọc sách giáo khoa. Nhưng ít nhất mình đã thử. Nó có thể là cảm hứng cho những bạn trẻ khác viết ra những note tốt hơn. Nó có thể là tài liệu tham khảo bên cạnh những sách giáo khoa kia. Và cuối cùng nó là cách mình học Toán, học cách viết, học cách chia sẻ. Nó là đứa con tinh thần của mình. Và vì vậy nó phải viết theo xì tai của mình, không cần phải giống ai hết!

Khi chúng ta phải "perform" chúng ta không cho phép sai lầm và vì vậy chúng ta thường cũng không tạo ra cơ hội học hỏi, tìm tòi, mày mò những gì mới mẻ. Và do đó chúng ta cũng không phát triển bản thân. Vượt qua một bài kiểm tra một môn nào đó không có nghĩa là bạn thật sự hiểu thấu đáo về môn này! Rồi mình tình cờ biết đến khái niệm "vùng trình diễn" (performance zone) và "vùng học tập" (leaning zone) qua Ted Talk của Eduardo Briceño[†]. Đại ý của Briceño

[†]Link ở đây https://www.ted.com/talks/eduardo_briceno_how_to_get_better_at_the_things_you_care_about?language=en&fbclid=IwAR0pZ7Z19RArNwlkwM804i-dxHUTj3T9hXNZfareM7w0IzoeiQ

là chúng ta nên luôn duy trì 2 trạng thái: (1) ở vùng trình diễn để làm tốt công việc mà không có sai sót và (2) ở vùng học tập để tìm đồ chơi mới. Tùy vào hoàn cảnh mà chúng ta dành nhiều thời gian cho vùng nào nhiều hơn. Ví dụ, đang làm NCS thì nên ở vùng trình diễn nhiều hơn (để lấy cô siêu mẫu). Sau khi đi làm thì có thể ở vùng học tập nhiều hơn. Cảm ơn Eduardo Briceño cho mình một bài học quý giá!

Nói không chứng cứ thì khó thuyết phục, Phính ơi. Ok, nghe nè. Trong cuốn sách rất hay *Where Good Ideas Come From: The Natural History of Innovation* của Steven Johnson, ông viết: "Google đã thiết lập một chương trình “20 phần trăm thời gian” nổi tiếng cho tất cả các kỹ sư của Google: cứ sau bốn giờ họ làm việc cho các dự án chính thức của công ty, các kỹ sư được yêu cầu dành một giờ cho dự án thú cưng của riêng họ, được hướng dẫn hoàn toàn bởi niềm đam mê của chính họ và bản năng." (Johnson, 2010).

Ngày 17 tháng 10 năm 2022

78-BOYNvk.

# Chương 60

# Luật Benford

CHƯƠNG này là một câu chuyện thú vị về cái gọi là luật Benford. Luật này được đặt theo tên của nhà vật lý người Mỹ Frank Benford, người đã trình bày nó trong một bài báo năm 1938 có tựa đề "Luật số lạ lùng", mặc dù trước đó, Simon Newcomb đã đã trình bày nó vào năm 1881. Sao không gọi là luật Newcomb? Vì đó là luật eponymy của Stigler, do giáo sư thống kê Stefen Stigler phát biểu trong một bài báo vào năm 1980, luật này tuyên bố rằng "không có phát hiện khoa học nào được đặt theo tên của người đầu tiên phát hiện ra nó". Và nó ứng nghiệm cho chính Stigler, khi luật này đã được Robert K. Merton phát hiện ra trước đó!

Câu chuyện bắt đầu từ ... một đẳng thức lượng giác, mà học sinh nào cũng từng một lần thấy qua trong đời (Eq. (33.12)):

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2} \tag{60.1}$$

Xin đừng xem thường cái đẳng thức này nhé. Nó là của quý cách đây 500 năm đó các bạn. Nếu để ý, ta sẽ thấy vế trái là tích còn vế phải là tổng. Đó chính là giá trị của nó: nó cho phép người xưa thay thế phép nhân (một bài toán khó thời chưa có máy tính) bởi phép cọng (một phép toán mà thời nào cũng dễ). Đây là cách bạn có thể sử dụng nó. Giả sử bạn muốn tính tích $x \times y$, hãy sử dụng một bảng để tra cứu góc $\alpha$ có cosine là $x$ và góc $\beta$ có cosine là $y$. Tra cứu cosines của tổng $\alpha+\beta$ và của hiệu $\alpha-\beta$, rồi lấy trung bình của hai cosines đó. Bạn sẽ được tích $xy$! Ba lần tra cứu trong bảng và tính tổng, hiệu và trung bình thay vì một phép nhân. Tycho Brahe, lúc đang ở đảo Hve, cùng với những người khác, đã sử dụng thuật toán này được gọi là *prosthaphaeresis*.

Vào năm 1590, Vua James VI của Scotland đi tới Đan Mạch để gặp Anne của Đan Mạch-vợ tương lai của ông, và ông đã đi cùng với bác sĩ riêng của mình, Tiến sĩ John Craig. Thời tiết xấu đã buộc đoàn người phải hạ cánh trên đảo Hven, gần trạm quan sát của Tycho Brahe. Tự nhiên, Brahe đã giới thiệu cho đoàn người thuật toán *prosthaphaeresis* để thay thế phép nhân bằng phép cộng. Sau khi về lại Scotland Craig thuật lại cho bạn mình tên là John Napier. Từ đó, Napier đã bắt đầu nhiệm vụ của đời mình: phát triển một phương pháp để đơn giản hóa phép nhân. Hai mươi năm sau, ông đã thành công. Và chúng ta có được khái niệm về logarithm. Khi ý tưởng về logarithm xuất hiện vào đầu thế kỷ XVII, nó có tác động đáng kể và ngay lập tức. Các nhà sử học toán học hiện đại, John Fauvel và Jan van Maanen, đã minh họa điều này một cách sinh động:

> Khi nhà toán học người Anh Henry Briggs nghe vào năm 1616 về việc phát minh logarit bởi John Napier, ông quyết định đi bốn trăm dặm về phía bắc đến Edinburgh để gặp nhà phát minh và trò chuyện với ông trực tiếp.

Sau buổi trò chuyện đó, một năm sau Briggs đã xuất bản một bảng logarit cơ số 10. Logarit có tính chất sau:

$$\log_{10}(ab) = \log_{10} a + \log_{10} b \tag{60.2}$$

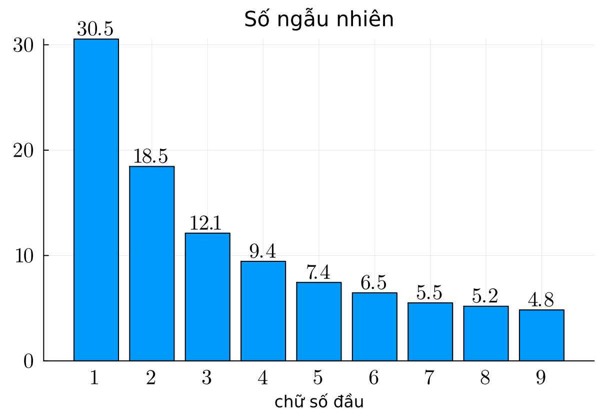
Hãy để ý sự tương tự giữa nó và Eq. (60.1): tích biến thành tổng. Bảng logarit thời đó cũng như máy tính bỏ túi của ta ngày nay: nó giúp việc tính toán với các con số trong các hoạt động ngân hàng, thương mại, khoa học (thiên văn, hàng hải vv.), dễ dàng hơn. Kepler tìm ra định luật ba về chuyển động các hành tinh vào năm 1619, sau khi Briggs tìm ra logarit.

Vì một lí do mà không ai hiểu rõ, chúng ta mắc kẹt với hệ thập phân. Trong hệ thống này, ta dùng 10 chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ để tạo nên bất cứ số nào mà bạn có thể nghĩ ra. Ví dụ, $\pi = 3.14159265358979323846264338327950$... Những tưởng các con số $1, 2, .., 9$ sinh ra bình đẳng và sẽ được đối xử bình đẳng. Nếu chúng ta lấy một số liệu nào đó, ví như dân số các quận trên toàn nước Mẽo và xem có bao nhiêu số bắt đầu với 1, bao nhiêu với 2, với 3 ..., thì có lẽ tất cả đều nghĩ phần trăm số với 1 là số đầu tiên sẽ là $1/9 = 11.11\%$. Nhưng không!

Câu chuyện tiếp tục với Simon Newcomb (1835-1909), một nhà thiên văn học, nhà toán học ứng dụng Canada-Mỹ. Ông đã làm Giáo sư Toán học trong Hải quân Hoa Kỳ và tại Đại học Johns Hopkins. Vào năm 1881, khi Simon Newcomb cầm một bảng logarit đã cũ thì ông chú ý rằng trong bảng này, *những trang đầu tiên (chứa các số bắt đầu bằng 1) bị mòn và bẩn nhiều hơn so với những trang sau*. Vì một lý do nào đó, người ta có vẻ thường tra cứu các số bắt đầu bằng chữ số 1 và 2 nhiều hơn so với việc tra cứu các số bắt đầu bằng chữ số 8 và 9. Nói một cách khác, có vẻ như các số bắt đầu bằng 1 và 2 thực sự xuất hiện nhiều hơn trong tự nhiên so với các số bắt đầu bằng 8 và 9. Và ông đã tìm ra tần suất xuất hiện của các con số đầu tiên (hay chữ số quan trọng nhất), tức là $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, và kết quả là Bảng 60.1. (Ví dụ, nếu ta có một con số \$42.35 thì con số đầu tiên là 4, nếu là 0.42 cm thì con số đầu tiên là 4, vì $0.42 = 4.2 \times 10^{-1}$ khi ta dùng ký hiệu khoa học). Định luật Benford khẳng định rằng với một tập hợp lớn các đo đạc trên một phạm vi rộng của các giá trị, khoảng 30% số sẽ có số 1 là chữ số quan trọng nhất, khoảng 17% có số 2 là chữ số quan trọng nhất vv. Sau này, Frank Benford đã phát hiện lại luật này, và từ đó chúng ta có cái tên luật Benford.

| Con số | Tần suất |
|---|---|
| 1 | 30.10% |
| 2 | 17.61% |
| 3 | 12.49% |
| 4 | 9.69% |
| 5 | 7.92% |
| 6 | 6.69% |
| 7 | 5.80% |
| 8 | 5.12% |
| 9 | 4.58% |

Bảng 60.1: Luật Benford.




Hình 60.1: Số liệu thực (dân số 3 143 quận ở Mỹ) tuân theo luật Benford.

Tại sao các con số lại ứng xử kỳ cục như vậy? Có gì đặc biệt với số 1,2? Mình không tin vào luật Benford nên lên mạng tìm một dữ liệu để kiểm chứng. Số liệu là dân số cho tất cả 3 143 quận ở Hoa Kỳ từ wikipedia[†]. Mình lưu dữ liệu thành một file CSV[††] có hai cột: cột thứ nhất là tên các quận và cột kia là dân số tương ứng, viết một chương trình ngắn bằng `Julia`: đọc tệp CSV, tìm các con số đầu tiên của dân số của mỗi quận, rồi tính số lần xuất hiện của chúng, chia cho 3 143 ta có tần suất của $1, 2, \ldots, 9$. Chương trình được trình bày ở mã 60.1. Ở đây mình muốn minh họa công việc của một người làm khoa học dữ liệu (*data science*): viết code để xử lý số liệu. Xin đừng dùng Excel nếu bạn muốn thành một lập trình viên hay nhà khoa học dữ liệu!

Mã nguồn 60.1: Chương trình `Julia` vẽ Hình 60.1.

[†]Link: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_United_States_counties_and_county_equivalents

[††]Nếu muốn thành cao thủ thì bạn có thể viết code để lấy dữ liệu trực tiếp từ trang web. Cả `Julia` hay `Python` đều có thư viện cho bạn làm chuyện đó.

```julia
using DataFrames, CSV, PyCall, Plots, LaTeXStrings
plt     = pyimport("matplotlib.pyplot")
data    = DataFrame(CSV.File("bf_data.csv")) # read the CSV file
m,n     = size(data)                         # number of rows and columns
counts = zeros(9)                            # store the # of appearances of 1,2,...
for i = 1:m                                  # loop over the rows
  s = string(data[i,2])                      # get pop. of row 'i', convert to string
  if      s[1]=='1'                          # if the first digit is '1'
          counts[1] += 1                     # increase counts[1] by 1
  elseif s[1]=='2'
        counts[2] += 1                       # code: not complete, save space!!!
  else
        counts[9] += 1
  end
end
counts /= m, counts *= 100                   # compute probability, convert to %
digits   = [1,2,3,4,5,6,7,8,9]
p        = bar(digits,counts,legend=false,xtickfontsize=14,ytickfontsize=14)
title!("Benford's law")
xlabel!("Leading digit")
xticks!(1:9, [L"$1$", L"$2$", L"$3$",L"$4$",L"$5$",L"$6$",L"$7$",L"$8$",L"$9$"])
yticks!(0:10:30,[L"$0$", L"$10$", L"$20$", L"$30$"])
for (i, v) in enumerate(counts)
    x = round(v, digits=1), latex_string = L"%$x"
    annotate!(i-0.1, v + 1, Plots.text(latex_string, :black, :center, 10))
end
```

Kết quả thu được khi chạy chương trình là Hình 60.1. Số liệu này cho thấy luật Benford đúng. Các bạn có thể thu thập dữ liệu và kiểm tra. Benford đã làm như vậy cho rất nhiều dữ liệu.

Nhưng làm sao Newcomb và Benford tìm ra công thức tính ra tần suất trong Bảng 60.1? Để tìm ra lời giải, trước hết ta dùng kí hiệu khoa học và viết số liệu $m$ dưới dạng: $m = x \times 10^y$, và $1 \le x < 10$. Do ta chỉ quan tâm tới con số đầu tiên, ta không cần $10^y$. Nếu dữ liệu là (bỏ qua phần $10^y$) là $1.1, 1.2, 1.3, \ldots, 1.99999$ thì chúng đều có 1 là con số đầu tiên.

Bảng 60.2: Số liệu minh họa: chuyển đổi đơn vị.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1.0 | 1.1 | 1.3 | 2.2 | 2.3 | 2.8 | 3.1 | ... |
| $3x$ | 3.0 | 3.3 | 3.9 | 6.6 | 6.9 | 8.4 | 9.3 | ... |

Chìa khóa giúp ta tìm ra công thức đằng sau luật Benford là câu hỏi sau: *chuyện gì xảy ra khi ta thay đổi đơn vị*? Tức là ta có số liệu $x$ theo một đơn vị nào đó, và ta đổi nó sang một đơn vị mới, và có $3x$ nếu giả sử hệ số chuyển đổi đơn vị là 3. Bảng 60.2 là một dữ liệu mình tự tạo ra, trong đó hàng đầu là $x$ (với đơn vị ban đầu) và có $N$ $x_i$ như vậy, và hàng hai là $3x$ (đơn vị mới). Nhìn vào bảng này, ta thấy: phần trăm số có con số đầu là $1$ và $2$ bằng phần trăm số có con số đầu là $3, 4, 5, 7, 8$. Giờ ta cần ký hiệu để diễn tả quan sát này bằng một phương trình. Nếu $d$ là một số nguyên dương sao cho $1 \le d \le 10$, ta gọi $f(d)$ là phần trăm của các số có con số đầu nhỏ hơn $d$, ta sẽ có

$$\begin{array}{lcl} f(3) & : & \text{phần trăm số có con số đầu là } 1 \text{ và } 2 \quad = 6/N \\ f(9) - f(3) & : & \text{phần trăm số có con số đầu là 3 tới 9} \quad = 6/N \end{array}$$

Như vậy, ta có phương trình

$$f(3) = f(9) - f(3)$$

Tại sao hệ số chuyển đổi phải là 3? Ta gọi $b$ là hệ số chuyển đổi. Trong dữ liệu với đơn vị ban đầu, $f(a)$ là phần trăm số có con số đầu nhỏ hơn $a$. Những con số này sẽ biến thành các con số mới khi dùng đơn vị mới, và chúng có số đầu từ $b$ tới $ab$, do đó

$$f(a) = f(ab) - f(b) \iff \boxed{f(ab) = f(a) + f(b)} \tag{60.3}$$

Hàm nào biến tích thành tổng thế này? Logarit! Nhưng mà logarit cơ số nào? Chú ý rằng $f(d)$ là phần trăm của các số có con số đầu nhỏ hơn $d$, và như vậy $f(10) = 1$ vì 100% con số có số đầu nhỏ hơn 10. Do đó, *hàm ta cần tìm là logarit cơ số 10*. Giờ ta kiểm tra xem những gì ta làm có đúng không. Ta tính phần trăm số có con số đầu là 2:

$$P(2) = \text{phần trăm số có con số đầu là 2} = f(3) - f(2) = \log_{10} 3 - \log_{10} 2 = 17.6\%$$

Và kết quả này trùng với Bảng 60.1. Giờ là lúc tìm ra công thức tổng quát, và ta có công thức cho luật Benford: $P(d) = \log_{10}(d+1) - \log_{10} d = \log_{10}\left({}^{d+1}/_{d}\right)$

$$\boxed{P(d) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right)} \tag{60.4}$$

Nếu là xác suất thì ta phải có $\sum_{d=1}^{9} P(d)$ bằng 1. Liệu có đúng không? Bảng 60.1 cho thấy đúng rồi mà. Không cần bảng đó ta cũng biết, vậy mới hay:

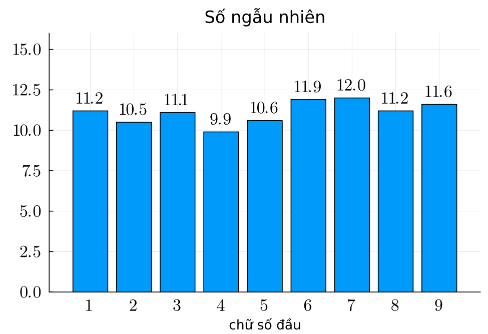
$$\begin{aligned}
\sum_{d=1}^{9} P(d) &= \sum_{d=1}^{9} [\log_{10}(d+1) - \log_{10} d] \\
&= (\log_{10} 2 - \log_{10} 1) + (\log_{10} 3 - \log_{10} 2) + (\log_{10} 4 - \log_{10} 3) + \cdots + (\log_{10} 10 - \log_{10} 9) \\
&= \log_{10} 10 - \log_{10} 1 = 1
\end{aligned}$$

Ta lại thấy tổng ống nhòm!

Các ngôn ngữ lập trình có hàm `rand` giúp chúng ta tạo ra các con số ngẫu nhiên, trông có vẻ thực. Giờ chúng ta sẽ dùng hàm đó để tạo ra 1 000 số tự nhiên có giá trị từ 1 đến 100 000. Code `Julia` chỉ đơn giản vậy thôi

```
random_integers = rand(1:100000, 1000)
```

Sau đó, ta sẽ tìm phần trăm của các số đầu tiên của 1 000 số này (bắt chước Newcomb và Benford). Kết quả là hình bên cạnh. Rõ ràng là bây giờ các số đầu tiên $(1, 2, \ldots, 9)$ ứng xử bình đẳng: phần trăm của mỗi số vào khoảng 11% tức $1/9$. Điều này không có gì lạ, vì hàm `rand` là từ phân bố đều (*uniform distribution*). Như vậy, luật Benford là một cách để phát hiện số liệu giả (mà thường được tạo ra bởi số ngẫu nhiên)! Và nó đã được sử dụng trong các phiên tòa ở một số nước trong các vụ án mà trong đó có vấn đề số liệu ảo (chẳng hạn gian lận thuế).




Chúng ta có thể học được gì sau câu chuyện về luật Benford? Đó là một câu chuyện điển hình của một khám phá khoa học. Có một hiện tượng trong tự nhiên, nó sờ sờ ra đó. Tuy nhiên không ai thèm chú ý. Một hôm, một người với óc quan sát như Sherlock Holmes phát hiện ra nó. Phần còn lại, nếu người đó là người có quyết tâm, là lịch sử.

Ngày 10 tháng 10 năm 2023

# Chương 61

# Cái gì quyết định cuộc đời chúng ta?

FRANÇOIS Arago đã viết một câu nổi tiếng về Euler

> *"Euler tính toán mà không cần nỗ lực, giống như con người thở, hoặc như con đại bàng tung mình trong gió."*

Như vậy Euler rõ ràng là một nhà Toán học kiệt xuất, có thể nói ngàn năm có một. Mà hãy xem cha ông là ai nhé. Cha của Euler, ông Paul Euler, là mục sư của nhà thờ Calvinist địa phương. Mặc dù Paul không phải là một nhà Toán học, ông có người bạn mà không phải ai khác chính là nhà Toán học trứ danh Johann Bernoulli. Và Euler đã học Toán từ chính Bernoulli.

Giờ thử đặt câu hỏi nếu mà Paul không có người bạn là Johann Bernoulli thì Euler của chúng ta sẽ thế nào? Mình dành cái này cho các bạn nhé. Mình quay lại với Phính đây.

Tại sao nhà mình không chuyển đi đâu mà phải là lên ga Huế? Và tại sao không ở đâu mà phải là đối diện nhà ôn Vui? Và tại sao nhà ôn Vui lại có anh Bé học giỏi Toán để sau này cứu mình khỏi chết đuối? Sau đây mình sẽ phân tích những câu hỏi này. Để làm chi? Để thấy rằng mình không có một vai trò gì trong những sự kiện quan trọng này cả!

Nhà mình chuyển lên ga Huế là do người ta cho lên ở giữ nhà như đã trình bày ở Chương 1. Nếu ba mình không nghèo và không phải là người thật thà thì chắc chắn sẽ không được chọn mặt gửi vàng. Như vậy mình hưởng cái phúc từ ba mình. Nhưng để được anh Bé giúp mình thì mình lại hưởng phước từ mẹ. Thật là kỳ diệu. Nếu mẹ mình không thương em gái (là dì Nghi) thì dì Nghi sẽ không lên ở cùng nhà mình. Mà như vậy thì chưa chắc anh Bé chịu truyền nội công cho mình. À, nếu dì Nghi mà không xinh gái thì sẽ là một câu chuyện khác. Mà dì mình xinh đẹp thì do ... ông bà ngoại.

Theo trí nhớ của mình thì dì Nghi không thích ba mình. Nhưng mà giờ đây Tết nào dì cũng lì xi cho ba mình một ít tiền. Dì không phải làm như vậy, nhưng mình nghĩ là dì muốn trả ơn. Ba mình thì nhiều người không thích lắm. Vì ông ít nói, khó tính, sạch sẽ và không biết nhậu thôi. Mình cũng ít nói và có lẽ nhiều người cũng không thích mình.

Vào học đại học thì vì nguyên cớ gì mình gặp được người chị dễ thương với mình là chị Kim Anh? Cái này thì ba mình và mình đóng vai trò chính. Số là năm 12 Đại bị đuổi học (vì một lí do lãng xẹt), và thế là nó bỏ nhà ra đi. May cho nó, và cho cả mình, là nó bỏ nhà không đi mô mà đi sang nhà mình. Nó leo lên trên cây sứ nhà mình, trốn ở đó. Lúc đó là buổi tối. Mẹ và anh nó đi tìm chết cha mà không tìm được, mới sang nhà mình. Thế là mình cũng tham gia đội tìm kiếm. Đi tìm chán chê vẫn không thấy mọi người chia tay ai về nhà nấy. Mình vừa về nhà đi ngang cây sứ thì Đại từ trên cây nhảy xuống. Rứa là tối đó nó ngủ lại nhà mình. Sáng mai ba mình mới nói với nó:

> *Giờ mà con bỏ nhà đi chơi thì con sướng. Không phải đi học thì sướng chứ còn chi nữa? Nhưng mà con có nghĩ sau này con sẽ ra răng? Con có muốn giống chú đạp xe thồ không? Nếu muốn, thì con cứ bỏ học. Còn không thì đi học lại.*

Đại loại lời khuyên nó vậy. Đại nghe theo, và đi học lại. Năm đầu nó thi Kiến Trúc Sài Gòn rớt cái bạch (không ngạc nhiên lắm) nhưng sang năm hai thì đậu. Vô SG học thì Đại ở nhà chị Kim

Liên, và chị Kim Liên, có người em không ai khác mà chính là chị Kim Anh. Mình có cảm tình với chị KA ngay lần đầu tiên gặp gở. Và sau này Đại và chị KA yêu nhau và gây ra bao sóng gió vì chênh lệch tuổi tác (chị KA lớn hơn Đại 4 tuổi). Chị KA mang lại cho mình một tình cảm như người bạn, như người chị, hơn nữa chị cho mình sự tự tin (vì chị là không phải là dân kỹ thuật nên chị cũng hâm mộ dân Bách Khoa). Sau này lúc học cao học thì chị KA còn giúp đỡ tiền bạc những ngày mà mình nằm chèo queo ở nhà vì không có tiền ăn cơm. Mình nghĩ giai đoạn mình bị trầm cảm vì không được đi Bỉ mà không có chị KA thì không biết thế nào. (Chuyện không đi Bỉ, trầm cảm mình không cho gia đình biết).

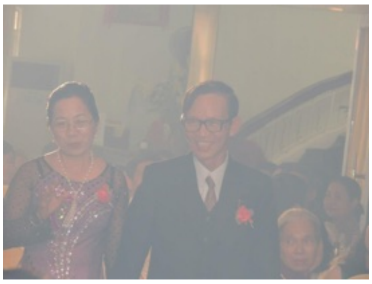
Vậy chuyện mình gặp Stéphane thì thế nào? Chuyện này bắt đầu từ việc nhà mình nghèo. Vì nghèo nên mình chọn học lớp Pháp ngữ AUPELF. Mà văn phòng lớp AUPELF này không nằm ở đâu mà phải nằm ngay cạnh văn phòng chương trình cao học Việt-Bỉ của Thầy Hưng. Rồi mình bị chương trình này hấp dẫn rồi đi theo. Dĩ nhiên là ba mẹ mình ủng hộ thì mình mới đi học được. Nếu mình học giỏi thì mình đã không gặp Stéphane; vì mình không lọt vào 3 người đi Bỉ nên mình mới đi tìm một cơ hội khác. Và Stéphane đã đến và cứu rỗi cuộc đời mình. Mà tại sao phải là một ông người Pháp? Có lẽ mình có duyên với Pháp. Mà tại sao lại là Pháp? Nếu các bạn trẻ học hỏi mà như thế này thì còn gì bằng. Tiếc là mình không trả lời câu này được vì mình không biết tí gì về phong thủy.

Mà sao lại nhắc phong thủy? Số là sau khi mình đi Pháp thì ba mình mới kể cho mình nghe câu chuyện như sau. Hồi lúc mình học lớp 11 hay 12 thì có một chú bạn ba mình đến nhà chơi. Ba mình mới giới thiệu: “con trai tui đó”. Chú này nói với ba mình (lúc không có mình): “thằng này sau này đi nước ngoài”. Cái hay của ba mình là, tuy nghe vậy, nhưng không nói gì cho mình cả; ông làm theo lời cha ông ta "nói trước bước không qua". Nếu mình nghe vậy có khi đâm ra ỷ lại và hỏng bét. Cảm ơn dady!

Cũng vì mình có duyên với Pháp mà mình gặp Thảo chuyên Toán Quốc Học. Vì Thảo thì có mối liên hệ sâu xa với Pháp nên chắc chắn là vào BK Thảo sẽ học lớp Pháp ngữ. Và như vậy mình gặp Thảo. Thì trong lớp đó có bao nhiêu người, Thảo thì có chi đặc biệt? Bạn Thảo này chính là người đã giúp đỡ mình lúc mới bỡ ngỡ sang Pháp. Thử tưởng tượng không có Thảo thì mình sẽ chật vật đến thế nào.

Cái duyên với Pháp lại cho mình gặp Alban. Nhưng mà nếu chỉ có duyên thì chưa đủ. Số là mình thích tìm tòi làm cái mới nên mới luyện thêm MPM. Có lẽ ở Melbourne thì chỉ có mình là biết môn võ công độc lạ này thôi. Alban không liên hệ mình thì còn ai nữa. Nhưng mà chừng đó cũng chưa đủ. Mình phải còn cởi mở để chấp nhận chia sẻ kiến thức với Alban nữa. Thật ra mình biết với Alban mình sẽ học được nhiều thứ. Và quả đúng thế thật.

Vậy cớ làm sao Phính lại sang Hà Lan? Cái ni thì trời quyết định. Phính cố suy nghĩ mà không tìm ra được câu trả lời. Hoặc nói cho văn vẻ là Phính có duyên với Pháp nhưng không có phận. Ở đây mình gặp nhiều quý nhân. Tại sao Oriol, Erik Jan tốt với mình thì mình đành bó tay. Chuyện gặp Chí thì có thể suy diễn một tí. Cái này là do tính cả nể của mình. Vì không biết từ chối mình đồng ý share phòng với anh Huy, và anh Huy chơi thân với không ai khác mà là Chí. Chí và mình có nhiều điểm tương đồng đến kỳ lạ, mà chuyện lạ nhất là 2 người cùng quen bà xã trên mạng. Mình làm trước và mình làm vậy vì mình ăn nói dở. Chí đẹp trai, con trai Hà nội, ăn nói lưu loát. Vậy mà Chí cũng theo con đường online ☺



Như vậy cuộc đời mình được quyết định bởi phước đức của ba mẹ mình (hình bên) . Chính cái phước đức tốt này cho phép mình gặp quý nhân vào mỗi thời điểm khó khăn. Sau đó quý nhân lùi vào sân khấu cho mình ’bơi’ tiếp. Tới đoạn nào khó thì quý nhân lại xuất hiện. Phính ơi, rứa phước đức của ba mẹ bạn từ mô chui ra? Thì trong không khí đó bạn. Trả lời vậy quý vị chịu không? Mình cũng không chịu nữa là. Nếu đó là kết quả của kiếp trước thì mình xin chịu, vì không kiểm chứng được. Nhưng mình thấy, dù ba mẹ mình không là ông này bà nọ, nhưng họ là những người sống chất phát, thành thật, và không bao giờ làm hại ai cả.

Mẹ mình thích đọc truyện và xem phim, và bà đã truyền cho mình hai thứ này. Ba mình không đọc truyện và xem phim. Nhưng ông không hút thuốc và rượu chè. Mình được ông cho hai thứ này. Ông nói ít và mình cũng ít khi lên tiếng. Ông sạch sẽ còn mình thì không. Một hôm nhà mình sang nhà Hiếu chơi (hai đứa nhà mình thích qua bên chú Hiếu-cô Trang chơi lắm), rồi nghe Hiếu nói “em bực mình với mấy cây cỏ dại lắm”. Mình không nói gì vì không biết nên nói chi. Nhưng Hiếu lặp lại, mình mới hỏi: “em chỉ anh coi cây cỏ dại gì mà ghê thế”. Hiếu chỉ vào chân tường nhà có dăm ba cây cỏ mọc lên. Mình nói: “anh thấy có chi mô em”.

Mình viết tới đây thì dừng. Và bà xã vô comment như sau:

> *Anh nói đúng, nhưng lại thiếu đi cái quan trọng nhất. Con đường đi của mỗi người để trở thành ta của ngày hôm nay có rất nhiều yếu tố chi phối, nhưng yếu tố quyết định chính là bản thân mình. Nếu anh không phải là anh, là* ***một người chăm chỉ, nỗ lực, vượt qua nhiều vất vả, khó khăn để học và làm việc*** *thì không có anh Bé, không có chị Kim Anh, không có chị Thảo, không có Stéphane nào giúp nổi anh cả. Trân trọng và biết ơn những người đã góp từng viên gạch để nâng bước chân anh trên con đường anh đã đi qua, nhưng hãy nhớ anh chính là người gắn kết những viên gạch đó để tạo nên (tạm gọi là) thành tựu nhất định cho mình.*

Bà xã mà nói thì chỉ có đúng, nên mình không dám bình luận thêm ☺. Nịnh vợ tí thôi. Ông Louis Leo Holtz (sinh năm 1937)–một cựu cầu thủ, huấn luyện viên và nhà phân tích bóng đá người Mỹ–nói súc tích hơn nhiều:

> *Cuộc sống là* ***mười phần trăm*** *những gì xảy ra với bạn và* ***chín mươi phần trăm*** *cách bạn phản ứng với nó.*

Mình chỉ bàn thêm một tí xíu; đối với riêng mình ***thất bại là mẹ thành công***: thất bại thi tiếng Anh dẫn mình tới quyết định học Toán; thất bại trong việc học giỏi ở đại học dẫn mình tới quyết định học cho qua thôi (và học gì mình thích); thất bại trong việc lấy học bổng đi Bỉ lúc học cao học dẫn mình tới quyết định là tự tìm đề tài thật khó và điều này dẫn tới cuộc gặp gỡ định mệnh với Stéphane. Và thất bại càng cay đắng thì sự vùng lên của mình càng mạnh mẽ; nếu mình thi vào cao học không thủ khoa thì khi biết mình không có học bổng đi Bỉ, chắc mình cũng không cho đó là một điều gì to tát.

Do đó, Hãy chấp nhận thất bại. Hãy ăn mừng mỗi lần thất bại. Hãy nghe Thomas Edison nói về thất bại:

> *“Tôi không thất bại 10.000 lần—Tôi đơn giản là đã tìm ra 10.000 cách không hiệu quả”.*

Hay như Heywood "Woody" Allen (1935), một nhà làm phim và diễn viên người Mỹ có sự nghiệp kéo dài hơn sáu thập kỷ, đã nói

> *"Nếu bạn không thất bại hết lần này đến lần khác, đó là dấu hiệu cho thấy bạn đang chơi an toàn."*

Nếu chúng ta ‘chơi’ (hay sống) an toàn thì chúng ta không làm được những việc phi thường, những việc có thể đem lại những trải nghiệm khó quên. Xin cho phép mình dùng câu chuyện của nhà văn Joanne Rowling tác giả của truyện *Harry Potter*. Rowling hoàn thành *Harry Potter và Hòn đá phù thủy* vào tháng 6 năm 1995. Sau một báo cáo hào hứng từ một độc giả, Christopher Little Literary Agency đã đồng ý đại diện cho Rowling. Bản thảo của bà đã được gửi tới mười hai (vâng 12 đó các bạn) nhà xuất bản, tất cả đều từ chối nó!

Nhiều khi mình nghèo nhưng mà cũng làm eo; nói một cách khác, mình có một tiêu chuẩn cho riêng mình. Đó lần từ chối làm luận văn tốt nghiệp cao học với thầy Hưng! Mình làm vậy vì mình biết mình muốn cái gì và thầy Hưng không cho mình cái đó. Đối với thầy thì chỉ là một đề tài như bao nhiêu đề tài thầy đã hướng dẫn thôi. Đó là lần từ chối lời giới thiệu đi Hàn Quốc làm NCS của anh Tuân. Không phải mình chê bai HQ gì, nhưng mà lúc làm tốt nghiệp cao học, đọc tài liệu không thấy người HQ nào cả. Đó là lần bỏ NCS ở Pháp. Cũng vì mình biết mình cần gì. Một lần nữa, đối với họ đó chỉ là một cái đề tài, làm xong cho mày cái bằng PhD để mà tự sướng. Không! Mình cần võ công kìa. Cái bằng ư? Không quá quan trọng; mình để cái bằng lại nhà ba mẹ mình từ năm 2012 sau khi có nó cuối năm 2011. Cái này thì không có gì đáng ngạc nhiên vì Dan Millman[†] đã từng nói:

> *"Hành trình là thứ mang lại cho chúng ta hạnh phúc chứ không phải đích đến."*

Ngày 1 tháng 4 năm 2023

[†]Dan Millman là một tác giả và diễn giả người Mỹ nổi tiếng với cuốn sách "Con đường của chiến binh hòa bình", đã được dịch ra 29 thứ tiếng và được chuyển thể thành phim.

# Chương 62

# Người thắng cuộc: sống chậm và thắng chính mình

Vì ba mẹ mình không phải là ông này bà nọ trong xã hội, họ để cho mình tự do với việc học. Điểm 10 hay điểm 0 họ không bao giờ can thiệp. Trong một môi trường không áp lực như vậy, mình đi học và không bao giờ bị so sánh với ai cả. Và vì mình học bình thường, mình cũng không có cú để so sánh với ai cả.

Có chi mô mà đòi so?

Cứ thế mình học hết cấp 1, cấp 2, cấp 3, rồi đại học. Không so bản thân với ai cả, cứ học hết sức mình. Mọi chuyện thay đổi khi mình vào cao học. Lúc này vì có tham vọng đi Bỉ (và có hi vọng đi Bỉ) nên mình đã làm phép so sánh. Khi danh sách 3 người đi Bỉ không có mình, mình đã làm phép so sánh bản thân với 3 người đó để hiểu vì sao mình thua. Nhưng vì thầy Hưng làm việc rất minh bạch: 3 người nào có điểm cao nhất thì đi, mình chỉ xếp hạng 4 hay 5 thì ở lại Xì Gòn ăn cơm tấm thôi. Cũng may mình không có buồn quá lâu, mình đứng lên và tìm cách đi Pháp (Bỉ không được thì Pháp) một cách rất riêng. Rồi từ Pháp mình lang thang qua Hà Lan, và có được cái bằng tờ xờ và trở thành cái mà chúng ta gọi là nhà nghiên cứu.

Mỗi nhà nghiên cứu thời này bị gắn vào thân cái gọi là chỉ số trích dẫn (citation index), vốn là một con số. Nói nôm na, ai có con số này cao là cao thủ, ai mà số này thấp là dạng thấp thủ. Ví dụ con số của Phính tầm 7 000, của Thomas Hughes–cao thủ số một thế giới ngành mình–là 137 006 (tra cứu vào tháng 7 năm 2023). Như vậy, mình thua ông này khoảng 20 lần. (Google làm ra trang google scholar cho phép tra con số này của bất cứ nhà nghiên cứu nào.) Và mình đã làm gì sau khi 'được' cái con số này? Mình dùng nó để so sánh với mấy anh/chị nghiên cứu khác. Mà anh chị nào? Anh Tây ba lô hay anh Zimbawe? Không, so với họ mà làm chi. So với mấy anh Việt Nam chứ. Con gà tức nhau tiếng gáy, phải chăng là đây?

Sau một thời gian (khá dài, tầm 2 năm) làm cái việc so sánh này, mình có nhận xét sau. Khi mà con số trích dẫn của mình mà thua người khác, mình buồn và trở nên chán nản. Khi mà mình có con số cao hơn thì mình kiêu ngạo (dù con số mình vẫn là 1 con số rất nhỏ). Trong hai trường hợp, mình chẳng được cái đếch gì cả khi làm cái việc so sánh đó. Chỉ có tốn thời gian! Thế là mình block luôn trang google scholar. Không xem chỉ số trích dẫn của mình và của ai cả. Sau một thời gian như vậy thì mình loại bỏ được thói quen 'xấu' này. Giờ mình chỉ xem chỉ số trích dẫn của 1 người: anh Phính. Mình chỉ cần thắng anh này là vô địch thiên hạ!

So sánh với người khác là bản năng của con người: ai là con người đều đã từng làm chuyện này. Cũng như nhiều thứ trên đời, so sánh cũng có hai mặt: mặt tích cực và mặt tiêu cực. Ví dụ, Kỳ Tiên Hồ Vinh Hoa lấy Kỳ Ma Dương Quan Lân làm cái đích để bắn: đó là so sánh tích cực. Sự so kè giữa hai đại cao thủ này cho những người yêu cờ những danh cục mãn nhãn. Còn ví dụ tiêu cực của so sánh là chuyện Phính đã làm ở trên: "thằng đó giỏi chi mà trích dẫn nhiều rứa, ..." Làm như vậy chỉ số trích dẫn của Phính không tăng lên tí nào; ngược lại nó còn giảm đi vì trong lúc mình ngồi so sánh thì người ta đã cày thêm citations rồi. (Chuyện nhiều citations tốt hay xấu lại là một chuyện khác.)

Maradona thì giỏi đá bóng, Federer thì giỏi tennis, Hồ Vinh Hoa thì giỏi đánh cờ tướng, Lê

Quang Liêm cờ vua, Einstein Vật Lý. Mỗi người mỗi vẻ mỗi sở thích mỗi sở trường. Nếu mà Einstein đòi đi đá bóng thì ra trò trồng gì. Vậy nên, các bạn trẻ cứ cố gắng tìm ra đam mê lớn nhất, xem nó như một mỹ nhân, theo đuổi nàng đến tận chân trời góc biển. Trừ vài người 'đặc biệt' có ai đi cua mỹ nhân của người khác không? Vậy sao phải bắt chước người khác?

Nói thì dễ hơn làm. Nổ vừa thôi Phính. Đôn wo rì, dù gì Phính cũng là kỹ sư nên có vấn đề là có giải pháp. Hồi xưa lúc làm PhD ở Hà Lan, có một dịp thầy mình–Bert Sluys–hỏi: 'Phính, mày có biết thằng A. Nguyễn này không?' (vì ông đang đọc bài báo của anh này). Mình trả lơi ngay: 'biết chứ'. Thầy mình trả lời: 'tụi VN bây biết nhau hết thì phải'. Lúc đó mình không để ý đến nhận xét 'thâm thúy' này của ông. Nhưng giờ mình thấy nhận xét này đáng suy nghĩ. Nếu mình biết ít hơn thì mình sẽ ít so sánh hơn, mình sẽ đỡ mệt hơn. Đơn giản thế thôi. (Mình cứ bám sống ở xứ người cũng vì một lẽ đó. Ở đây ít khi người ta 'quan tâm' tới bạn cả.) Chỉ chú ý đến 'mỹ nhân' của mình thôi, và cứ thế mà cắm cổ cua nàng. Bảo đảm bạn sẽ 'không thành công thì cũng thành tro'.

Nhưng mà anh hàng xóm của tui ồn ào lắm: con ảnh học MIT, vợ ảnh là hoa hậu châu Phi, nhà ảnh 100 tầng ... Thì kệ cha ảnh thôi bạn. Làm sao mà đọ với anh này được. Mình nhìn lên nhiều, mỏi cổ thì phải nhìn xuống nữa chứ. Steve Jobs đúc kết lại rất hay như sau:

> *Thời gian của bạn có hạn, vì vậy đừng lãng phí nó để sống cuộc đời của người khác. Đừng bị ràng buộc bởi quan điểm cố định - đó là việc sống theo kết quả của tư duy của người khác.*

Ngày 9 tháng 7 năm 2023

# Lời cuối

Lương Triều Vỹ (LTV) và Châu Tinh Trì (CTT) là hai diễn viên Hồng Kông nổi tiếng. Là người thế hệ 8X và là fan cuồng phim chưởng không có gì ngạc nhiên khi mình biết đến LTV lần đầu tiên qua vai Trương Vô Kỵ trong bộ phim *Ỷ Thiên Đồ Long Ký* năm 1986. LTV là một trong số ít diễn viên Hồng Kông thành công trong cả phim truyền hình và phim điện ảnh; phim điện ảnh làm nên tên tuổi của ông có thể kể *Tâm Trạng Khi Yêu, Trùng Khánh sâm lâm, Sắc Giới*. Trong khi đó, ông Châu nổi tiếng qua những bộ phim như *Trường học Uy Long, Đội bóng Thiếu Lâm, Tuyệt đỉnh Kungfu*.

Cùng sinh năm 1962, LTV và CTT quen nhau vào khoảng thập niên 70. Lúc này, chàng Trương Vô Kỵ sau này đang làm nhân viên bán đồ gia dụng–một công việc ổn định, còn Tinh gia thì mơ ước làm diễn viên và đạo diễn. Rồi thì Tinh gia rủ Trương Vô Kỵ bỏ công việc để tham gia vào lớp diễn xuất của đài TVB. Bất chấp sự phản đối gay gắt của mẹ, LTV bỏ việc và đi thi vào TVB. Mẹ LTV giận lắm vì bà cho rằng gã trai tên Châu Tinh Trì hại con trai bà bỏ mất công việc ổn định để vào lớp đào tạo nghệ sĩ, tương lai chẳng biết sẽ thế nào. Năm 1982, Lương Triều Vỹ và Châu Tinh Trì cùng thi vào khóa diễn xuất 11 của TVB nhưng trớ trêu thay chàng Lương thì đỗ ngay còn anh Châu trượt vỏ chuối. Phải một năm sau, Châu Tinh Trì mới tham gia thi lại và đỗ. Khi ấy người bạn Lương Triều Vỹ đã bắt đầu bước chân vào TVB với tương lai xán lạn.

Từ một người bán đồ, rồi gặp Tinh gia, rồi trở thành một trong những diễn viên châu Á xuất sắc nhất mọi thời đại, trở thành nam diễn viên Hồng Kông đầu tiên giành giải Nam diễn viên xuất sắc nhất tại Liên hoan phim Cannes năm 2000 với bộ phim *Tâm trạng khi yêu*, và trở thành diễn viên giữ kỷ lục về số lần chiến thắng giải Nam diễn viên chính xuất sắc nhất tại cả Giải thưởng Điện ảnh Hồng Kông lẫn Giải Kim Mã, câu chuyện cuộc đời của LTV thật huyền diệu.

Không ai trong chúng ta có thể nói trước điều gì sẽ chờ đợi chúng ta phía trước. Nhưng điều đó không có nghĩa là chúng ta không có thể kiểm soát cuộc đời mình. Có rất nhiều sự lựa chọn chúng ta cần phải quyết định, không ai giúp được cả. Tinh gia là một minh chứng; ông xuất thân bần hàn như rất nhiều người nghèo khác, nhưng ông hơn nhiều người ở một điểm: ông có đam mê cháy bỏng với võ thuật và cố tài tử Lý Tiểu Long. Ông làm tất cả để theo đuổi ước mơ của mình, dù ông gặp vô vàn khó khăn (có lẽ ngoại hình không bằng LTV). Ở Hồng Kông có câu "Lưỡng Châu nhất Thành"; hai Châu này thì một là Phát Ca Châu Nhuận Phát, còn Châu kia thì không ai khác mà chính là Châu Tinh Trì. (Nếu bạn đang thắc mắc thì Thành là Thành Long.)

Sau đây là những gì cuốn chân kinh này muốn truyền tải đến các bạn trẻ:

- Có ước mơ, theo đuổi nó; đại văn hào Mark Twain đã nói

  > *"Hai mươi năm sau, bạn sẽ thất vọng hơn vì những điều bạn không làm hơn là vì những điều bạn đã làm. Vì vậy, hãy kéo dây neo lên, giương buồm đón gió đi xa ra khơi khỏi bờ cảng an toàn. Khám phá, Mơ mộng, Phát hiện."*

- Học và làm việc một cách khoa học; điểm số thời này không phản ánh đúng sự hiểu biết của bạn. Chỉ cần lên núi, với vài tờ giấy trắng rồi tự viết về một đề tài nào đó một cách mạch lạc; làm được vậy thì bạn đã hiểu vấn đề vậy. Khi học thì luôn nhớ dùng cái 'gương': sau mỗi lần kiểm tra, chẳng hạn, soi gương xem mình làm đúng/sai chổ nào;

- Lúc làm bài tập mà bí thì nhất quyết không liếc xem lời giải càng lâu càng tốt, lúc làm cái gì thì không nên nhìn bài mẫu rồi mới làm. Tại sao? Tại vì làm như vậy là lí do chúng ta có những bài văn kiểu *Nhà em có nuôi một bà ngoại*... Điều này cực kỳ quan trọng cho những ai muốn phát triển tính sáng tạo;

- Học giỏi tiếng Anh (không phải để đi du học, mà là đọc những tuyệt phẩm);
- Đọc nhiều sách, sách khoa học thường thức, sách lịch sử, sách tiểu sử để tìm hiểu tiểu sử các người thành công trong lĩnh vực bạn yêu thích để xem họ suy nghĩ, hành động như thế nào. Tuy nhiên, hãy lắng nghe những gì Samuel Paterson (1728 – 1802) nói:

  *Những cuốn sách, giống như bạn bè, nên ít và được lựa chọn kỹ lưỡng.*

- Xắn tay vào làm ngay những gì bạn thích; không phải có người đã nói "Nếu bạn muốn biến giấc mơ của mình thành hiện thực, điều đầu tiên bạn phải làm là tỉnh dậy" đó sao;
- Học thì phải có sai sót, có khi có nhiều thì càng hiểu sâu, tuy nhiên không thể cho phép sai lầm lặp lại;
- Trường học phải là nơi dạy cách suy nghĩ (chứ không phải chỉ truyền tải kiến thức), do đó nếu trường không làm được điều này thì các bạn phải biết tự học cách suy nghĩ;
- Khi học Toán và các môn khoa học thì nên tìm hiểu lịch sử chúng, không những nó thú vị mà nó còn giúp các bạn hiểu sâu về môn mình đang học, ví như tại sao ông A nghĩ ra cách này, hay ông B tìm ra chất kia ...;
- Chấp nhận thất bại, đừng nghĩ nhiều về thành công của người khác, tập trung vào bản thân. Tục ngữ Ấn độ có câu *"Tỏ ra mình hơn người chưa phải là hay. Cái chân giá trị là có thể tỏ rằng hôm nay mình đã hơn chính mình ngày hôm qua"*;
- Làm việc chăm chỉ, vì “Nơi duy nhất mà ở đó thành công (**S**uccess) đến trước công việc (**W**ork) là trong từ điển” như Vidal Sassoon (1928 – 2012), một thợ làm tóc, doanh nhân và nhà từ thiện người Anh đã nói;
- Viết cho riêng mình một cuốn chân kinh;
- Khi bạn chăm chỉ tập thể dục (để rèn luyện cơ thể) thì đừng quên rèn luyện trí tuệ;
- Gian nan mới tỏ anh hùng, khi khó khăn thì hãy ngâm câu thơ của cụ Phan Bội Châu:

  Ví phỏng đường đời bằng phẳng quá,
  Anh hùng hào kiệt có hơn ai?

Đó là những gì cuốn chân kinh này muốn truyền tải đến các bạn trẻ. Bạn có thể thành một Lương Triều Vỹ hay không thì không ai dám nói, nhưng chắc chắn bạn sẽ trở thành một phiên bản tốt hơn của chính mình. Cuối cùng xin kết thúc với bài thơ của thi sĩ người Mỹ Douglas Malloch (1877–1938), do học giả Nguyễn Hiến Lê (1912–1984) dịch:

Chẳng làm thông vút trên đồi
Thì làm cây nhỏ bên ngòi dưới thung
Thông kia đẹp nhất trong vùng,
Tuy tôi bé nhỏ, sánh cùng thông xanh.

Làm cây chẳng được cũng đành
Tôi làm ngọn cỏ xanh xanh bên đàng.
Thân không hóa kiếp cá vàng,
Thì làm tôm tép thung thăng trong đầm.

Có tướng mà cũng có quân,

Ai lo việc nấy, dưới trần cùng vinh.
Có việc trọng, có việc khinh,
Miễn tròn bổn phận, trọng khinh xá gì?

Rộng hẹp cũng thể đường đi.
Mặt trời, sao nhỏ khác chi bạn hiền.
Việc gì tận mỹ là nên,
Thành công chẳng kể sang hèn thấp cao.

# Tài liệu tham khảo


David Acheson. *The Wonder Book of Geometry: A Mathematical Story*. OUP Oxford, 2020. ISBN 9780192585387,9780198846383. [Đã trích dẫn trên trang 203]

Lara Alcock. *Mathematics Rebooted: A Fresh Approach to Understanding*. Oxford University Press, 1 edition, 2017. ISBN 0198803796,9780198803799. [Đã trích dẫn trên trang 234]

Isaac Asimov. *A Short History of Chemistry*. Anchor Books, 1st edition edition, 1965. ISBN 0385036736,9780385036733. [Đã trích dẫn trên trang 298]

W. W. Rouse Ball. *A short account of the history of mathematics*. Michigan historical reprint. Scholarly Publishing Office, University of Michigan Library, 2005. ISBN 1418185272,9781418185275. [Đã trích dẫn trên trang 131]

Eric Temple Bell. *Men of Mathematics: The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré*. Touchstone, 1986. ISBN 0-671-62818-6, 978-1-4767-8425-0. [Đã trích dẫn trên trang 131]

Warren Berger. *A More Beautiful Question: The Power of Inquiry to Spark Breakthrough Ideas*. Bloomsbury USA, 2014. ISBN 1620401452,9781620401453. [Đã trích dẫn trên trang 104 and 122]

William Dunham. *Journey through Genius: The Great Theorems of Mathematics*. 1991. ISBN 9780140147391,9780471500308,014014739X,0471500305. [Đã trích dẫn trên trang 94 and 172]

Martin Gardner. *My Best Mathematical and Logic Puzzles*. Dover Recreational Math. Dover Publications, 1994. ISBN 0486281523,9780486281520. [Đã trích dẫn trên trang 258]

Adam Grant and Sheryl Sandberg. *Originals: How Non-Conformists Move the World*. Viking, 2016. ISBN 0525429565,9780525429562. [Đã trích dẫn trên trang 75 and 325]

Paul Hoffman. *The Man Who Loved Only Numbers - The Story of Paul Erdos [mathematician*. Hyperion, 1st edition, 1998. ISBN 9780786863624,0786863625. [Đã trích dẫn trên trang 86 and 100]

Steven Johnson. *Where Good Ideas Come From: The Natural History of Innovation*. 1 edition, 2010. ISBN 1594487715,9781594487712. [Đã trích dẫn trên trang 341]

Kathy Joseph. *The Lightning Tamers*. Smart Science Press, 2022. [Đã trích dẫn trên trang 111]

Victor J. Katz. *A History of Mathematics*. Pearson, 3rd edition edition, 2008. ISBN 0321387007,9780321387004. [Đã trích dẫn trên trang 131]

J. Mason, L. Burton, and K. Stacey. *Thinking mathematically*. Addison-Wesley Pub. Co, 1982. ISBN 0201102382,9780201102383. [Đã trích dẫn trên trang 142]

David McRaney. *You Are Not So Smart: Why You Have Too Many Friends on Facebook, Why Your Memory Is Mostly Fiction, and 46 Other Ways You're Deluding Yourself*. Gotham, 2011. ISBN 1592406599,9781592406593. [Đã trích dẫn trên trang 108]

Mark Miodownik. *Stuff Matters: Exploring the Marvelous Materials That Shape Our Man-Made World*. Mariner Books, reprint edition, 2015. ISBN 0544483944,9780544483941. [Đã trích dẫn trên trang 302]

Jerry Z. Muller. *The Tyranny of Metrics*. Princeton University Press, 2018. ISBN 9781400889433,140088943X. [Đã trích dẫn trên trang 274, 274, and 275]

Cal Newport. *How to Become a Straight-A Student: The Unconventional Strategies Real College Students Use to Score High While Studying Less*. Three Rivers Press, 2006. ISBN 9780767927192. [Đã trích dẫn trên trang 108]

Vinh Phu Nguyen. *Minimum mathematics for future engineers and scientists: an inspiring self studying note*. 2023. URL `https://www.researchgate.net/publication/360324957_MINIMUM_MATHEMATICS_for_future_scientists_and_engineers_An_inspiring_self-study_note`. [Đã trích dẫn trên trang 91, 212, 338, 339, and 339]

Vinh Phu Nguyen, Stephane Bordas, and Alban de Vaucorbeil. How to effortlessly write a high quality scientific paper in the field of computational engineering and sciences. 2021. URL `https://www.researchgate.net/publication/339630885_How_to_effortlessly_write_a_high_quality_scientific_paper_in_the_field_of_computational_engineering_and_sciences`. [Đã trích dẫn trên trang 119 and 119]

Vinh Phu Nguyen, Alban de Vaucorbeil, and Stephane Bordas. *The Material Point Method: Theory, Implementations and Applications*. Springer Cham, 1 edition, 2023. ISBN 1434-8322. [Đã trích dẫn trên trang 72 and 320]

Paul Nurse. *What Is Life?: Five Great Ideas in Biology*. W. W. Norton & Company, 2021. ISBN 0393541150,9780393541151. [Đã trích dẫn trên trang 325]

Barbara Oakley. *A Mind For Numbers: How to Excel at Math and Science (Even if You Flunked Algebra)*. Tarcher, 2014. ISBN 039916524X,9780399165245. [Đã trích dẫn trên trang 102, 209, and 209]

Barbara Oakley, Terrence Sejnowski, and Alistair McConville. *Learning How to Learn: How to Succeed in School Without Spending All Your Time Studying; A Guide for Kids and Teens*. 2018. ISBN 978-0143132547. [Đã trích dẫn trên trang 132]

Yoko Ogawa. *The Housekeeper and the Professor*. Picador, 2009. ISBN 9781409076667. [Đã trích dẫn trên trang 86]

G. Polya. *How to solve it; a new aspect of mathematical method*. Princeton paperbacks, 246. Princeton University Press, 2d ed edition, 1971. ISBN 9780691023564,9780691080970,0691023565,0691080976. [Đã trích dẫn trên trang 82]

David S. Richeson. *Euler's gem: The polyhedron formula and the birth of topology*. Princeton University Press, 1 edition, 2008. ISBN 0691126771,9780691126777. [Đã trích dẫn trên trang 204]

Simon Singh. *Fermat's Last Theorem*. FOURTH ESTATE, 1997. ISBN 1857025210,9781857025217. [Đã trích dẫn trên trang 328]

V. Anton Spraul. *Think Like a Programmer: An Introduction to Creative Problem Solving*. No Starch Press, 2012. ISBN 1593274246,9781593274245. [Đã trích dẫn trên trang 252]

John Stillwell. *Mathematics and Its History*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 3 edition, 2010. ISBN 144196052X,9781441960528. [Đã trích dẫn trên trang 131]

Steven H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Studies in nonlinearity. Addison-Wesley Pub, 1994. ISBN 0201543443,9780201543445,9780738204536,0738204536. [Đã trích dẫn trên trang 117]

Bjarne Stroustrup. *Programming: Principles and Practice Using C++*. Addison-Wesley Professional, 1 edition, 2009. ISBN 0321543726,9780321543721. [Đã trích dẫn trên trang 252]

Nora D Volkow, Roy A Wise, and Ruben Baler. The dopamine motive system: implications for drug and food addiction. *Nature Reviews Neuroscience*, 18(12):741–752, 2017. [Đã trích dẫn trên trang 109]

James D. Watson. *Avoid Boring People: Lessons from a Life in Science*. Knopf, 2007. ISBN 9780307481795. [Đã trích dẫn trên trang 334]

Isaac Watts. *Improvement of the Mind*. 2015. [Đã trích dẫn trên trang 112]

Lawrence Weinstein and John A. Adam. *Guesstimation: Solving the World's Problems on the Back of a Cocktail Napkin*. Princeton University Press, 2008. ISBN 9780691129495,0691129495. [Đã trích dẫn trên trang 310 and 314]

Paul Zeitz. *The Art and Craft of Problem Solving*. John Wiley, 2nd ed edition, 2007. ISBN 9780471789017,0471789011. [Đã trích dẫn trên trang 142]